И. В. ПОРОЙКОВ

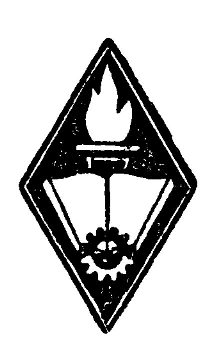
КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ



И. В. ПОРОЙКОВ

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1965

Учебно-методическое управление по вузам Министерства высшего и среднего специального образования СССР рекомендует книгу проф. И. В. Поройкова как один из первых опытов создания краткого учебного пособия по курсу физики.

Управление надеется, что использование «Краткого курса лекций» в учебном процессе и последующее обсуждение его на кафедрах физики поможет решить одну из важных методических задач — создать для втузов краткий, но ясный и четкий по изложению учебник по физике.

♦

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

КВАНТОВЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Краткий курс лекций по физике» для втузов предназначено для студентов, аспирантов, инженеров и преподавателей, ведущих лекционный курс физики в технических вузах.

Пособие состоит из 71 тематической лекции, в которых содержится разбор тех важнейших физических процессов и явлений, на понимании которых в настоящее время основана творческая инженерная деятельность.

Основное внимание в лекциях уделено сущности физических процессов и величин, определяющих их течение, функциональным и статистическим закономерностям, теоретическому обоснованию явлений и практическим приложениям физики. В первых лекциях рассматриваются исходные соотношения современной физики макро- и микрообъектов как следствия, вытекающие из фактов дискретности действий и конечности скорости их возникновения. Такой дедуктивный подход к изучению обширного и разнообразного материала курса физики представляется наиболее целесообразным.

В периодической и научно-популярной литературе постоянно помещаются статьи по современным физико-техническим проблемам с использованием релятивистских и квантовых соотношений. Поэтому начинать курс лекций по физике с чего-либо иного было бы неестественно. Чтобы сохранить за лекциями их стимулирующее влияние на развитие мышления, в пособии устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки.

В целях наиболее полного выявления смыслового соответствия между физическим содержанием приводимых соотношений и их математическим выражением в лекциях использованы обычные для физики абсолютные системы единиц, однако параллельно указаны единицы системы СИ.

В конце книги приведены таблицы физических величин, единиц измерений и формул, записанных в абсолютных системах единиц и в рационализованной форме в системе СИ.

Многолетний опыт чтения лекций по системе изложения, принятой в «Кратком курсе лекций», позволяет заключить, что избран-

ный путь повышения уровня знаний будущих инженеров в области физики дает положительные результаты.

Автор благодарит рецензентов проф. А. С. Ахматова и коллектив кафедры физики МАИ за просмотр первоначального текста рукописи и сделанные ими замечания, которые были учтены при переработке рукописи.

Автор считает приятным долгом выразить свою благодарность коллективу кафедры физики МАДИ за помощь в составлении и оформлении книги и заведующему кафедрой проф. Б. И. Котову, который при чтении корректуры дал ряд ценных советов, позволивших улучшить содержание книги.

Автор

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Лекция 1

ФИЗИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ВЕЛИЧИНЫ И СООТНОШЕНИЯ

Физика рассматривает природу как объективную реальность, существующую независимо от нашего сознания. Возникая, развиваясь и преобразуясь, физические объекты находятся в постоянном естественном движении, вследствие чего между ними возникают пространственно-временные соотношения.

Все физические явления протекают во времени и пространстве. Изменения движения физических объектов, происходящие в результате их взаимодействий, осуществляются не мгновенно, а в течение того или иного конечного времени. В применении к простейшей механической форме поступательного движения материальных тел это качество называют инерцией, а меру его — массой.

При перемещении физического объекта относительно других объектов масса его оказывается величиной относительной и большей, чем масса покоя. Масса движения связана со скоростью перемещения и, следовательно, зависит от выбранной системы отсчета координат движущегося тела.

Свойства всякой частицы вещества не локализованы только там, где сосредоточено само вещество, они простираются и за его пределы, образуя силовое поле взаимодействий. Это поле представляет собой одну из форм существования материи, однако силовое поле не обязательно обладает массой покоя.

Вещество и поле образуют физическое пространство, в котором протекают все физические явления.

Частица всегда находится во взаимосвязи не только с полями других частиц, но и с собственным силовым полем. Все изменения в силовом поле происходят также не мгновенно, а с некоторой конечной скоростью c, которая не зависит от движения системы отсчета и равна скорости света.

Все процессы, связанные с полями, протекают только с этой предельной большой скоростью распространения любых сигналов, которые могут служить средствами причинной связи явлений.

Конечность значения скорости c тесно связана с нашей способностью различать близкое и далекое, предыдущее и последующее, источник сигнала и приемник, причину и следствие. Существование универсальной скорости распространения взаимодействий вытекает из представлений о том, что пространство и время являются понятиями относительными.

Вещество и поле образуют ту среду, в которой протекают все физические явления. Однако значения этих двух факторов среды, необходимых для характеристики свойства физического объекта, изменяются по мере уменьшения размеров и массы покоя частиц вещества.

Для частиц больших масс (тел) взаимодействие с собственным полем мало влияет на их движение; для частиц малых масс (микрочастиц) искажения собственного поля при наложении на него внешнего поля влекут за собой существенные изменения в характере их движения. Свойства микрочастицы в физике качественно отличаются от свойств материальной точки классической механики.

В этой связи некоторые привычные представления макромира полностью теряют смысл в применении к микрообъектам. Вместо них мы вынуждены пользоваться менее наглядными, но более соответствующими состоянию и движению микрочастицы статистическими характеристиками их свойств.

К известным законам классической механики Ньютона: закону всемирного тяготения, закону инерции, основному закону динамики, приводящему к обобщенному понятию силы $f = ma$ (здесь m — масса покоя тела, a — ускорение его движения), современная физика добавляет новые, полученные из опыта, соотношения, существенные для характеристики микрообъектов. Экспериментальное доказательство инвариантности * скорости c распространения светового сигнала в вакууме ($c = 2{,}99792 \cdot 10^{10}$ *см* · *сек*$^{-1} \simeq 3 \cdot 10^{8}$ *м* · *сек*$^{-1}$, Майкельсон, 1881 г.) позволили показать, что между массой m всякого физического объекта и присущей ему (во взаимосвязи с окружающей средой) энергией E имеет место соотношение (Эйнштейн, 1905 г.):

$$E = mc^2, \qquad (1,1)$$

где E — полная энергия физической системы, включая энергию образующих ее частиц и полей.

---

* Инвариантное — одинаковое в различных условиях, неизменное. Здесь: не зависящее от движения системы координат.

Таким образом, масса тела, служащая мерой его инертности, связана прямой пропорциональностью с энергией этого тела, т. е. является понятием относительным, зависящим от его относительной скорости.

Справедливость соотношения (1,1) подтверждена экспериментально на многочисленных ядерных превращениях и фотоэлектрических явлениях.

При определенных условиях в поле атомного ядра происходит превращение γ- кванта электромагнитного излучения с энергией $h\nu_\gamma$, превышающей величину $2m_0c^2$, в две легкие элементарные частицы (электрон и позитрон), каждая из которых обладает массой покоя $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$ *г*, так что

$$h\nu_\gamma \to 2m_0c^2 + E_к, \tag{1,2}$$

где $E_к$ — кинетическая энергия образованной пары частиц. Наблюдается и обратный процесс — превращение (аннигиляция) пары частиц в два кванта энергии γ-излучения.

Эксперименты по проникновению микрочастиц (электронов, ионов, нейтронов) сквозь тонкие слои кристаллического вещества показали, что каждую микрочастицу, обладающую импульсом

$$p = mv,$$

в целях адекватного * описания ее движения следует сопоставить с некоторой волной, длина которой λ_p определяется импульсом частицы p (де Бройль, 1923 г.):

$$\lambda_p = \frac{h}{p}, \tag{1,3}$$

где h — так называемый квант действия, или постоянная Планка.

Одним из важнейших и универсальных физических принципов является вариационный принцип Гамильтона, впервые сформулированный в рамках классической механики и оптики, а впоследствии распространенный на все известные формы движения.

Согласно этому принципу физическая величина H, называемая действием, выражается формулой

$$H = \int_{t_1}^{t_2} E[p(t),\ x(t)]\, dt, \tag{1,4}$$

(где t_1 и t_2 — моменты начала и конца рассматриваемого движения, характеризующегося энергией E) и принимает для ре-

* Латинское слово: adequatus — вполне соответствующий, тождественный.

ально осуществляющегося движения наименьшее значение. Это минимальное значение действия H достигается при вполне определенных зависимостях координат $x(t)$ и импульсов $p(t)$ от времени, удовлетворяющих уравнениям движения, которые также могут быть найдены методами вариационного исчисления из выражения (1,4). Принцип Гамильтона справедлив в рамках классической и квантовой теорий, в применении к движению частиц и распространению силовых полей.

Используя принцип предельной скорости c передачи любого действия и свойства, вытекающие из однородности и изотропности пространства — времени, можно совершенно общим путем вывести соотношение Эйнштейна (1,1).

Развитие современной физики неоспоримо доказало на большом количестве различных физических явлений (излучение нагретых тел, фотоэффект, излучение атомов, реакция рождения новых частиц и др.), что значения действия для всех связанных форм движения квантованы, т. е. действие H может изменяться только дискретным образом, скачкообразно. При этом величина наименьшего скачка или кванта действия для любых форм движения всегда одинакова, постоянна и равна

$$h = 6{,}623 \cdot 10^{-27}\ \textit{эрг} \cdot \textit{сек} = 6{,}623 \cdot 10^{-34}\ \textit{дж} \cdot \textit{сек}. \qquad (1{,}5)$$

Представление о кванте действия было введено впервые в 1900 г. М. Планком, который нашел его приближенное значение. Поэтому величина h получила название постоянной Планка. Согласно Планку, возможные значения действия H должны быть целыми, кратными элементарному кванту действия h, т. е.

$$H = nh, \qquad (1{,}6)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Для периодических движений с периодом $T = \frac{1}{\nu}$ наименьшее изменение действия H за период согласно (1,4) и (1,6) равно

$$\frac{\Delta H}{T} = h\nu = \varepsilon_\nu. \qquad (1{,}7)$$

Таким образом, ε_ν — значение элементарного кванта энергии гармонического движения частоты ν.

Применив представление о квантовании действия к орбитальному движению электрона в атоме водорода вокруг ядра по окружности радиуса r_n, можно показать (Н. Бор, 1912 г.), что

$$H = p_n l_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

где $p_n = m_0 v_n$ — импульс электрона на n-й орбите, $l_n = 2\pi r_n$ —

длина ее окружности. Отсюда, согласно (1,6), следует известное выражение

$$m_0 v_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \qquad (1,8)$$

обычно называемое постулатом Бора.

Сравнивая выражение для длины волны де Бройля (1,3) с выражением (1,8), замечаем, что на длине окружности l_n допустимой орбиты электрона в атоме укладывается строго n длин волн, т. е.

$$\frac{l_n}{\lambda_p} = n. \qquad (1,9)$$

В классической механике движение любого тела полностью определено для всех моментов времени, если для какого-либо момента времени, который может быть выбран в качестве начального, заданы одновременно его положение в пространстве и импульс. Таким образом, движение в классической механике предполагается строго детерминированным. Однако эти представления не могут быть полностью перенесены на движение микрообъектов — частиц, масса которых сравнима с массой атомов или еще меньше ее. Их движение описывается вероятностными волновыми соотношениями и носит статистический характер. Последнее означает, что движение отдельных частиц не подчиняется законам классической механики и в этом смысле не детерминировано. Определенные выводы и предсказания о движении таких частиц можно сделать при наблюдениях за поведением либо коллектива частиц, либо отдельной частицы в течение достаточно большого промежутка времени. Квантовый статистический характер движения микрочастиц приводит к тому, что на описание их движения в терминах классической механики наложены определенные ограничения. Одним из таких ограничений является соотношение неопределенности Гейзенберга, выражающее неполноту описания движения при помощи координат и импульсов. Представления о координате частицы $x(t)$ и ее импульсе $p(t)$ в данный момент времени описывают реальную ситуацию лишь с известной точностью. Если неточность в значении координаты частицы обозначить через Δx, а неточность значения импульса — через Δp, то согласно соотношению Гейзенберга

$$\Delta p \cdot \Delta x \geqslant \hbar. \qquad (1,10)$$

Таким образом, принципиально невозможно одновременно точно определить как положение, так и импульс частицы. Чем с большей точностью будет экспериментально найдено положение частицы, тем менее определенным будет становиться величина ее импульса.

Соотношение Гейзенберга отражает общий закон природы, справедливый не только в микромире. Однако для частиц достаточно большой массы значение этого закона утрачивается. Так, уже для массы 10^{-8} *г* (броуновская частица), движущейся со скоростью $v = 10^{-2}$ *см·сек*$^{-1}$, имеем

$$\Delta x \geqslant \frac{\hbar}{m_0 v} \approx \frac{10^{-27}}{10^{-8} \cdot 10^{-2}} = 10^{-17} \text{ см},$$

т. е. допускаемая соотношением (1,10) неточность в определении координаты значительно меньше размеров атомного ядра.

Соотношение Гейзенберга является прямым логическим следствием квантового характера изменения действия и статистического характера движения.

Развитие физики в XX в. и переход от классической физики к современной происходили по двум направлениям. С одной стороны выяснилось, что законы классической механики справедливы только для медленных по сравнению со скоростью *c* движений. Созданная трудами Эйнштейна (1879—1955) теория (так называемая специальная теория относительности, или классическая релятивистская механика) явилась обобщением классической механики Ньютона (1642—1727) на случай сколь угодно больших скоростей, вплоть до предельной скорости движения *c*. С другой стороны стало бесспорным, что классическая механика совершенно непригодна для описания движения электронов в атомах и взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. Заложенная в работах Планка (1858—1947) и Бора (1885—1962), а затем развитая де Бройлем (род. 1892 г.), Гейзенбергом (род. 1901 г.) и Шредингером (1887—1960), квантовая механика явилась обобщением нерелятивистской классической механики, пригодным для описания процессов в микромире.

Всю совокупность возможных относительных значений скоростей $\frac{v}{c}$ и действия $\frac{H}{h}$ в значительной мере условно можно разделить на четыре области в соответствии со схемой рис. 1-1. Как видно из рисунка, в области высоких энергий (скорости $v \to c$) для описания поведения микрочастиц должна применяться релятивистская квантовая теория. Созданию такой теории посвящено большое количество исследований (Дирак, род. 1902 г.), однако ее развитие до сих пор еще не завершено.

Математические формулы физики связывают в уравнения численные значения физических величин, выражающие те или иные закономерности природы. Эти величины могут иметь различный математический характер. Скалярные физические величины (отрезки длин, интервалы времени, энергия, действие, температура, магнитный поток) полностью определяются своими числовыми значениями и складываются алгебраически. Для определения векторных величин (скорости, ускорения, силы, напряженности полей, плотности электрических токов) требуется еще указать их на-

правления. Им соответствуют ориентированные отрезки-векторы, которые складываются геометрически. В ряде случаев, например, при описании свойств анизотропных сред (электрическая и магнитная проницаемость, электропроводность и др.), значения физических величин зависят от направления и описываются тензорами. Тензоры геометрически характеризуются поверхностями, радиусы-векторы к которым соответствуют физическим величинам.

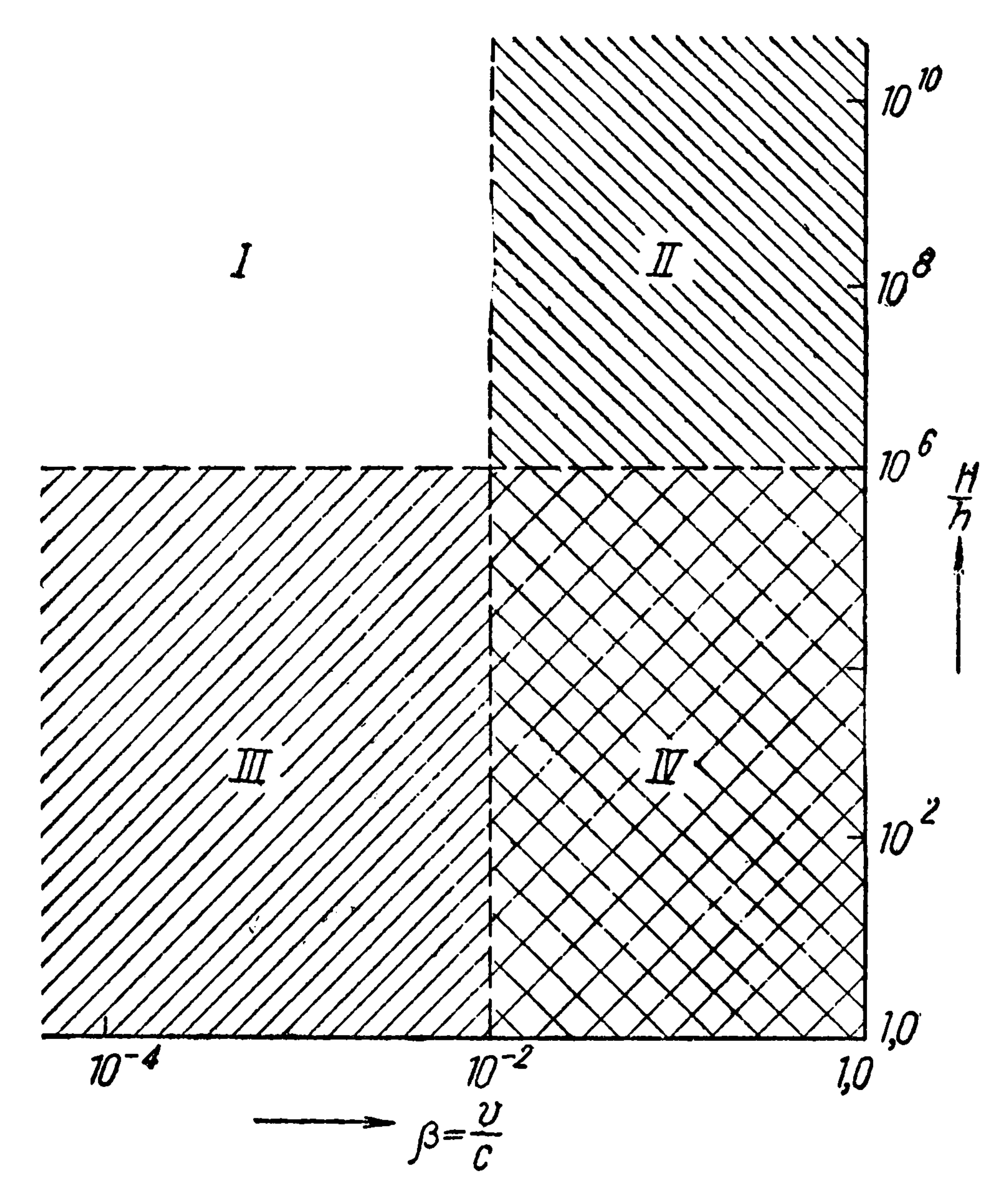


Рис. 1-1. Примерное распределение областей механики соответственно значениям $\frac{v}{c}$ и $\frac{H}{h}$:

I — классическая; *II* — релятивистская; *III* — квантовая; *IV* — квантовая релятивистская

Различные математические соотношения физики представляют собой уравнения одного из трех видов. Уравнение выражает определение некоторой физической величины (например, скорость, коэффициент упругости, поверхностное натяжение и т. п.), если все другие входящие в него величины выясняются независимо от этого уравнения. Уравнение выражает функциональную (причинную) связь, если все физические величины, входящие в него, включая и коэффициенты, известны независимо от этого уравнения, причем физические коэффициенты в уравнении имеют вполне оп-

ределенные значения. Например, уравнение состояния газа Менделеева — Клапейрона, уравнение гармонического колебания, дифференциальное уравнение теплопроводности, барометрическая формула Больцмана и др.

В тех случаях, когда уравнения выражают только частичную, или стохастическую, связь переменных величин, т. е. связывают лишь средние статистические значения этих величин, их называют

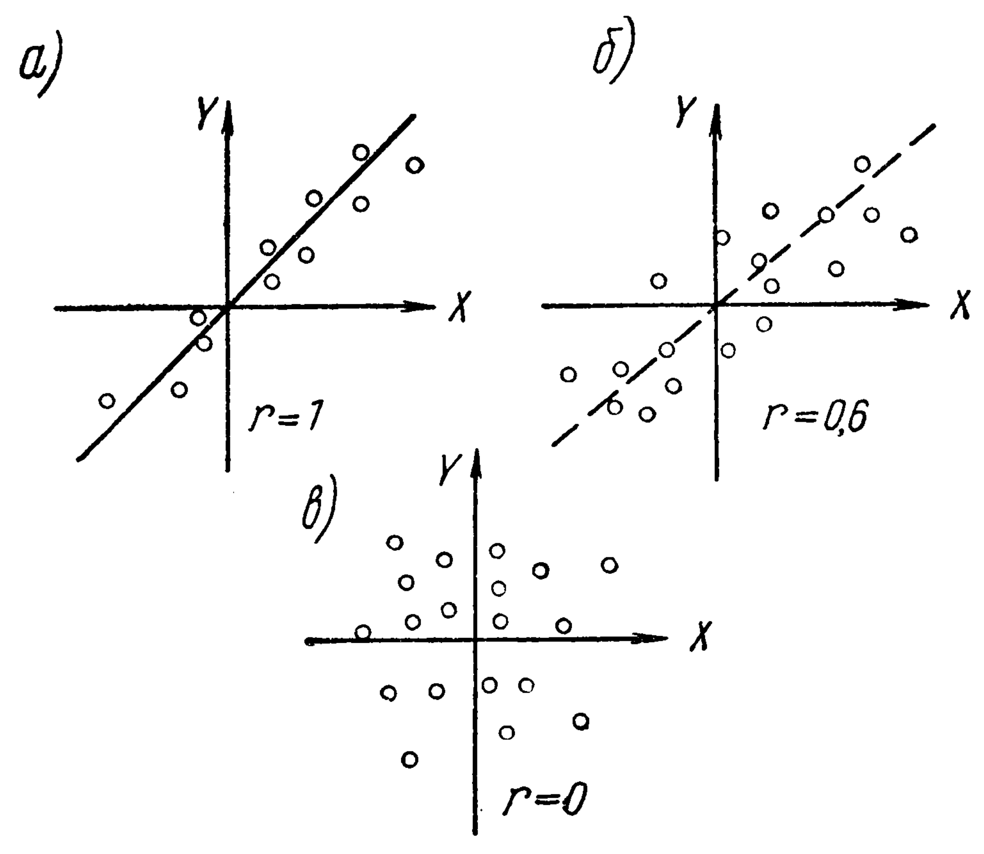


Рис. 1-2. Корреляционные ситуации: *а*) функциональная линейная зависимость; *б*) стохастическая линейная связь; *в*) корреляция отсутствует

корреляционными. Если две переменные величины коррелированы, а не связаны причинно, то нельзя указать определенного значения одной из них по заданному значению другой, но можно путем подбора уравнения стохастической связи установить наиболее вероятное значение, относительно которого полученные из наблюдений значения распределяются по одному из законов рассеяния вероятностей.

Отсутствие корреляции между случайными явлениями не означает их полной независимости, но показывает, что связь между ними, если она есть, существует по другим, а не по выбранным параметрам (рис. 1-2).

Лекция 2

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Часть механики, в которой рассматриваются только пространственно-временные соотношения величин, характеризующих различные движения, называется кинематикой.

Траектория, скорость и ускорение движения являются основными кинематическими параметрами.

В классической механике Ньютона пространству и времени придан смысл абсолютных величин, не зависящих от вещества и его движения и являющихся одинаковыми для любых систем тел, любых взаимодействий и любых скоростей движений. С математической точки зрения обе эти величины представляются независимыми переменными, и потому совпадение мировых событий рассматривается раздельно в пространстве и во времени. Как показывает опыт, такой подход к рассмотрению механических явлений вполне оправдан только в случаях макротел, перемещения которых обычно происходят со скоростями, малыми по сравнению со скоростью c возникновения полей взаимодействий.

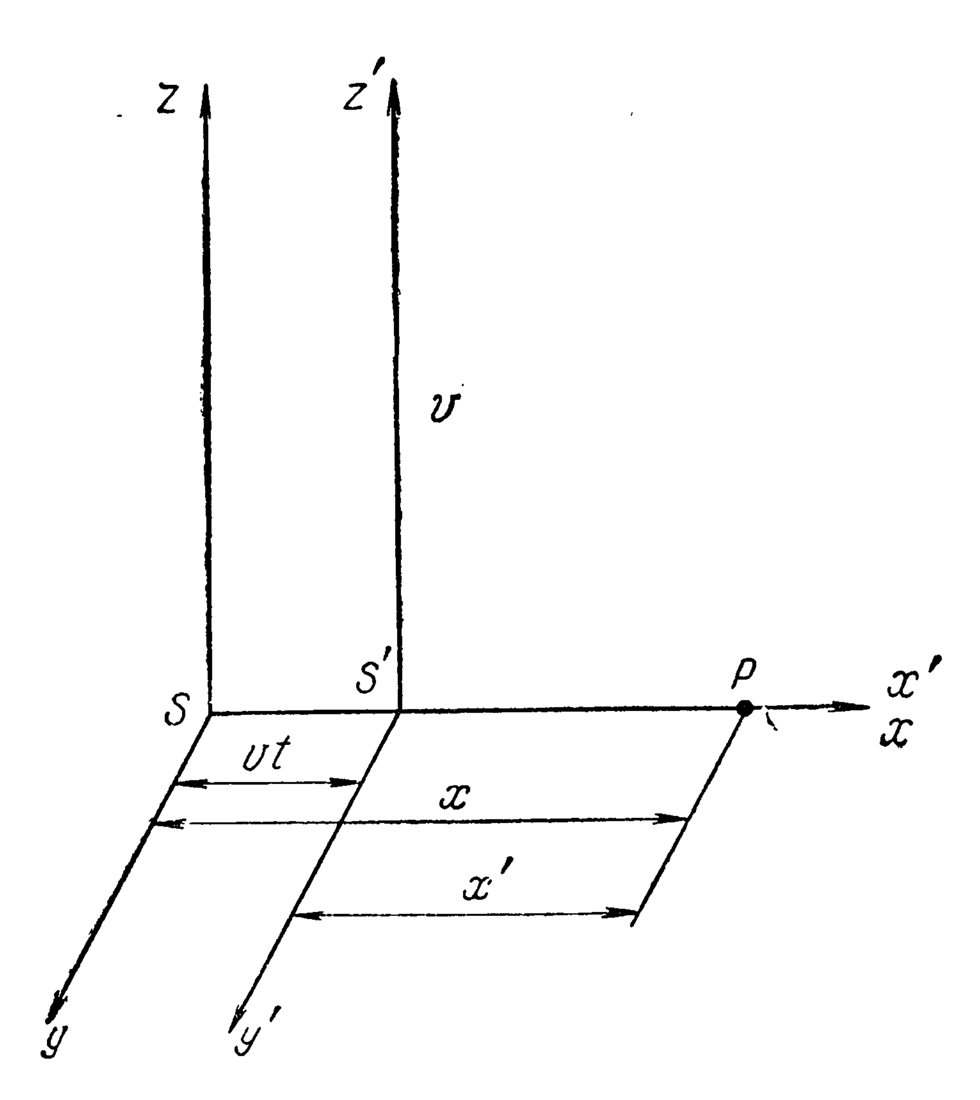


Рис. 2-1. Коллинеарные координаты двух инерциальных систем S и S'

В соответствии с первым законом классической механики Ньютона (законом инерции), началом отсчета для относительных перемещений тела может служить любое, практически свободное от связей тело. Множество таких координатных систем отсчета представляют инерциальные системы, потому что в каждой из них соблюдается закон инерции несмотря на то, что относительные скорости перемещения тел в разных системах отсчета будут различны.

Если рассмотреть две коллинеарные, прямоугольные координатные системы отсчета S и S' (рис. 2-1), у одной из которых начало

координат S' движется вдоль оси x с постоянной скоростью v, то по формулам классической механики можно записать

$$\left.\begin{aligned} t' &= t; \\ x' &= x - vt; \\ y' &= y; \\ z' &= z, \end{aligned}\right\} \qquad (2,1)$$

где x, y, z — координаты произвольно выбранной точки P на оси x.

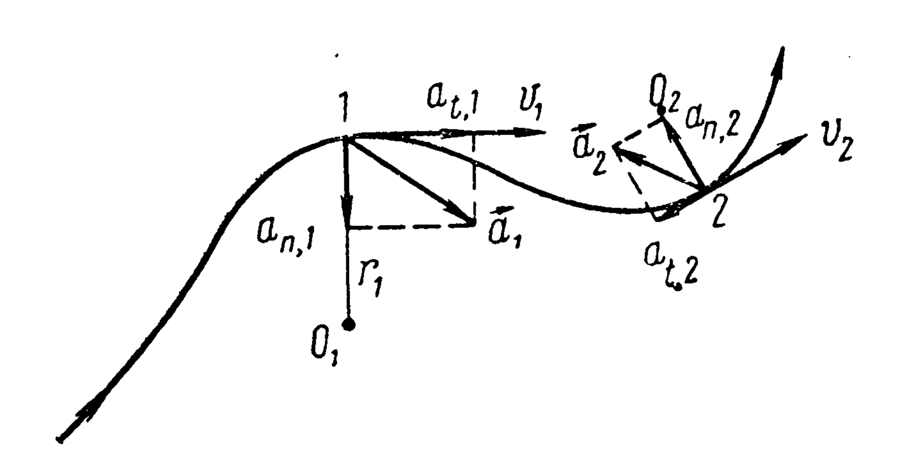


Рис. 2-2. Траектория криволинейного движения на плоскости:
a_t и a_n — тангенциальная и нормальная составляющие ускорения; $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — векторы полного ускорения на двух участках траектории

Отсюда следует, что расстояние Δx между двумя точками инвариантно относительно выбора системы отсчета, так как

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 = \Delta x.$$

Взяв производную по времени от координаты перемещения x и обозначив $\dot{x} = u$ и $\dot{x}' = u'$, получим

$$u' = u - v. \qquad (2,2)$$

Выражения (2,1) и (2,2) представляют собой кинематические преобразования для координаты и скорости, вытекающие из классического принципа относительности движений Галилея. Вычисление производной по времени от скорости u' с учетом $t' = t$ приводит к формуле ускорения

$$a' = \dot{u}' = \dot{u} = a. \qquad (2,3)$$

Таким образом, ускорения для инерциальных систем, а значит и взаимодействия тел по динамике Ньютона, также инвариантны относительно преобразования Галилея. Следовательно, законы классической механики соблюдаются во всех инерциальных системах отсчета.

Обычно приблизительно выбирают ту инерциальную систему (звездную, солнечную, земную, лабораторную, атомную или центромассовую), которая представляется наиболее удобной для записи уравнений движения и взаимодействий, т. е. для записи зависимостей компонент перемещения (например, x, y, z) от времени и для записи законов сохранения.

В тех случаях, когда тела, выбранные в качестве системы отсчета, сами перемещаются с ускорением относительно некоторой инерциальной системы, к силам взаимодействий, уравновешенным по третьему закону Ньютона силами реакции, присоединяется еще неуравновешенная сила инерции, возникающая при ускоренном движении тел системы отсчета. В этих случаях соотношения (2,3) уже не имеют места. Ускорения не будут инвариантны относительно системы отсчета.

Направление вектора скорости определяется траекторией движения тела (материальной точки) в избранной системе отсчета. Для нахождения направления вектора ускорения в общем случае необходимо задать две его составляющие: тангенциальную a_t, направленную вдоль вектора скорости, и нормальную a_n, направленную к центру кривизны рассматриваемого участка траектории (рис. 2-2).

Тангенциальная составляющая ускорения характеризует изменение линейной скорости по модулю и имеет значение, равное скалярной производной от скорости по времени ($a_t = \dot{v}$); нормальная составляющая вызывает изменение направления вектора скорости и зависит не от изменения скорости, а от ее значения (см. рис. 2-2):

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2,$$

так как $v = r\omega$, где ω — значение угловой скорости перемещения тела.

Таким образом, мгновенное значение модуля полного ускорения имеет вид

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2}. \qquad (2,4)$$

Преобразования Галилея (2,2) не подтвердились при наблюдениях движений с большими скоростями. Например, не оказалось нарушений в ритме периодического движения двойных звезд, между тем как направление скорости их движения меняется на прямом и обратном путях обращения. Скорость света, таким образом, оказалась не зависящей от движения источника. Такой же результат был получен из серии опытов Майкельсона по световым интерференционным измерениям движения Земли относительно «абсолютного» пространства.

Выбор условий этого эксперимента диктовался теми соображениями, что, во-первых, мировое космическое пространство представляет собой среду, наиболее свободную от элементов вещества (атомов, ядер, электронов и других микрочастиц), так что механические движения в нем происходят практически без сопротивлений; во-вторых, скорость орбитального движения Земли в инерциальной системе отсчета, связанной с Солнцем, достаточно велика ($v = 3 \cdot 10^4$ *см·сек*$^{-1}$), чтобы можно было отметить ее влияние согласно преобразованиям Галилея; в-третьих, интерференция света является тем наиболее чувствительным методом, с помощью которого возможны точные измерения малых разностей хода лучей δ.

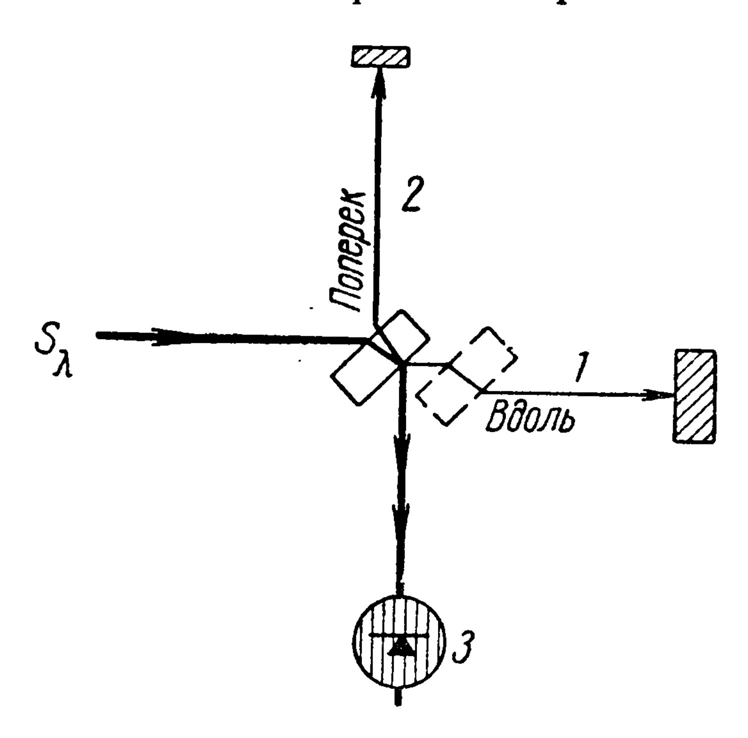


Рис. 2-3. Схема эксперимента Майкельсона для обнаружения движения Земли относительно «абсолютного» пространства Ньютона:

1 — плечо интерферометра «вдоль» направления движения Земли; *2* — плечо интерферометра «поперек» этого направления; *3* — картина интерференционных полос в поле зрения прибора

Если световые монохроматические лучи длиной волны λ, испускаемые источником, распространяются на одно и то же земное расстояние l «вдоль» и «поперек» орбитального движения Земли (рис. 2-3), то после отражения от зеркал лучи, вновь соединяясь, создают на выходе некоторую интерференционную картину, состоящую из чередующихся светлых и темных полос. Расположение этих полос зависит от того, насколько скорость распространения света «вдоль» отличается от скорости света «поперек». При повороте интерферометра на угол $\frac{\pi}{2}$ так, чтобы его плечи поменялись направлениями, должен наблюдаться удвоенный сдвиг интерференционной картины. Преобразования Галилея позволяют определить ожидаемое число полос сдвига.

Время распространения сигнала «вдоль» можно записать в виде

$$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\beta^2},$$

где $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$; согласно рис. 2-4 время распространения сигнала «поперек» получим из формулы

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 - l^2 = \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2, \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\beta^2\,*$$

и значит образующаяся дополнительная разность хода лучей будет

$$\delta = c \cdot \Delta t = l\beta^2 = n\lambda,$$

где n — число полос сдвига интерференционной картины.

В условиях опытов Майкельсона $\beta = \frac{v}{c} \approx 10^{-4}$, длины плеч интерферометра $l = 3 \cdot 10^3$ *см*, а длина волны лучей $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ *см*, так что $n = \frac{l}{\lambda}\beta^2 \approx \frac{1}{2}$. При повороте интерферометра на угол $\frac{\pi}{2}$ сдвиг интерференционной картины, таким образом, должен был бы составить ширину целой полосы. Чувствительность измерительных установок допускала обнаружение сдвигов, в сотни раз меньших, но никаких сдвигов обнаружено не было. Преобразования Галилея по отношению к световым сигналам не подтвердились. Скорость оказалась постоянной, не зависящей от направления распространения и движения источника. Представления классической механики Ньютона о независимости и абсолютности пространства и времени оказались непригодными для больших скоростей движения, сравнимых со скоростью света. Явления природы существуют сопряженно с пространством и временем, которые сами являются зависимыми переменными и определяются движением вещества. Мировые интервалы следует рассматривать как пространственно-временные протяженности, а одновременность событий — как совокупное пространственное и временное совпадение. Так как пространство и время взаимно связаны движением, то линейные размеры и промежутки времени теряют свою абсолютность. Для системы отсчета, связанной с движущимся объектом, эти величины (собственные масштабы длины и времени) будут иными, чем для инерциальных систем, по отношению к которым объект перемещается с большой скоростью.

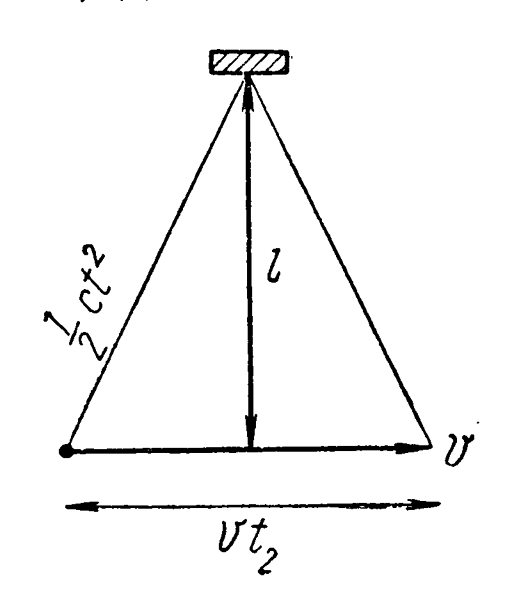


Рис. 2-4. К расчету времени движения светового сигнала «поперек» в опыте Майкельсона

Относительность понятий «пространства» и «времени», а также инвариантность и предельность скорости света в любых инерциальных системах отсчета лежат в основе релятивистской механики — механики больших скоростей движений. В соответствии с этим кинематические преобразования Галилея изменяются в более общие преобразования Лоренца. Вводя некоторый релятивистский мно-

---

* При $\beta \ll 1$ $\frac{1}{1-\beta^2} \approx 1 + \beta^2$ и $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \sqrt{1+\beta^2} \cong 1 + \frac{1}{2}\beta^2$.

житель $\alpha = \alpha(v)$ и полагая $t' \neq t$ для двух инерциальных систем отсчета (см. рис. 2-1), можно записать, согласно выражению (2,1) и принципу относительности, соответственно

$$\alpha x' = x - vt$$
$$\alpha x = x' + vt'. \qquad (2,1')$$

Отсюда после преобразований

$$\alpha t' = \frac{(\alpha^2 - 1)\,x}{v} + t,$$

и, следовательно,

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{\frac{(\alpha^2 - 1)\,x}{v} + t} = \frac{u - v}{(\alpha^2 - 1)\frac{u}{v} + 1}. \qquad (2,5)$$

Значение релятивистского множителя α выясняется из условия нормирования, вытекающего из опытов Майкельсона и других наблюдений над инвариантностью и постоянством скорости света в вакууме.

Подставляя $u' = u = c$ в формулу (2,5), получаем

$$\alpha = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \qquad (2,6)$$

Значит, преобразования Лоренца (2,1′) примут вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \varphi(x, v), \\ u' &= \dot{x}' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}; \quad \dot{y}' \neq \dot{y}; \quad \dot{z}' \neq \dot{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,7)$$

При больших скоростях относительного движения двух инерциальных систем отсчета векторные ускорения для одного и того же тела уже не будут одинаковы, так как $t' \neq t$. Для медленных движений, чаще всего встречающихся в технике машиностроения, когда $\frac{u}{c} \ll 1$ и $\frac{v}{c} \ll 1$ (иначе при $c = \infty$), преобразования Лоренца (2,7) переходят в преобразования Галилея (2,1), а релятивистская механика — в классическую.

Однако в космических явлениях и явлениях микромира не редки случаи движения физических объектов со скоростями, близкими

к предельной скорости движения масс или энергий (скорости света в вакууме). Примерами могут служить движения электронов в электровакуумных приборах, движения ливнеобразующих частиц космического излучения и микрочастиц, испускаемых ядрами при их распаде и ядерных реакциях. Во всех таких процессах выводы релятивистской механики получили полное подтверждение.

Связь пространства с временем может быть выражена в математической форме путем введения четвертого измерения (метод Минковского). Так, если для трехмерного пространства длина отрезка l независимо от относительной скорости движения системы отсчета определялась по формуле

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

то, вводя четвертую мнимую координату $jct\,(j=\sqrt{-1})$, меняющуюся в зависимости от времени, можно записать подобное выражение для четырехмерного пространства в таком виде

$$s^2 = l^2 - c^2t^2. \qquad (2,8)$$

Уравнение, записанное в этом виде, является основным инвариантом по отношению к любым системам отсчета и не зависит от движения наблюдателя. При $l = 0$ $s = jct$, т. е. имеем мнимую координату времени.

Далее $s = 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, т. е. при движении со скоростью света, когда точка в трехмерном пространстве за время t перемещается на отрезок $l = ct$. Чтобы наглядно проследить относительность понятия одновременности событий, надо воспользоваться геометрическим изображением связи пространства и времени на координатной плоскости x, ct (рис. 2-5). Равноотстоящие точки A, C, B, покоящиеся на оси x, изображены в координатах x, ct мировыми равноотстоящими линиями, параллельными оси ct. При равномерном движении точек A, C, B с постоянной скоростью $v \leqslant c$ те же мировые линии на чертеже представятся параллельными наклонными линиями ct' с углом наклона α к оси мнимого времени $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c} \leqslant 1\right)$. Как видно из построения в координатах x, ct линий двух световых сигналов, одновременно испущенных из точки C, время достижения точек A и B, при их относительном покое, будет одинаковым (отрезки AA_1 и BB_1), но в случае равномерного движения точек A, C, B оно будет разным (отрезки $A''A'$ и $B''B'$) в той же системе отсчета. Однако для системы отсчета x', ct', движущейся вместе с точками A, B, C, время прибытия сигналов будет снова одинаковым ($t'_A = t'_B$). Таким образом, полагая в выражениях (2,7) $x' = 0$ и значит $x = vt$, находим, что промежуток времени $t_0 = t'$ (собственное время системы S') в движущейся системе будет

соответствовать промежутку

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} t_0 \tag{2,9}$$

для системы, относительно которой происходит перемещение (т. е. время окажется удлиненным). По этой причине движущиеся часы

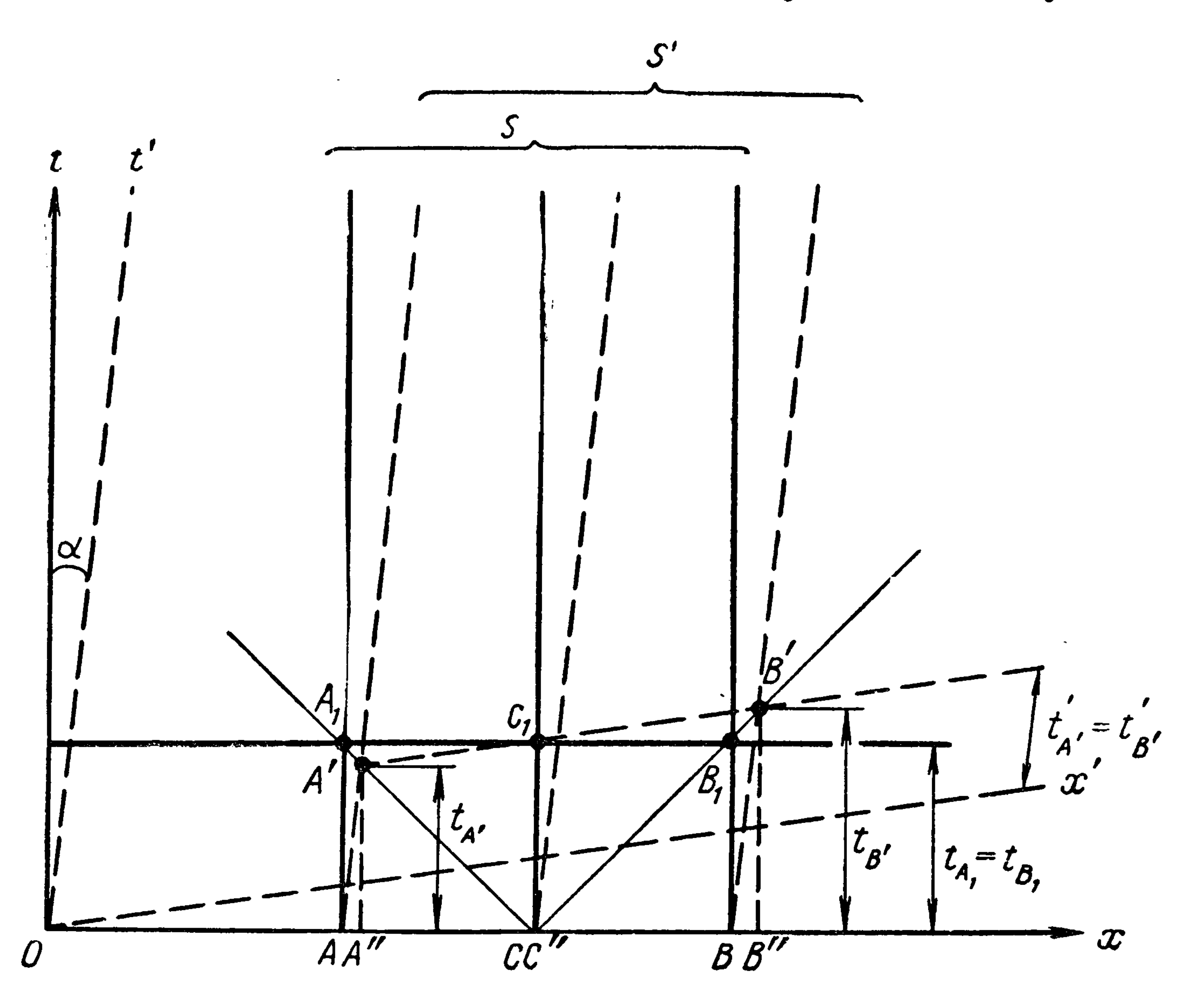


Рис. 2-5. Графическая иллюстрация относительности пространства и времени по Минковскому:

Обозначения: сплошные линии, параллельные t, — мировые линии покоящихся точек A, C, B системы S; пунктирные наклонные линии, параллельные t', — мировые линии точек A, C, B системы S' при их равномерном движении; $A'C$ и CB' — линии светового сигнала из C при $t = 0$; t_{A_1}, t_{B_1} — время прихода светового сигнала из C в A и B для системы S при относительном покое A, B, C; $t_{A'}$, $t_{B'}$ — время прихода сигнала из C в A' и B' для системы S при равномерном движении A, C, B с одинаковыми скоростями; $t'_{A'}$, $t'_{B'}$ — время прихода сигнала из C в A' и B' для системы S' при движении A, C, B с одинаковыми скоростями

отстают от покоящихся. Длины тел в направлении их движения в системе S (см. рис. 2-1) укоротятся, поскольку при $t = 0$, т. е. при одновременности отметки обоих краев тела относительно системы S (см. рис. 2-5) из уравнения (2,7) имеем:

$$l = x = l_0 \sqrt{1-\beta^2}, \tag{2,10}$$

где $l_0 = x'$ — собственная длина тела в системе S'.

Таким образом, для наблюдателя, связанного с инерциальной системой отсчета, при перемещении в ней объекта со скоростью

$v = c$ ($\beta = 1$) относительные понятия продольной протяженности объекта в этой системе и временных интервалов теряют для него смысл. При $\beta = 1$ для любых $l_0 = x' \neq 0$ и $t_0 = t' \neq 0$ из выражений (2,10) и (2,9) соответственно имеем $l = x = 0$ и $t = \infty$.

Лекция 3

ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Как было отмечено, микрообъекты физики качественно отличаются от материальных точек классической механики.

При убывании размера, а значит и массы покоя частицы, все большее значение в изменении механического движения частицы приобретает ее поле. Локализация свойств становится все менее определенной; все большую роль играет конечное значение элементарного кванта действия h.

Квантовая механика является механикой микрообъектов, созданной на основе взаимодействия «квантового объекта» с классическим. Она содержит классическую механику как предельный случай. Любую квантовую систему, т. е. микросистему или микрочастицу (атомы, электроны, ядра), для которой квант действия не может считаться величиной пренебрежительно малой, нельзя выявить с любой точностью, поскольку возмущение, вызванное взаимодействием такой системы с классическим объектом, влечет за собой неконтролируемые изменения состояния и движения квантовой системы.

Это означает, что совокупность одновременных значений физических величин классической механики, характеризующих состояние и движение системы, не может быть установлена для микрообъекта с любой точностью. Таким образом, в случае микрообъекта принципиально невозможно указать одновременные значения импульса и координаты микрочастицы, определяющие движение материальной точки в классической механике.

В границах точности, достаточной для определенности суждений, квантовая механика не может дать сведений относительно дальнейших значений динамических характеристик микрообъекта. Квантовая механика определяет лишь вероятность того или иного результата при последующем установлении этих характеристик.

Привычные понятия классической механики, такие, как траектория движения частицы, ее координаты и импульс, теряют свою определенность при движении микрообъектов. Пользоваться этими понятиями, а следовательно, и аналитическим аппаратом классической механики (области *I* и *II* на рис. 1-1) для адекватного отображения движения микрообъекта, уже нельзя. Выявление свойств физических объектов происходит через их взаимодействия (импульс работы). Следовательно, пределы применимости классической механики определяются значением элементарного кванта действия h.

Одновременная информация о величинах, характеризующих движение микрочастицы в классических понятиях, может быть получена лишь с той точностью, с которой допускает конечное значение кванта действия h.

Именно такой смысл имеет квантовое соотношение неопределенности Гейзенберга — Бора (1927)

$$\Delta p \cdot \Delta x \geqslant \hbar. \tag{3,1}$$

Здесь Δx и Δp — размеры вероятных, квантово-возможных неточностей, которые возникают при одновременной и совокупной информации о координате x и импульсе p частицы, или, иначе, о значении действия $H = xp = mvx$, соответствующего микрочастице.

Даже если речь идет о мелких частицах, например коллоидных частицах, размеры и масса которых достаточно малы ($r = x = 10^{-5}$ *см*, $m_0 = 10^{-18}$ *г*, $v = 100$ *см/сек*), но для которых определяющая совокупность mvx еще настолько велика (10^{-21} *эрг · сек*), что по сравнению с ней квант действия ($\hbar \approx 10^{-27}$ *эрг · сек* $= 10^{-34}$ *дж · сек*) может считаться ничтожно малой величиной $\left(\frac{\hbar}{mvx} = 10^{-6}\right)$; в этом случае вполне допустимо пользоваться классической механикой. Однако для электрона эта возможность отпадает, поскольку его масса покоя составляет лишь 10^{-9} от массы рассмотренной коллоидной частицы.

Рассматривая микрообъекты нерелятивистской области механики (см. рис. 1-1) $\left(\beta = \frac{v}{c} \ll 1\right)$, т. е., полагая массу микрочастицы m_0 величиной постоянной, из выражения (3,1) имеем

$$\Delta x \frac{\Delta v}{v} \geqslant \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{p} = \lambda_p. \tag{3,2}$$

Отсюда видно, что неопределенность корпускулярных * критериев классической механики, а именно координаты x и скорости частицы v, в применении к микрообъектам тем меньше, чем значительнее импульс p рассматриваемой микрочастицы, т. е. $\lambda_p = 0$. При умеренных скоростях движения ($\beta \ll 1$) это заключение соответствует большим массам тел (макротела), а при малых массах — большим скоростям их движения. Поэтому наблюдаются четкие следы электронов, ядер и мезонов в конденсационных камерах и на фотоэмульсиях.

В случаях малых масс и умеренных скоростей, например для движений электронов в металлах ($m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$ *г* и $v = 10^7$ *см · сек*$^{-1}$), корпускулярные свойства микрообъектов вовсе не проявляются.

При точной информации об одной из исходных величин, например о начальном импульсе электрона ($p = m_0 v = 10^{-20}$ *г · см · сек*$^{-1}$), из выражения (3,2) имеем, что неточность в одновременном установлении другой величины (координаты) не может быть менее 10^{-7} *см*.

* Латинское слово: corpusculum — тельце.

Это намного превышает значение самой величины $x\ (10^{-13}\ см)$ *, принимаемой за размер электрона.

Понятия классической механики в таких случаях не пригодны для правильного отображения движения частицы. Необходимо обращаться к представлениям квантовой механики, которые хотя и менее наглядны, но позволяют учитывать специфические свойства микрообъектов, обладающих собственными малыми значениями действия H.

Неопределенность корпускулярных признаков движения микрочастицы означает, что при взаимодействиях с другими микрообъектами относительно возрастает роль поля частицы. Такие частицы поля, как фононы и фотоны, масса покоя которых равна нулю, в своих проявлениях подчиняются волновым закономерностям (волны упругости для фононов, электромагнитные волны для фотонов). Квантовая механика микрообъектов, таких, как частицы малых масс покоя, оказывается также волновой механикой.

Однако если волны гравитации упругости и электромагнитные волны связаны с распространением энергии соответствующих полей, то волновые функции, рассматриваемые в квантовой механике, представляют собой лишь математическое средство для вероятностного учета фазы движения микрообъекта. Фазовые волны не сопоставляются с реальным процессом в каком-либо силовом поле. Как способ описания микрообъектов они были введены Луи де Бройлем в 1924 г. За меру длины фазовой волны λ_p, которую надо связывать с состоянием движения микрочастицы, чтобы правильно отобразить ее возможное перемещение, де Бройль предложил выражение для фазовой длины волны, подобное тому, какое соответствует квантам электромагнитного излучения [см. (3.2)]:

$$\lambda_p = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}. \qquad (3,3)$$

По форме оно аналогично выражению для фотонной волны электромагнитного поля:

$$\lambda_ф = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_ф c}. \qquad (3,4)$$

Пользуясь связью между энергией и массой, можно показать, что фазовые волны частиц не соответствуют реальным колебаниям поля. Действительно, в обратном случае, согласно формулам (1,1) и (3,3), для нерелятивистского случая получили бы уравнения

$$E = m_0 c^2 = h\nu_p \quad \text{и} \quad \lambda_p = \frac{h}{m_0 v}, \qquad (3,5)$$

* Классический радиус электрона $r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ находится из условия $E_п = e\varphi = \frac{e^2}{r} = m_0 c^2$.

где m_0 — масса покоя частицы. Положив, как всегда, $\nu_p \lambda_p = v_p$ и подставив сюда выражения (3,5), для скорости фазовых волн получим соотношение

$$v_p = \frac{c^2}{v}. \qquad (3,6)$$

Скорость движения частицы $v \leqslant c$, значит $v_p \geqslant c$, т. е. фазовым волнам следовало бы приписать скорость, больше предельной скорости передачи энергии, что невозможно. Таким образом, фазовые волны не отражают какого-либо реального волнового процесса, но с их помощью выясняются вероятностные закономерности движения микрочастицы.

При больших массах или очень больших скоростях поступательного движения длины фазовых волн частиц по выражению (3,3) оказываются настолько малыми, что поведение частиц соответствует корпускулярным проявлениям (прямолинейное движение, слабое рассеяние, упругое взаимодействие) квантов энергии излучений.

Наоборот, при малых массах и относительно небольших скоростях длины фазовых волн соизмеримы с размерами элементов среды (электронов, атомов, молекул) или их превышают, и частицы отчетливо проявляют свои статистические волновые свойства (например, свойство дифрагировать).

Многие эксперименты, проведенные с электронными, ионными и нейтронными пучками, полностью подтвердили справедливость соотношения, предложенного де Бройлем (рис. 3-1, 3-2, 3-3, 3-4).

Единство противоположных свойств объектов может быть учтено, если наряду с корпускулярными критериями движения микрочастиц в одних условиях будут рассматриваться также и волновые уравнения для фазовой волны, отражающей свойства микрообъекта при его движении в условиях сильного влияния внешних микрополей.

Уравнение в частных производных волновой функции ψ, соответствующее фазовой волне, которая представляет свойства микрочастицы в поле внешних сил (например, электрона в атоме), является основным уравнением квантовой механики — уравнением Шредингера.

Комплексная функция ψ соответствует амплитуде статистической вероятности обнаружения микрочастицы с заданной длиной фазовой волны де Бройля. Квадрат модуля этой функции $\psi\psi^*$ выражает пространственную плотность этой вероятности, так что значение величины $\psi\psi^* \cdot dV$ (dV — элемент объема вблизи точек x, y, z) определяет вероятность обнаружения микрочастицы в этом объеме в данное время.

В квантовой механике используются математические операторы, собственные значения которых согласуются с возможными значениями физической величины. Все основные квантово-механические соотношения, записанные в операторной форме, по виду совпадают с соотношениями классической механики.

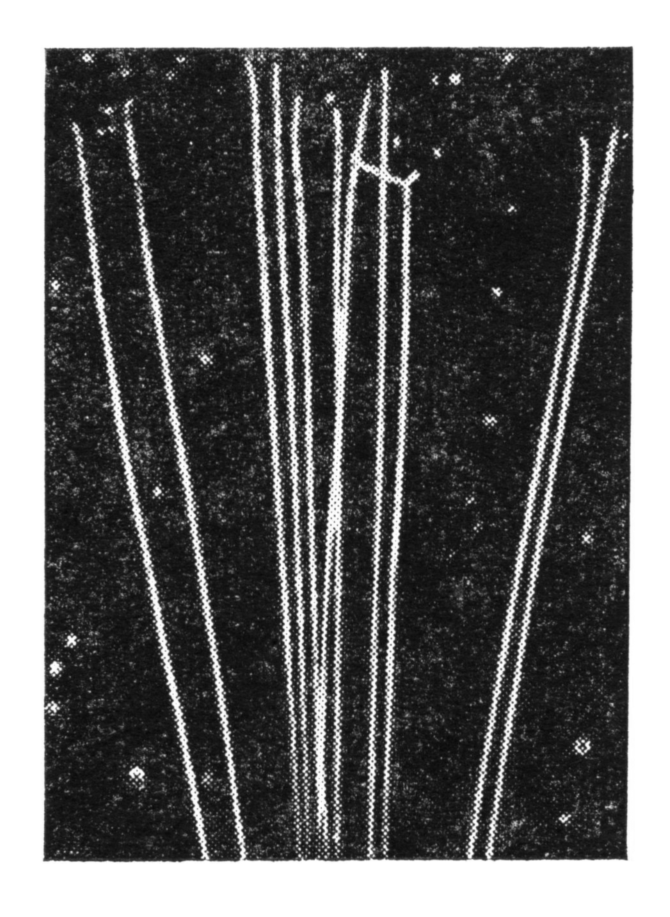


Рис. 3-1. Корпускулярные проявления микрочастиц больших энергий: следы α- частиц в конденсационной камере

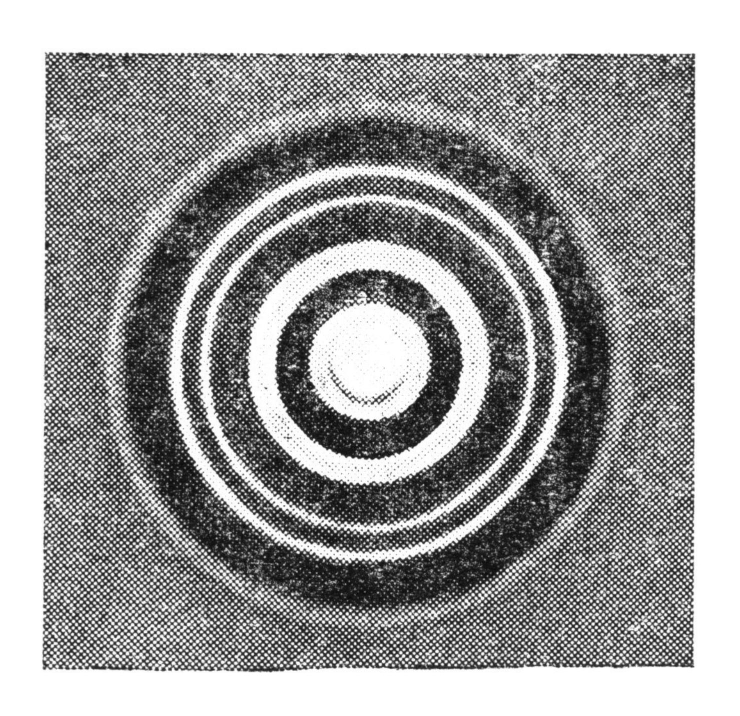


Рис. 3-2. Волновые проявления микрочастиц. Картина электронной дифракции от пленки Au толщиной 22 Å.

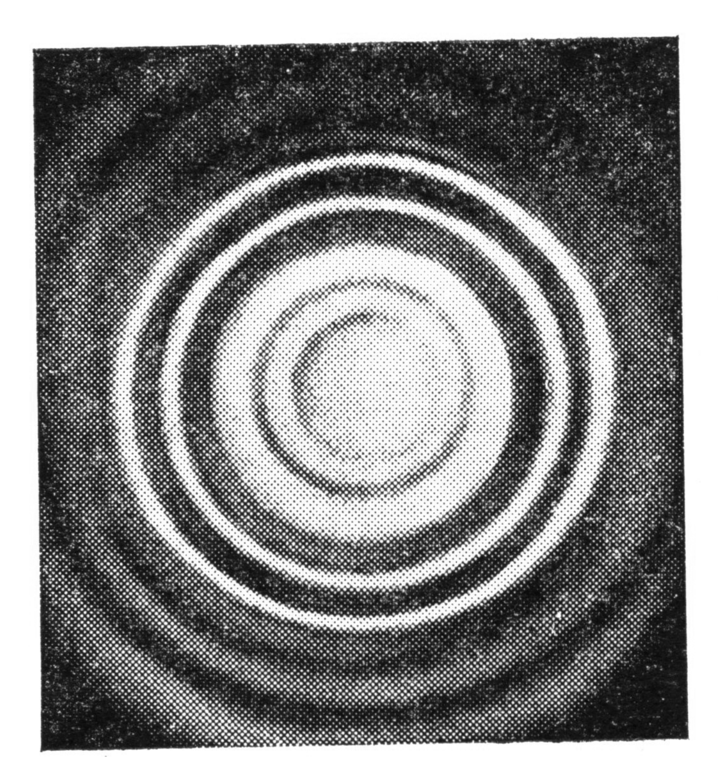


Рис. 3-3. Волновое проявление квантов излучения: дифракционные кольца от рентгеновского излучения (Al)

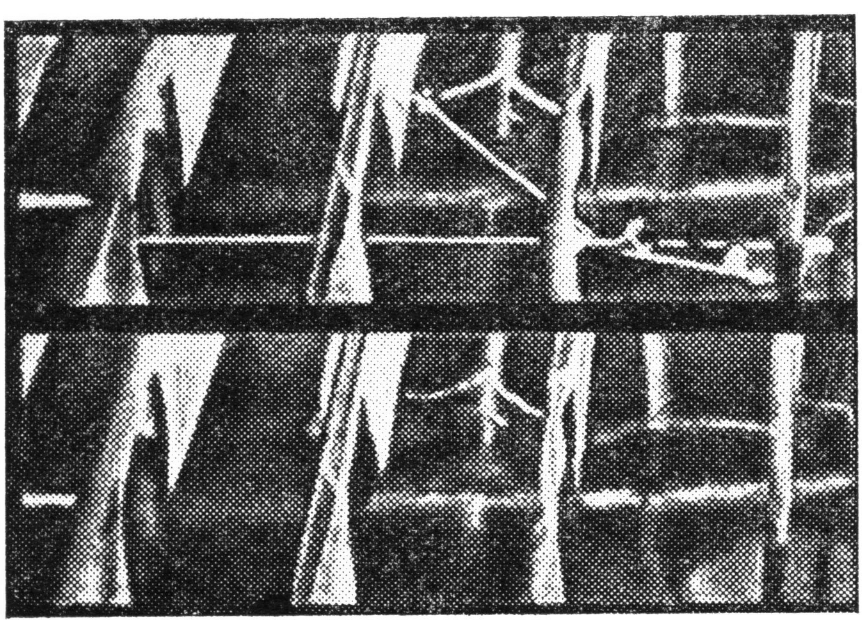


Рис. 3-4. Корпускулярное проявление квантов излучений: явления отдачи при рассеянии γ-кванта электроном. Путь электрона отдачи и фотоэлектрона, вырванного из слоя свинца (нижний снимок — снимок столкновения в конденсационной камере; верхний — то же, но пути частиц обозначены стрелками (по Комптону)

Переход от квантового описания к классическому соответствует условию, что в предельном случае квазиклассической системы волновая функция $\psi = a^{j\varphi} = a^{jH/h}$ характеризуется большими значениями фазы $\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda_ф} = \frac{H}{h}$. Таким образом, переход квантовой механики в классическую связан с большими значениями «квантовости» H/h системы и малыми значениями длины фазовой волны $\lambda_ф$ де Бройля, т. е. с очень большими (релятивистскими) значениями скорости движения микрочастицы.

Если в некоторый момент заданы волновая функция и распределение вероятностей значений координаты частицы, то это распределение в дальнейшем сохраняется согласно законам классической механики.

Квантовая механика возникла не из-за неточности законов движения классической механики, а по причине неприспособленности ее основных понятий к описанию движений микрообъектов.

Лекция 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Динамика составляет ту часть механики, в которой рассматриваются движения тел при заданных взаимосвязях. В отсутствии связей движение тела по инерции согласно первому закону Ньютона характеризуется постоянством количества движения mv. Появление каждой отдельной связи нарушает это состояние движения и, следовательно, вызывает изменение количества движения $d\,(mv)$.

Второй закон Ньютона связывает кинематические величины с динамическими. Для этого вводится понятие импульса силы $f \cdot dt$, как понятия, выражающего взаимное влияние тел.

Мерой элементарного импульса силы, т. е. произведения мгновенного значения силы f на время ее проявления dt, по основному закону классической механики служит происшедшее изменение количества движения тела $d\,(mv)$ или изменение импульса частицы dp, т. е. всегда имеет место векторное соотношение

$$\vec{f} \cdot dt = d\,(m\vec{v}) = d\vec{p}. \tag{4,1}$$

Это выражение справедливо при всех механических взаимодействиях, т. е. при всяких значениях масс тела и любых значениях скоростей их движения ($v \leqslant c$). По этой причине количество движения mv отдельной частицы называют ее импульсом p.

Если скорость частицы невелика $\left(\frac{v}{c} = \beta \ll 1\right)$, то массу частицы можно считать постоянной и равной массе покоя ($m = m_0$).

Тогда выражение (4,1) примет вид

$$f = m_0 \frac{dv}{dt} = m_0 a. \tag{4.2}$$

Значения импульсов частиц и тел практически лежат в широких границах: от 10^{-24} *кг · м · сек*$^{-1}$ для фотоэлектрона, вырываемого ультрафиолетовыми лучами из металла, до 10^7 *кг · м · сек*$^{-1}$ для товарного поезда среднего состава.

Проявления сил любой природы — тяготения, упругости, трения — сводятся в инерциальных системах отсчета к возникновению ускорения. В неинерциальных системах отсчета, движущихся с ускорением по отношению к инерциальным, кроме перечисленных сил, будут проявляться неуравновешенные взаимодействия, обусловленные ускорением системы отсчета, т. е. силой инерции. Такие силы хорошо известны из повседневного опыта: они возникают при торможении, разгоне, виражах, подъемах и спусках на любом виде транспорта.

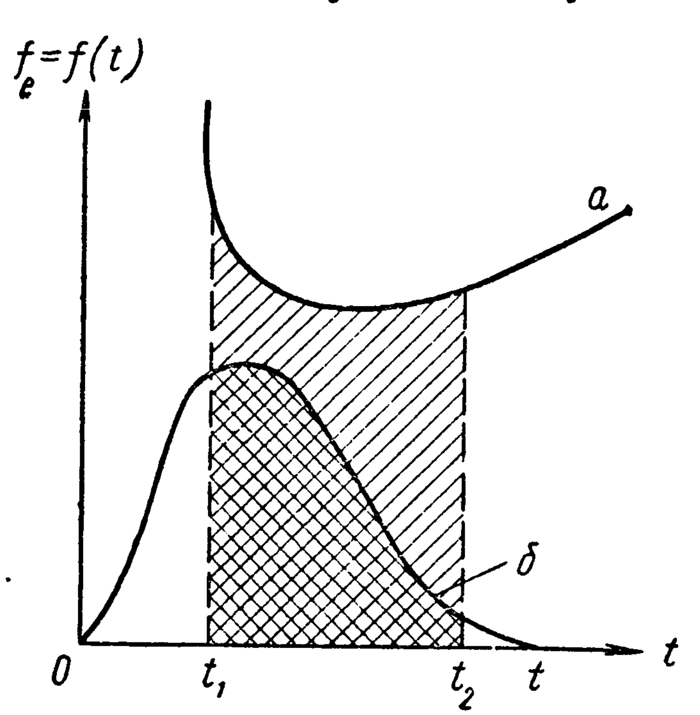


Рис. 4-1. Импульсы переменной силы за конечный интервал времени:

а) график произвольного закона изменения силы со временем; *б*) график изменения силы при соударении за время от 0 до t

Из выражения (4,2) вытекает, что при значениях фактора * скорости $\beta < 1$ тело под действием постоянной во времени силы совершает равнопеременное движение. Примеры: свободное падение тел в вакууме и движение электрона в вакууме вдоль слабого однородного электрического поля.

Импульс силы, изменяющейся во времени по величине за конечный интервал времени $(t_2 - t_1)$, будет равен

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot dt = m_0 \int_{v_1}^{v_2} dv = m_0 v_2 - m_0 v_1 = p_2 - p_1. \qquad (4,3)$$

На графике зависимости $f_e = f(t)$ (рис. 4-1) этот импульс, равный согласно выражению (4,3) приращению количества движения частицы за тот же интервал времени, изображается площадью заштрихованной части фигуры, ограниченной сверху графиком в интервале от t_1 до t_2.

Из векторного уравнения следует, что проекция вектора количества движения, или импульса частицы, на какое-либо избранное направление будет меняться лишь в том случае, когда алгебраическая сумма проекций всех внешних действующих сил на это же направление не равна нулю.

Например, в случае равномерного движения частицы по кругу проекция постоянно действующей центростремительной силы на направление движения тела (направление касательной) всегда равна

* Латинское слово factor — производящий, одно из основных условий.

нулю и, следовательно, проекция импульса этой силы на направление движения за любой интервал времени также равна нулю.

Если взаимодействующие частицы образуют замкнутую систему, в которой все внутренние силы уравновешены реакциями и которая изолирована от внешних воздействий (например, ракета в космическом пространстве или система двух взаимодействующих микрочастиц), то, полагая в выражении (4,1) $f = \Sigma f_i = 0$, имеем

$$Mv = \text{const},$$

где $M = \Sigma m_i$ — сумма масс всех частиц системы, v — скорость движения центра масс, или центра инерции системы. Центром инерции называют такую точку в системе, которая движется под действием всех внешних сил так же, как материальная точка, обладающая массой всей системы.

Координаты X, Y, Z центра инерции системы находятся, как средние взвешенные значения координат отдельных частиц системы

$$X = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}; \quad Y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}; \quad Z = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}, \tag{4,4}$$

где m_i играет роль статического веса координаты частицы.

У тел таких размеров, при которых можно считать, что они практически находятся в однородном поле земного тяготения (g = const), центр инерции совпадает с их центром тяжести.

В инерциальных системах отсчета и замкнутых изолированных системах взаимодействующих частиц выполняется закон сохранения количества движения, или закон сохранения импульса, по которому общее количество движения есть величина постоянная, какие бы процессы внутри этих систем ни происходили. Закон сохранения механического импульса имеет многочисленные опытные подтверждения в технике реактивного движения, при столкновениях тел и рассеянии микрочастиц и γ-квантов, а также в ядерных превращениях и космических лучах.

Для наблюдателей, находящихся в неинерциальных системах координат, закон сохранения импульса не выполняется, так как имеющиеся силы инерции, нескомпенсированные реакциями, являются внешними по отношению к системе. Вместе с тем второй закон Ньютона, представленный в форме соотношения (4,1), остается справедливым, если в сумму внешних сил включить и силы инерции. Для отдельной частицы рассматриваемой системы выражение (4,1) можно переписать в виде

$$m_0 \frac{dv}{dt} = F_i + F_a, \tag{4,5}$$

где F_i — проекция результирующей всех внутренних сил, действующих со стороны других частиц системы на направление перемещения, F_a — проекция результирующей всех внешних сил, действующих на систему извне на то же направление. После скалярного

умножения обеих частей выражения (4,5) на элементарное перемещение частицы $dl = v \cdot dt$ для данной системы отсчета имеем

$$m_0 v \cdot dv = F_i \cdot dl + F_a \cdot dl; \qquad (4,6)$$

интегрируем в границах конечного перемещения от l_1 до l_2

$$\int_{l_1}^{l_2} F_a \cdot dl = \int_{l_2}^{l_1} F_i \cdot dl + \left[\frac{1}{2} m_0 v^2\right]_{v_1}^{v_2}, \qquad (4,7)$$

или для всей консервативной системы получим

$$A_a = \Delta U + \Delta W_к = \Delta W, \qquad (4,8)$$

где A_a — работа внешних сил, произведенная над системой вдоль пути $l_2 - l_1$, ΔU — работа против внутренних сил системы, приводящая к изменению ее потенциальной энергии, $\Delta W_к$ — изменение кинетической энергии поступательного движения системы.

Таким образом, для консервативных систем, в которых не происходит преобразования механической энергии в другие формы (нет трений и других сил, зависящих от скорости), изменение энергии системы ΔW, согласно уравнению (4,8), равно работе, совершенной внешними силами. Это утверждение справедливо для любых систем отсчета, если силы инерции рассматриваются как внешние силы.

В случае изолированных систем внешние силы отсутствуют и, следовательно,

$$A_a = \Delta W = 0 \quad \text{или} \quad W = \text{const}.$$

Таким образом, в замкнутых, изолированных, консервативных системах справедлив закон сохранения механической энергии, согласно которому полная (потенциальная плюс кинетическая) механическая энергия системы есть величина постоянная, какие бы процессы внутри такой системы не происходили. Например, для свободного падения тела с высоты H этот закон запишется так:

$$mgh + \frac{1}{2} m v_{H-h}^2 = mgH = \text{const}. \qquad (4,9)$$

Закон сохранения механической энергии не применим для неинерциальных систем отсчета, поскольку силы инерции всюду проявляются как внешние силы по отношению к системе тел; он также не применим и для диссипативных систем, поскольку в них происходит рассеяние механической энергии, т. е. преобразование механической работы в другие виды передачи энергии.

Работа A переменной силы $f(l) = F \cdot \cos\beta$, где β — угол между направлениями силы и перемещения графически изображается заштрихованной площадью части фигуры (рис. 4-2) в интервале от l_1 до l_2. Например, работа переменной деформирующей силы

$$f(x) = kx, \qquad (4,10)$$

направленной против восстанавливающей силы упругости тела, выразится формулой (см. рис. 4-2):

$$A_x = k\int_0^x x \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (4,11)$$

Здесь k — характеристический коэффициент упругости тела (коэффициент восстанавливающей силы), x — величина деформации. В отсутствии трения и сил, зависящих от скорости, согласно выражению (4,8), $\Delta W_к = 0$, т. е. $A_x = \Delta U$, где U — потенциальная энергия упругой системы. Аналогично работа ускоряющей силы F_a при $\frac{v}{c} \ll 1$, т. е. при $m = m_0$, будет равна

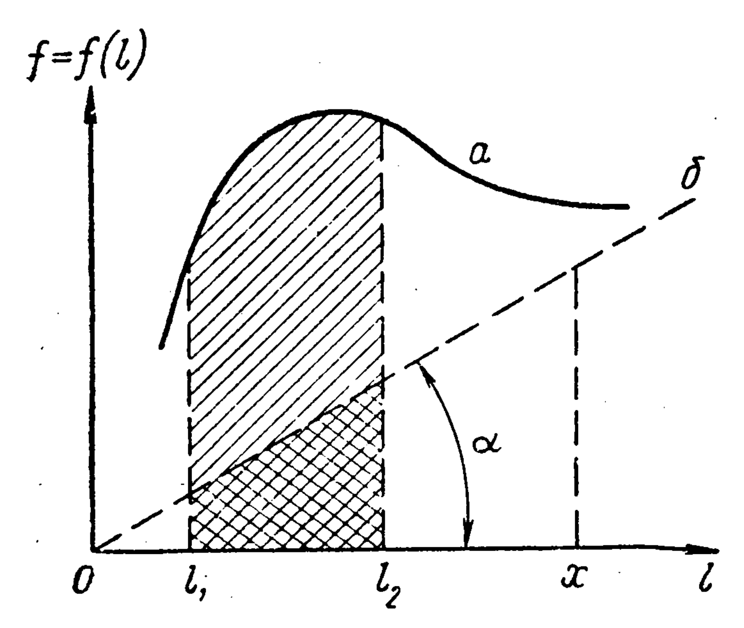


Рис. 4-2. Определение работы переменной силы на конечном интервале пути l_1 l_2:

а) график произвольного закона изменения силы; *б*) график закона изменения силы упругости

$$A_a = m_0\int_0^v v \cdot dv = \frac{1}{2}m_0v^2 = \Delta W_к. \qquad (4,12)$$

Значения кинетической энергии движущихся тел практически лежат в широких границах: от $W_к = 1$ *эв* = $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж* для электрона, разгоняемого разностью потенциалов в 1 *в*, до $W_к = 2 \cdot 10^9$ *дж* для современного реактивного самолета.

При отсутствии внутренних сил и сопротивлений $\int_{l_1}^{l_2} F_i\,dl = 0$ и $A_a = A_{уск}$ (свободное падение в вакууме). Если же $\Delta W_к = 0$ и $\Delta U = 0$, т. е., несмотря на наличие внешних сил, тело не деформируется и скорость движения тела не изменяется, то из выражения (4,8) вытекает, что $A_a = A_д - A_c = 0$.

Это значит, что вся работа действующих внешних сил затрачивается на преодоление сопротивлений (лобовых и вязких) среды, т. е. $A_д = A_c$.

Все записанные соотношения относятся к движениям с относительными скоростями $\frac{v}{c} \ll 1$. Во многих случаях движение микрообъектов (электроны в электровакуумных приборах, микрочастицы, испускаемые при ядерных превращениях, частицы в космическом излучении) происходит со скоростями, близкими к предельной скорости c передачи энергии. При этом необходимо учитывать зависимость массы движущегося тела от скорости движения.

Согласно выражениям (1,1) и (4,1), для всех движений справедливо соотношение

$$c^2 \cdot dm = \frac{d(mv)}{dt} \cdot dl = dW. \qquad (4,13)$$

Учитывая, что $\frac{dl}{dt} = v$ и $d(mv) = m \cdot dv + v \cdot dm$, имеем

$$c^2 \cdot dm = v^2 \cdot dm + mv \cdot dv. \tag{4,14}$$

После разделения переменных получим

$$\frac{dm}{m} = \frac{v \cdot dv}{c^2 - v^2}.$$

Интегрирование в границах изменения скорости от 0 до v дает искомую зависимость в виде (рис. 4-3)

$$m = m_0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{4,15}$$

где, как и раньше, $\beta = \frac{v}{c}$, m и m_0 — соответственно массы движения и покоя частицы. Из выражения (4,15) вытекает предельность скорости c, так как при $m_0 \neq 0$ и $v \to c$ масса движения $m \to \infty$, т. е. дальнейшее увеличение скорости оказывается невозможным (см. рис. 4-3) и ускорение при любом конечном значении разгоняющей силы равно нулю.

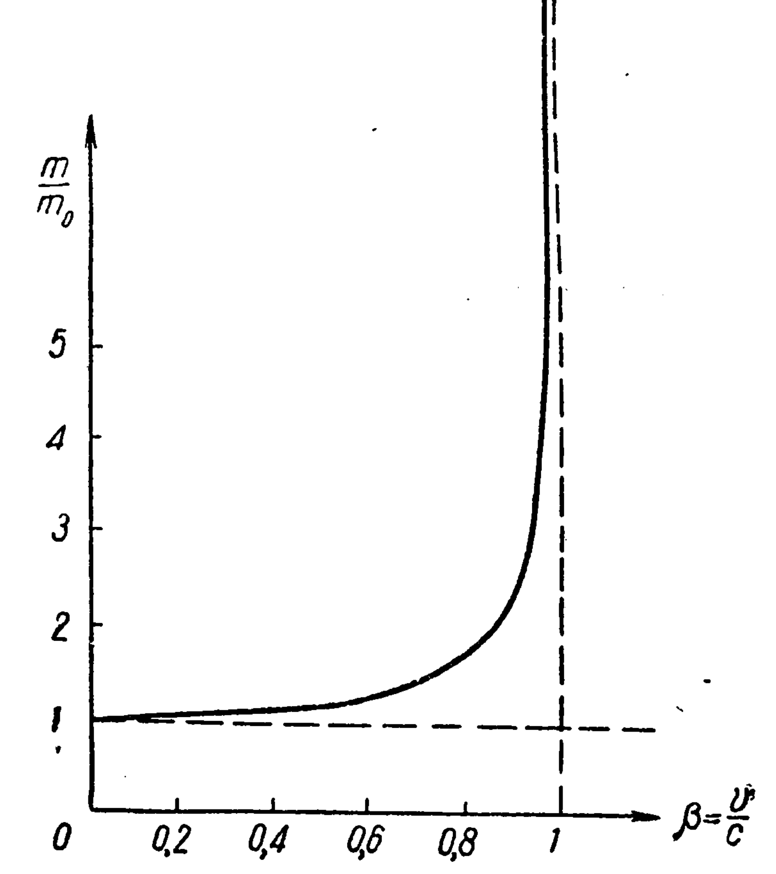


Рис. 4-3. Зависимость массы от скорости

При $v = 0{,}1c$ $m = 1{,}005\ m_0$; при $v = 0{,}98c$ $m = 5{,}128\ m_0$; при $v = c$ $m = \infty$

Кванты электромагнитных излучений (фотоны) всегда имеют скорость $v = c$ ($\beta = 1$). Однако они не обладают массой покоя ($m_{ф0} = 0$), так что выражение (4,15) для фотонов не применимо, поскольку оно переходит в математическую неопределенность. Масса движения фотона, согласно формуле (1,2), определяется его энергией $\varepsilon = h\nu$, а именно

$$m_ф = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Соотношения (1,1) и (4,15) позволяют написать более общие выражения для импульса и кинетической энергии частицы, учитывающие изменение массы в зависимости от скорости и, следовательно, пригодные для релятивистских случаев движений.

После подстановки формулы (4,15) в (4,1) получим, что импульс частицы

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} v. \tag{4,16}$$

Кинетическая энергия частицы будет выражаться формулой

$$\text{а)}\ E_к = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \tag{4,17}$$

При $\beta \ll 1$ это уравнение переходит в классическое выражение

$$E_к = \frac{1}{2} m_0 \beta^2 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2, \qquad (4,17а)$$

где m_0 — масса покоя частицы;

$$б)\quad E_к = \frac{mv^2}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} *. \qquad (4,17б)$$

Так как $\beta < 1$, эта формула показывает, что в общем случае $E_к > \frac{1}{2} mv^2$ и только при $\beta \to 0$ справедливо классическое выражение (4,17 а). С другой стороны, из того же выражения вытекает, что для фотонов, движущихся всегда со скоростью $v = c$ ($\beta = 1$), вся их собственная энергия является кинетической энергией движения, поскольку $\varepsilon = m_ф c^2 = h\nu$.

Пользуясь выражениями (1,1), (4,16) и (4,17а), нетрудно получить релятивистские соотношения:

для полной энергии частицы

$$E^2 = m^2c^4 = c^2p^2 + m_0^2c^4; \qquad (4,18)$$

для импульса частицы

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_к^2 + 2E_к m_0 c^2}. \qquad (4,19)$$

Лекция 5

РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Среди различных способов сообщения ускорения движущимся телам реактивный разгон имеет особо важное значение, так как не требует опоры о поверхность земли и позволяет создавать ракеты для планетных, межпланетных и космических перемещений.

Пусть $u = \text{const}$ будет скоростью истечения массы вещества (например, массы газа) относительно корпуса ракеты (рис. 5-1). Полагая фактор скорости истечения газа $\beta = \frac{u}{c} \ll 1$ и рассматривая ракету в безвоздушном пространстве и в отсутствии внешних сил (например, силы тяготения), можно воспользоваться преобразованиями Галилея и записать

$$u' = u - v, \qquad (5,1)$$

---

* Из выражения (4,15) следует, что $m^2 - m_0^2 = \beta^2 m^2$. Но $E_к = (m - m_0) c^2$; значит,

$$m + m_0 = \frac{\beta^2 m^2 c^2}{E_к},$$

отсюда

$$E_к = \frac{m^2 v^2}{m + m_0}$$

или, вновь учитывая формулу (4,15), получим выражение (4,17б).

где u' и v — соответственно скорость истечения газа и скорость движения ракеты относительно Земли (т. е. в системе отсчета, жестко связанной с начальным положением центра массы ракеты). Применим для некоторого элемента времени dt законы сохранения:

1) массы (см. рис. 5-1)

$$dm' = -dm, \tag{5,2}$$

где dm' — элементарная масса истечения, m — мгновенное значение массы ракеты;

2) импульса

$$d(mv) = u' \cdot dm'. \tag{5,3}$$

Из уравнений (5,2) и (5,3) после дифференцирования и подстановки выражения (5,1) следует, что

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{u} dv. \tag{5,4}$$

Определим пределы интегрирования: при начальном значении скорости $v = 0$ $m = m_н$; при конечной скорости v останется лишь часть начальной массы ракеты $m_н' = m_н - \Delta m$. Интегрирование и подстановка предельных значений приводит к уравнению ракеты

$$\mu = \frac{m_н'}{m_н} = e^{-\frac{v}{u}}; \tag{5,5}$$

конечная относительная скорость ракеты

$$\frac{v}{c} = \frac{u}{c} \cdot \ln \frac{1}{\mu} = \frac{u}{c} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta m}{m_н'}\right). \tag{5,6}$$

Полагая, что после истечения балластной массы газа останется лишь масса корпуса ракеты, т. е. $m_н' = m_к$, конечную достигаемую ракетой скорость выразим в виде уравнения Циолковского

$$v_к = u \cdot \ln\left[1 + \frac{(\Delta m)_к}{m_к}\right] = u \cdot \ln(1 + k_б), \tag{5,7}$$

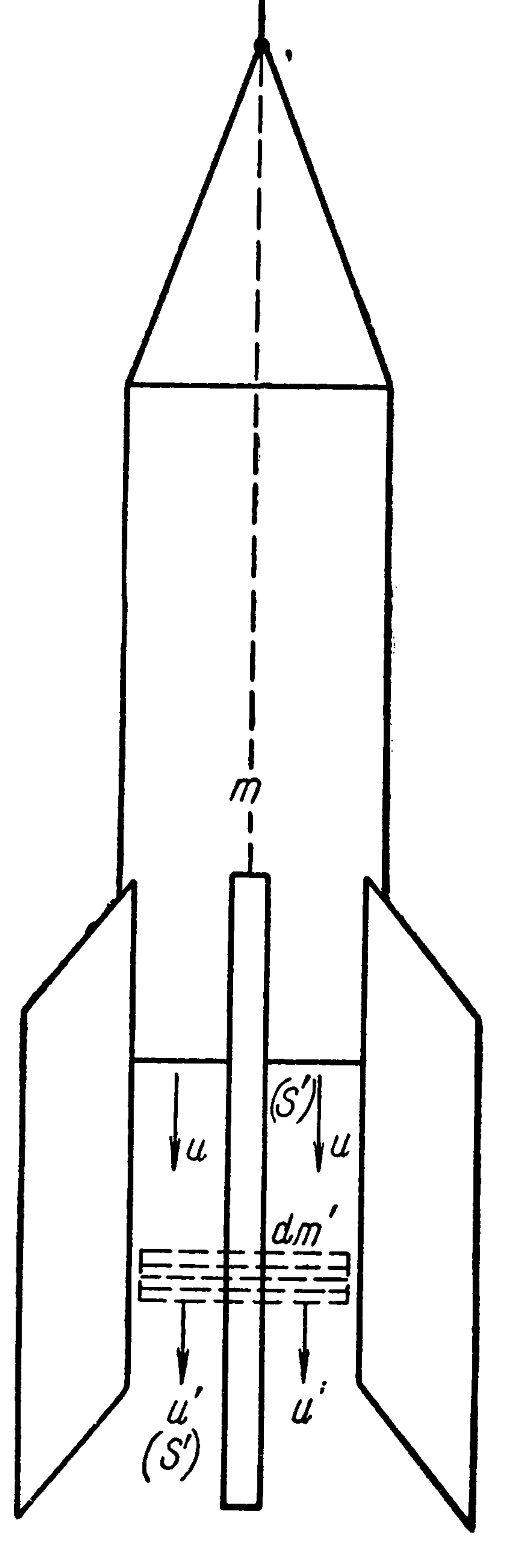


Рис. 5-1. Схема реактивного движения ракеты

где $k_б$ — отношение массы выбрасываемого балласта $(\Delta m)_к$ к массе корпуса ракеты $m_к$.

При пользовании современными горючими смесями скорости истечения газа достигают значений $u = 10^6\,см \cdot сек^{-1} = 3{,}3 \cdot 10^{-5}\,c$. Так как для полета, например на Луну, скорость ракеты v должна быть равна $2{,}5 \cdot 10^6\,см \cdot сек^{-1} = 0{,}83 \cdot 10^{-4}\,c$, то из выражения (5,7) получим

$$\ln(1 + k_б) = 2{,}5, \text{ или } k_б = 11,$$

что технически вполне достижимо.

Для межпланетных сообщений необходимо, чтобы $v \geqslant 0{,}005\ c$ $\left(\beta = \frac{v}{c} = 0{,}005\right)$. Это позволяет применять классические соотношения (5,5) и (5,7). В ракетной технике существенное значение приобретает возможность использования ядерной энергии.

Пусть η — выход энергии при ядерных реакциях и $\alpha m_к$ — масса активного вещества, тогда $k_я = \eta\alpha$ представляет ту долю от массы корпуса ракеты, которая эквивалентна полезной выработанной ядерной энергии.

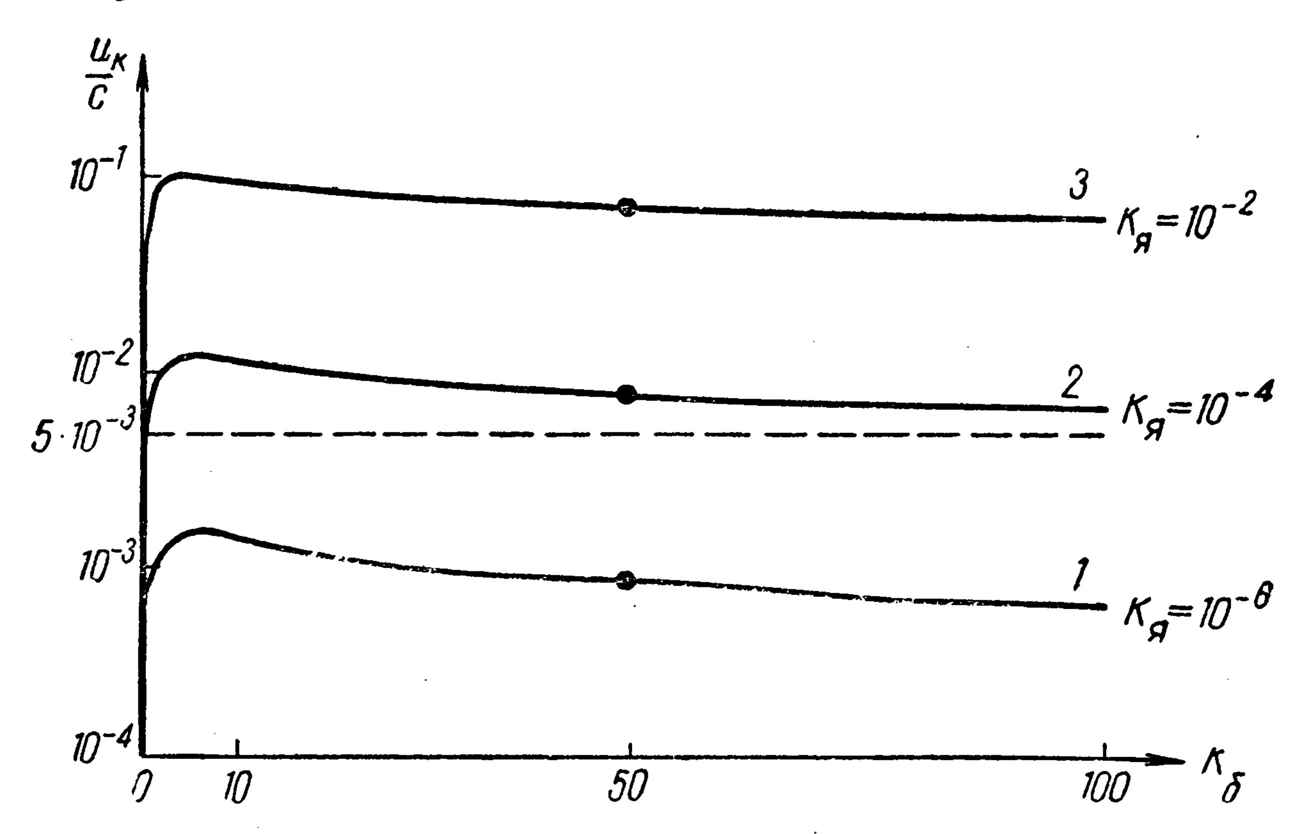


Рис. 5-2. Зависимость конечной относительной скорости ракеты от балластного коэффициента для различных значений коэффициента выхода ядерной энергии

Согласно закону сохранения и преобразования энергии для нерелятивистских случаев, можно записать

$$k_я m_к c^2 = \frac{1}{2} k_б \cdot m_к \cdot u^2 \tag{5,8}$$

или

$$\frac{u}{c} = \sqrt{2\frac{k_я}{k_б}}, \tag{5,9}$$

откуда с учетом формулы (5,7)

$$\frac{v_к}{c} = \sqrt{2\frac{k_я}{k_б}} \cdot \ln(1 + k_б). \tag{5,10}$$

На рис. 5-2 представлено семейство кривых $\frac{v_к}{c} = f(k_б)$ для различных значений $k_я$. Принимая $v_к = 1500\ км \cdot сек^{-1}$ $\left(\frac{v_к}{c} \geqslant 0{,}5\% = 5 \cdot 10^{-3}\right)$, получаем, что коэффициент выхода ядерной энергии $k_я = \eta\alpha$ не должен быть менее 10^{-4}. Для ядерных урановых (U^{238}) и термоядерных водородных реакций выход η составляет от 0,7 до 7%, следовательно, ядерная энергия может быть применена для

межпланетных сообщений. В качестве массы истечения могут быть использованы частицы, у которых фактор скорости $\beta = \frac{u}{c} \to 1$, и, следовательно, необходимо рассмотреть релятивистские соотношения для ракеты.

Используя обозначения $\beta_1 = \frac{v}{c}$ и $\beta_2 = \frac{u'}{c}$ и применяя законы сохранения энергии

$$d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_1^2}}c^2\right) = -c^2\frac{dm_0}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \tag{5,11}$$

и сохранения импульса

$$d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_1^2}}v\right) = u'\frac{dm_0}{\sqrt{1-\beta_2^2}}, \tag{5,12}$$

а также релятивистское выражение (2,7) для сложения скоростей

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}; \tag{5,13}$$

после преобразований (5,4) получим

$$\frac{dm_0}{m_0} = -\frac{1}{u}\frac{dv}{1-\beta^2}. \tag{5,14}$$

Интегрирование в границах скорости от 0 до v приводит к релятивистскому уравнению ракеты:

$$\mu = \frac{m_{\text{к. о}}}{m_{\text{н. о}}} = \left(\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}\right)^{\frac{c}{2u}} \tag{5,15}$$

и выражению для конечной относительной скорости, или конечного фактора скорости движения ракеты

$$\frac{v_{\text{к}}}{c} = \frac{1-\mu^{\frac{2u}{c}}}{1+\mu^{\frac{2u}{c}}}, \tag{5,16}$$

причем

$$\beta = \frac{u}{c} = \sqrt{1-\frac{k_{\text{б}}^2}{(k_{\text{б}}+k_{\text{я}})^2}}. \tag{5,17}$$

Если принять, что $c \to \infty$, то соотношение (5,16) переходит в классическое (5,5). На рис. 5-3 приведены для сравнения кривые зависимости конечной относительной скорости ракеты от отношения масс $\mu = \frac{m_{\text{к.о}}}{m_{\text{н.о}}}$ при различных значениях относительной скорости истечения $\beta = \frac{u}{c}$. Как видно, при $\frac{u}{c} \to 1$ (фотоны) расхождение

между результатами расчета по классической (5,7) и релятивистской (5,16) формулам значительно только для балластного отношения $\mu < 0{,}5$, т. е. для больших значений $k_б = \frac{\Delta m_к}{m_{к\,о}} > 1$. Запущенная ракета в зависимости от конечной скорости разгона $v_к$ либо возвращается на Землю (баллистическая ракета), либо делается спутником Земли, либо превращается в космическую ракету.

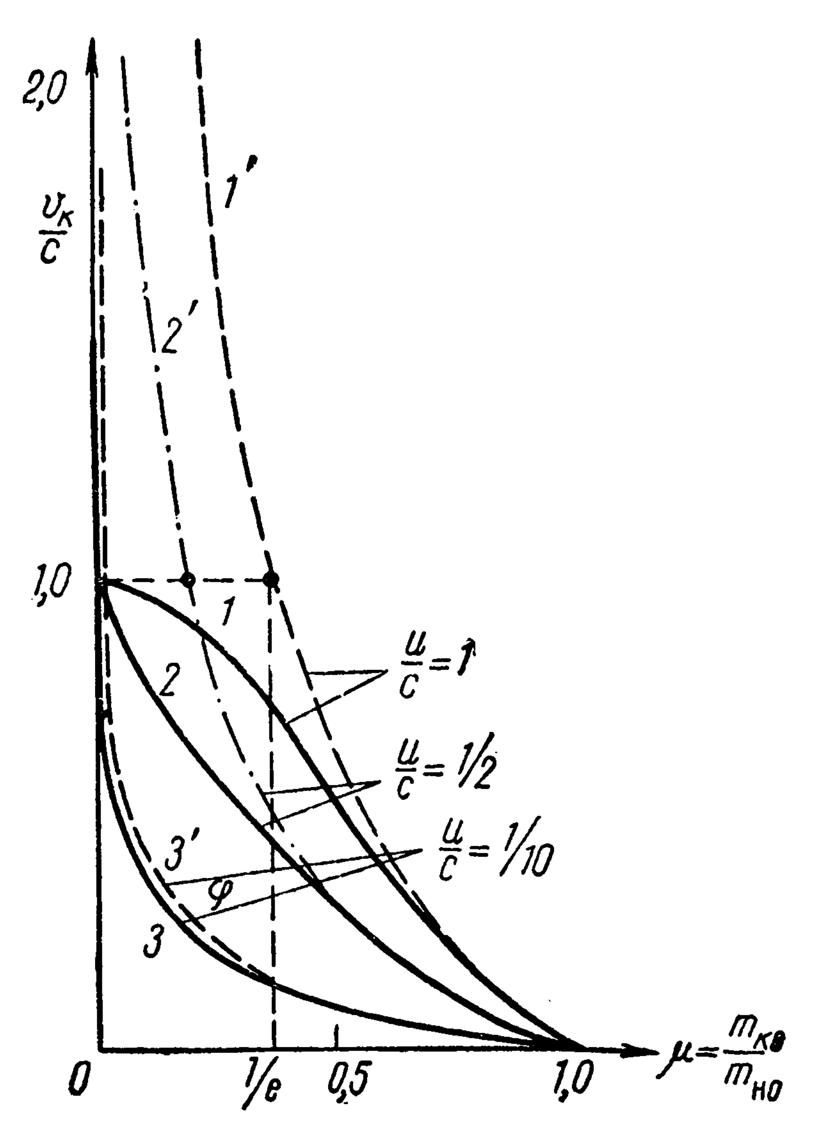


Рис. 5-3. Зависимость конечной скорости ракеты от соотношения граничных масс:

кривые *1*, *2*, *3* получены при релятивистском расчете; кривые 1', 2' 3' — при классическом расчете

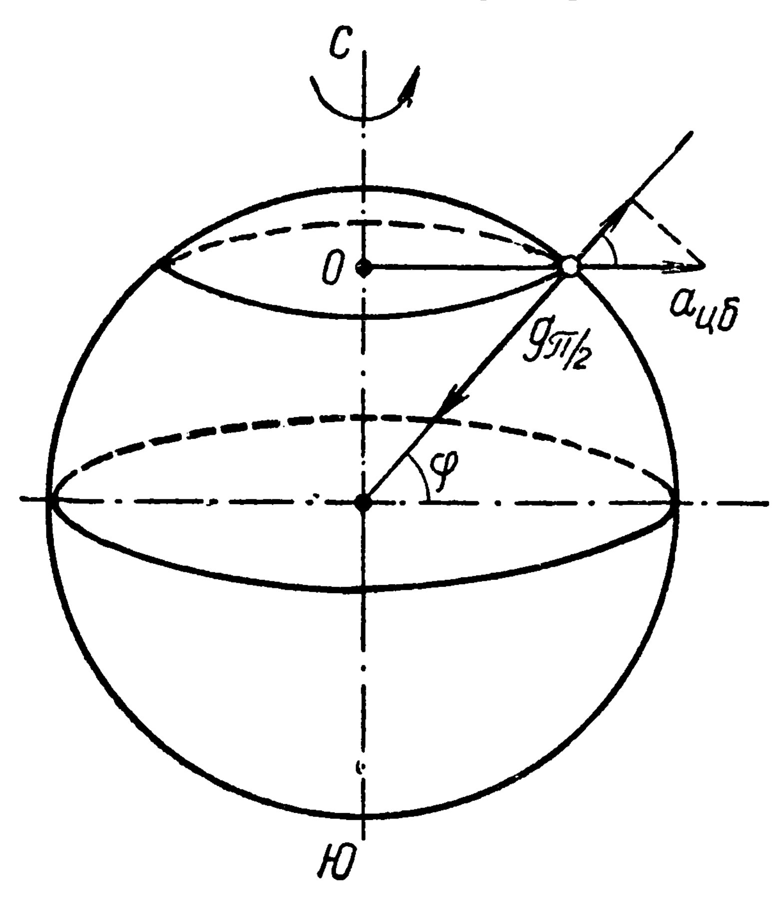


Рис. 5-4. К выводу выражения для первой космической скорости ракеты-спутника Земли по условию $g_\varphi = 0$

Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая, что $a_{цб} = \frac{v^2}{R_з \cdot \cos\varphi}$, для первой космической скорости получим (рис. 5-4)

$$mg_\varphi = m\left(g_{\frac{\pi}{2}} - a_{цб}\cos\varphi\right) = m\left(g_{\frac{\pi}{2}} - \frac{v^2}{R_з}\right). \qquad (5,18)$$

Очевидно $mg_\varphi = 0$, когда $\frac{v_к^2}{R_з} = g_{\frac{\pi}{2}}$ или

$$v_к = \sqrt{R_з g_{\frac{\pi}{2}}} \approx 8 \cdot 10^5\ см \cdot сек^{-1} \approx 8\ км \cdot сек^{-1}\ \text{(рис. 5-5,}\mathit{а}\text{).}$$

При $v_к > 8\ км \cdot сек^{-5}$ ракета облетает Землю по эллипсу как спутник или комета. Центр Земли при этом лежит в ближнем к месту старта фокусе эллипса (рис. 5-5, *б*). При $v_к = 11{,}2 \cdot 10^5\ см/сек$ эллипс переходит в параболу.

Эксцентриситет траектории движения ракеты составляет

$$e=\sqrt{1+\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}(v_0^2-2gR)}, \qquad (5,19)$$

где α — угол между направлением вектора начальной скорости и горизонталью в плоскости полета.

Из выражения (5,19) следует, что при $\alpha=0$ и $v_0<\sqrt{2gR}$ эксцентриситет $e<1$, т. е. траекторией будет эллипс; при $v_0=\sqrt{2gR}$ эксцентриситет траектории $e=1$, что соответствует параболе, и, наконец, при $v_0>\sqrt{2gR}$ $e>1$ и траекторией будет гипербола (рис. 5-5, *г*).

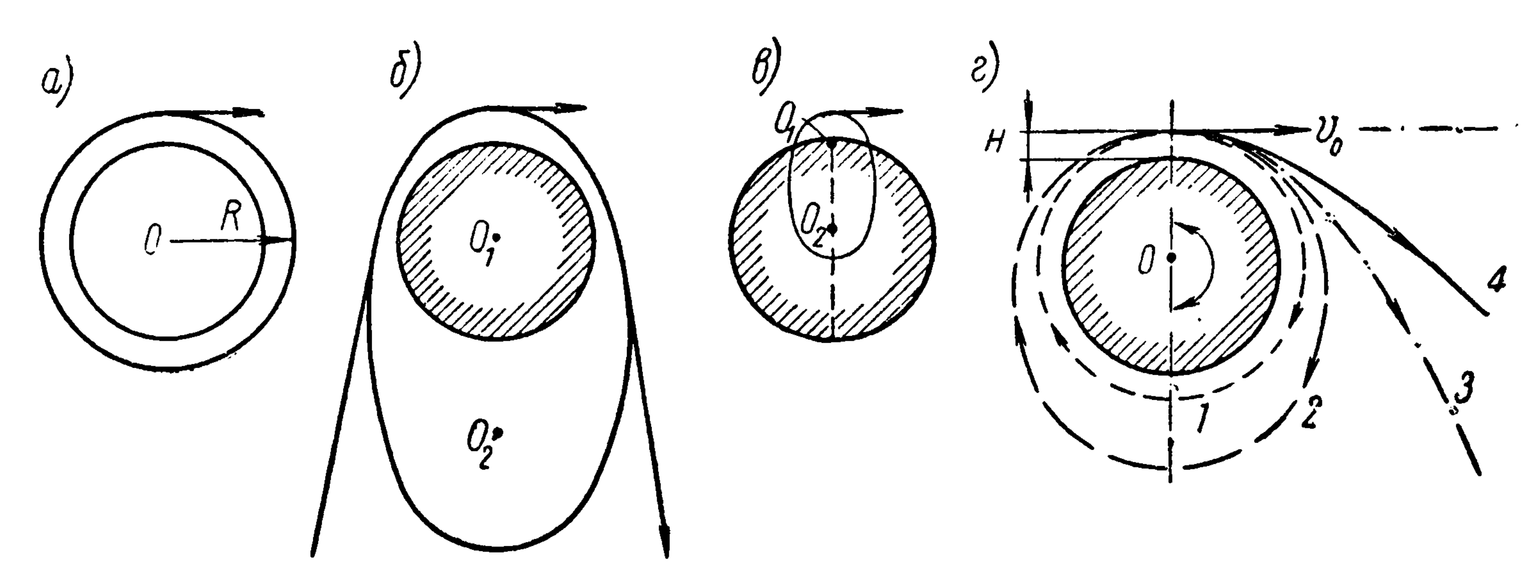


Рис. 5-5. Траектории движения ракет в поле тяготения Земли при различных скоростях их разгона

Таким образом, условия для осуществления движения ракеты как спутника Земли без учета сопротивления атмосферного воздуха и вращения Земли могут быть записаны в виде соотношений:

$$\alpha=0;$$

$$\sqrt{g_0R_0}\approx 8{,}0 \quad км/сек^{-1}\leqslant v_0<\sqrt{2g_0R_0}=11{,}2 \quad км\cdot сек^{-1}.$$

Скорость $v_0=v_к=\sqrt{g_0R_0}$ соответствует круговой орбите, поскольку из формулы (5,19) следует, что $e=0$. Так как $\frac{g}{g_0}=\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$, то при запуске с высоты H для первой космической скорости получим

$$v_к=\sqrt{g\cdot R}=\sqrt{\frac{g_0R_0^2}{R}}=\sqrt{g_0R_0}\cdot\sqrt{\frac{R_0}{R_0+H}}. \qquad (5{,}20)$$

Когда $v_к>11{,}2$ $км\cdot сек^{-1}$, эллипс вырождается в гиперболу, и ракета уходит из поля тяжести Земли ($H>10^6$ *км*) (рис. 5-5, *б*). Для скоростей $v_к<8$ $км\cdot сек^{-1}$ траекторией будет только часть эллипса (рис. 5-5, *в*), причем с центром Земли совпадет дальний фокус эллипса. Без учета сопротивления воздуха этот участок эллипса (при допущении, что $g=\text{const}$) очень близок к отрезку параболы; с учетом сопротивления воздуха траекторией полета является так называемая баллистическая кривая.

Лекция 6

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Все ранее приведенные механические зависимости относились к поступательному движению тел. Однако большинство практически встречающихся перемещений соединяют в себе как поступательное, так и вращательное движения. Для вращательного движения материальной точки вводятся понятия угловой скорости, или циклической частоты вращения

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T_i} = 2\pi\nu_i \ [сек^{-1}]^*, \tag{6,0}$$

где $\nu_i = \frac{1}{T_i}$ — мгновенное значение частоты периодического кругового движения на i-ом избранном участке траектории (рис. 6-1) и углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \ [сек^{-2}]. \tag{6,1}$$

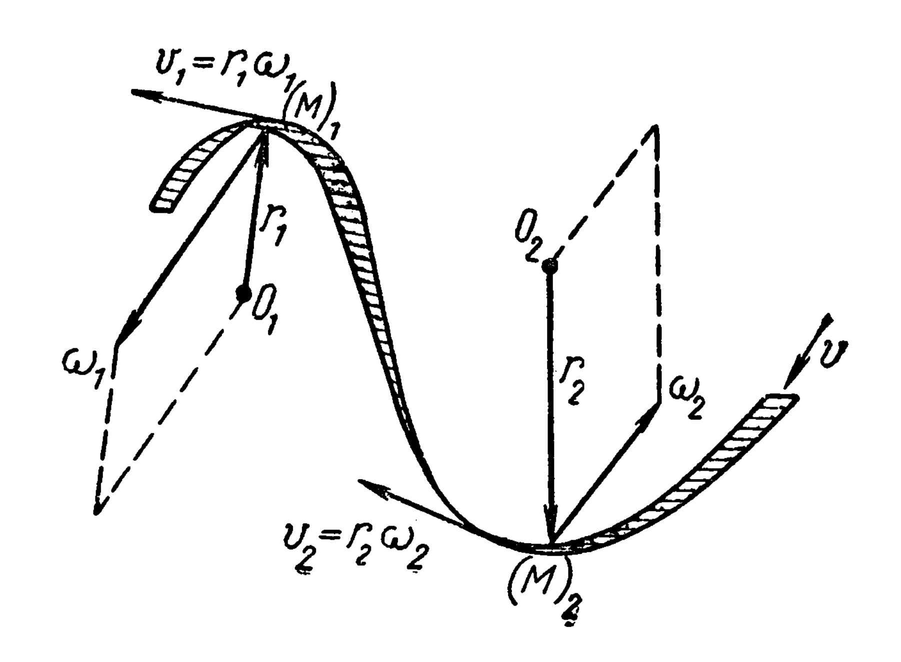


Рис. 6-1. Линейные и угловые скорости на двух участках криволинейного пути движения тела M

Связь между соответствующими линейными и угловыми величинами, существующая вне зависимости от избранной инерциальной системы отсчета, выражается формулами:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{dl}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt} = \omega r, \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon r. \end{aligned}\right\} \tag{6,2}$$

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ принято считать направленным вдоль поступательного движения правоходового винта (см. рис. 6-1) при повороте его рукоятки в сторону вращения тела. Если линейными размерами тела нельзя пренебрегать и их можно сравнить с радиусом кривизны траектории его движения, то необходимо учитывать различие траекторий при движении отдельных элементов тела.

Вращательное движение жесткой системы частиц всегда происходит около некоторой мгновенной оси вращения.

Если связи не ограничивают свободу вращения тела, а ось его вращения определяется энергией вращения и распределением массы самого тела, то она называется свободной осью. В качестве примеров устойчивого вращения тела вокруг свободных осей без опоры можно указать вращение Земли и собственное вращение электрона, вращение тела с одной точкой опоры (вращение волчка).

---

* Угол, выраженный в радианах, в механике принимается величиной безразмерной.

Для вращающейся жесткой системы (тела) кинетическая энергия W_ω сложится из кинетических энергий всех отдельных частиц тела:

$$W_\omega = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2 \sum_{1}^{N} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2, \qquad (6,3)$$

где $J = \sum_{1}^{N} m_i r_i^2$ называется моментом инерции системы относительно оси вращения.

В случае практически однородного распределения вещества в теле момент инерции

$$J = \int_M d\,(mr^2), \qquad (6,4)$$

где интегрирование распространено на массу M всего тела.

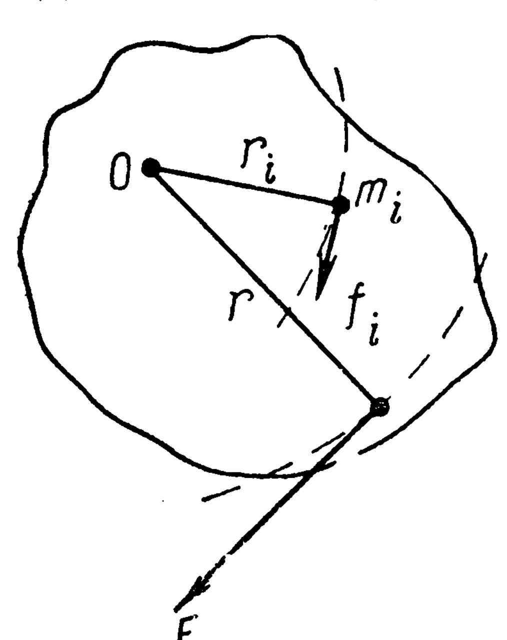


Рис. 6-2. К выводу основного уравнения вращения твердого тела

Свободные оси обязательно проходят через центр инерции тела и определяются максимальными и минимальными значениями момента инерции тела относительно этих осей.

Используя понятие момента инерции, уравнение для вращательного движения твердого тела можно представить в форме, подобной второму закону Ньютона.

На рис. 6-2 изображено тело (неизменяемая система дискретных масс m_i), вращающееся вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа. Каждая из составляющих масс m_i может находиться под действием некоторой силы, проекция которой на направление, перпендикулярное радиусу вращения r_i, будет f_i.

При повороте рассматриваемой неизменяемой системы на угол $\Delta\alpha$ работа всех этих сил

$$dA = \sum_{1}^{N} f_i \cdot \Delta S_i = \Delta\alpha \sum_{1}^{N} f_i r_i = \varepsilon\Delta\alpha \sum_{1}^{N} m_i r_i^2 = M_{\text{вр}} \cdot \Delta\alpha,$$

откуда

$$M_{\text{вр}} = J\varepsilon, \qquad (6,5)$$

так как угловые величины $\Delta\alpha$ и ε для всех элементов этой системы одинаковы, а произведение проекции равнодействующей F всех сил f_i на соответствующее ей плечо вращения r выражает вращающий момент $M_{\text{вр}}$, действующий на систему извне. Полная кинетическая энергия вращающегося тела, центр инерции которого перемещается поступательно со скоростью v, складывается из двух видов механической энергии — энергий поступательного и вращательного движений, т. е.

$$W = W_v + W_\omega = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2; \qquad (6,6)$$

а в общем случае с учетом упругих деформаций и колебаний получим

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{упр}} + W_v + W_\omega + W_\nu = W_{\text{пот}} + W_{\text{кин}}. \qquad (6,7)$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения (6,5) для изолированной жесткой системы вытекает закон сохранения момента импульса, или момента количества движения.

На основании формул (6,1) и (6,5) запишем

$$M_{\text{вр}} \cdot dt = J \cdot d\omega,$$

или при изменяющемся во времени моменте инерции

$$M_{\text{вр}} \cdot dt = d(J\omega). \qquad (6,8)$$

Таким образом, если система не имеет внешних взаимодействий, создающих вращающий момент ($M_{\text{вр}} = 0$), то момент количества движения такой замкнутой изолированной системы

$$J\omega = \omega \sum_1^N m_i r_i^2 = \sum_1^N m_i v_i r_i = \text{const}, \qquad (6,9)$$

т. е. является величиной постоянной, какие бы процессы внутри системы ни происходили.

Уменьшение момента инерции тела при его вращении путем изменения конфигурации вызывает соответствующее (см. 6,9) увеличение циклической частоты ω вращения тела. Из соотношения (6,8) вытекает также квантовое условие, известное как постулат Бора о квантовании орбит водородного атома. Чтобы получить импульс работы за оборот, надо обе части уравнения (6,8) умножить на центральный угол одного оборота, т. е. на 2π. Однако, согласно выражению (1,6), импульсы работы (действия) квантуются. Следовательно, для электрона массой (m), обращающегося со скоростью v_n по круговой орбите радиусом r_n, из соотношения (6,8) можно записать

$$2\pi m v_n r_n = nh \text{ или } m v_n r_n = n\hbar, \qquad (6,10)$$

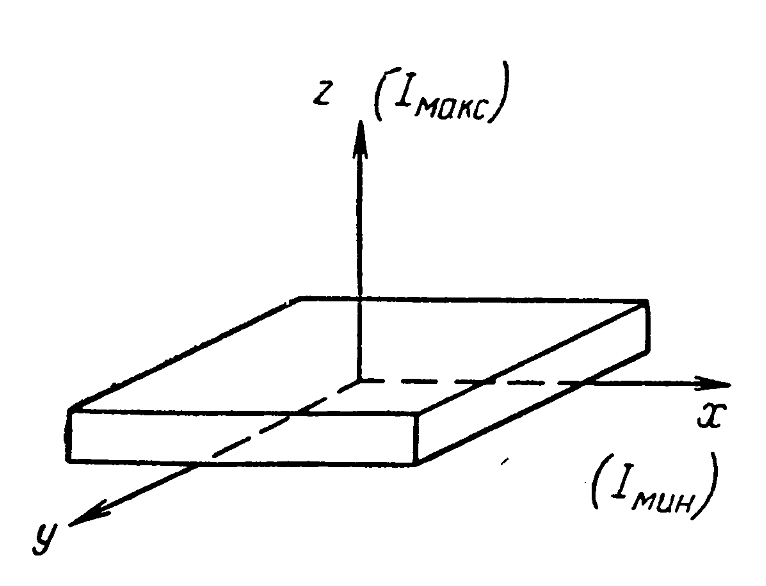


Рис. 6-3. Расположение главных осей инерции прямоугольной плиты из однородного материала

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ представляет собой главное квантовое число. Выражение (6,10) составляет содержание упомянутого постулата Бора.

Для вычисления моментов инерции тел правильной формы относительно осей, проходящих через центр инерции (главные оси инерции), выбирают три взаимно перпендикулярные главные оси инерции обычно так, чтобы момент инерции относительно одной из них был наименьшим, а относительно другой — наибольшим (рис. 6-3).

Устойчивое свободное вращение с постоянной по модулю угловой скоростью осуществляется только относительно главных осей инерции. Свободной осью является та из главных осей инерции, относительно которой момент инерции имеет наибольшее значение.

По свойству аддитивности энергии и согласно формуле (6,3) можно записать для оси, параллельной главной оси инерции:

$$J\omega^2 = J_0\omega^2 + ma^2\omega^2, \quad \text{или} \quad J = J_0 + ma^2, \qquad (6,11)$$

где m — масса тела, a — расстояние центра инерции тела от оси вращения, J_0 — момент инерции тела относительно главной оси инерции.

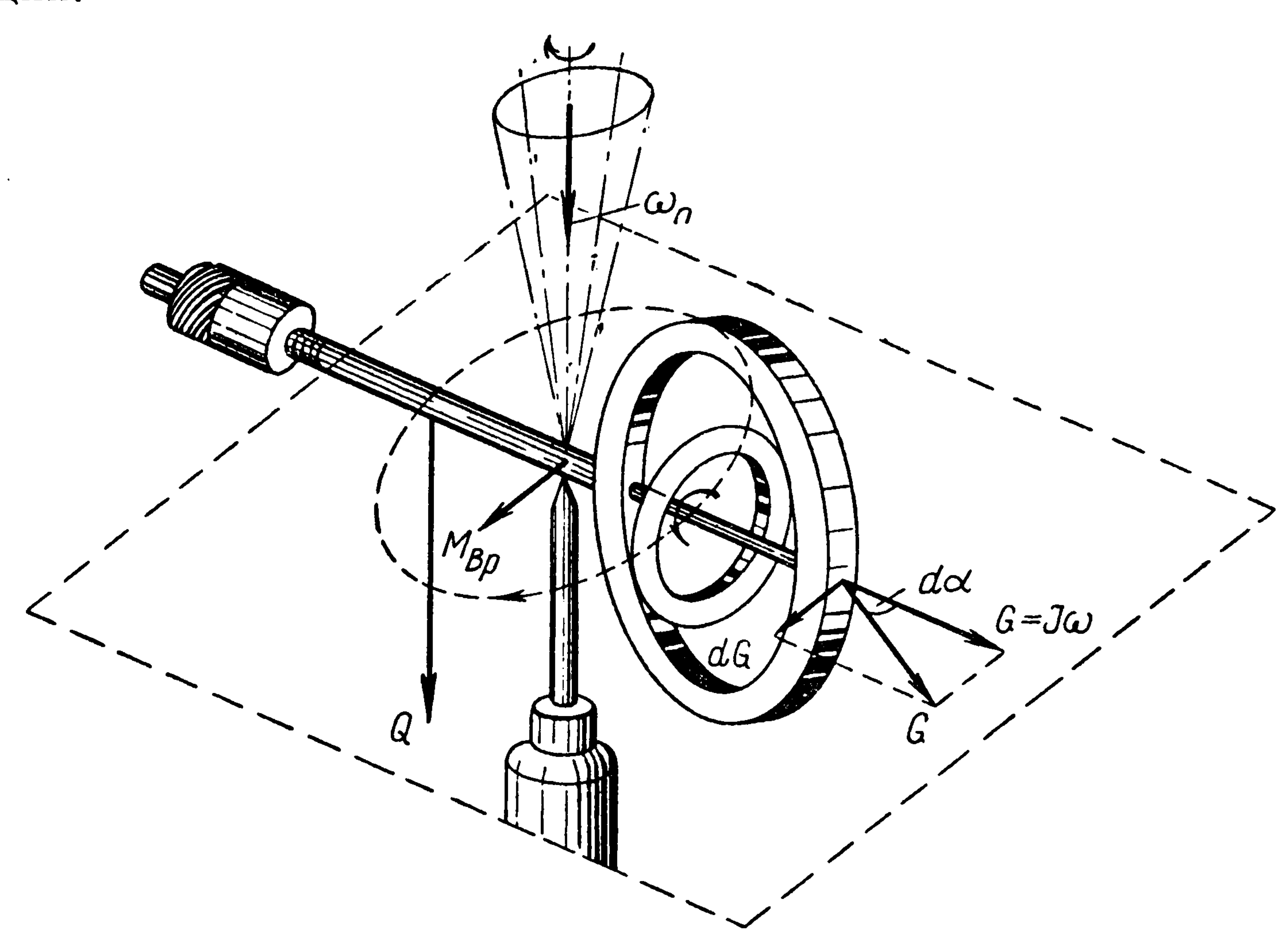


Рис. 6-4. Возникновение прецессии оси гироскопа под действием опрокидывающего момента $M_{вр}$ от груза Q

Момент инерции тел произвольной формы определяется экспериментальным путем при измерениях крутильных колебаний на калибровочном устройстве.

Так как $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$, где k — коэффициент упругости кручению подвеса, то

$$J_x = J_{эт}\left(\frac{T_x}{T_{эт}}\right)^2, \qquad (6,12)$$

где $J_{эт}$ — момент инерции образцового тела (эталона).

Тело, вращающееся вокруг оси инерции, обладает свойством сохранять в пространстве направление оси вращения, что широко используется в технике (гироскопические снаряды, однорельсовые пути, диаболо, гирокомпасы).

На рис. 6-4 показан случай воздействия вращающегося момента $M_{вр}$, перпендикулярного моменту вращательного импульса или

моменту количества движения $G = J\omega$, на волчок с горизонтальной осью вращения, когда вал волчка имеет опору в центре тяжести системы.

Основные соотношения динамики

Таблица 1

Уравнения поступательного движения	Уравнения вращательного движения
Линейная скорость перемещения $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$	Угловая скорость вращения $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
Линейное тангенциальное ускорение $a_t = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{r}$	Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 r = 4\pi^2 r \nu^2$
Масса $m = \frac{W}{c^2}$	Момент инерции $J = \sum_1^N m_i r_i^2$
Ускоряющая сила $f = ma$	Вращающий момент $M_{вр} = J\varepsilon$
Импульс частицы $p = mv$	Момент вращательного импульса (момент количества движения) $G = J\omega$
Кинетическая энергия поступательного перемещения $W_к = \frac{1}{2} mv^2$	Кинетическая энергия вращения $W_\omega = \frac{1}{2} J\omega^2$
Работа при перемещении $A_l = \int_{l_1}^{l_2} f(l) \cdot dl$	Работа при повороте $A_\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M_{вр}(\alpha) \cdot d\alpha$
Мощность поступательного движения $N_v = fv$	Мощность вращательного движения $N_\omega = M_{вр}\omega$

Согласно выражению (6,8) имеем

$$M_{вр} = \frac{dG}{dt},$$

а по рис. 6-4

$$dG = G \cdot d\alpha,$$

где α — безразмерный угол, на который поворачивается ось вращательного импульса за элемент времени dt.

Таким образом,

$$M_{вр} = G \frac{d\alpha}{dt} = \omega_п G$$

и, значит, ось момента вращательного импульса будет описывать конус прецессии с вертикальной осью. Циклическая частота, или угловая скорость прецессии,

$$\omega_п = \frac{M_{вр}}{G} = \frac{M_{вр}}{J\omega}. \qquad (6,13)$$

Так как $G = \text{const}$, то, следовательно, циклическая частота прецессии прямо пропорциональна приложенному вращающему моменту. Земля имеет форму приплюснутого шара (геоида), вследствие чего притяжение Солнца и Луны сообщают земному волчку вращающий момент, перпендикулярный моменту вращательного импульса. Земная ось описывает при этом конус прецессии с углом раствора 47° и периодом прецессионного обращения в $2{,}6 \cdot 10^4$ лет.

Лекция 7

СИЛОВЫЕ ПОЛЯ

Взаимодействия элементов вещества (тел, частиц, зарядов) зависят от их взаимного расположения и движения.

Количественной мерой влияния одного тела на движение другого служит сила взаимодействия.

Таким образом, свойства тела не локализованы только там, где находится центр его массы покоя, но распределены также и в пространстве, окружающем тело, образуя так называемое силовое поле. Силовому полю присущи свойства материи: пространственно-временная протяженность, инерция, движение, энергия и действие.

В физике рассматривают три вида силовых полей: гравитационное (f), электромагнитное (e) и специфическое ядерное, или мезонное, поле (g).

Потенциальное гравитационное поле создается взаимодействием масс покоя тел и поэтому является характерным для тел с большими массами и со значениями $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ (небесная механика тела в поле земного тяготения). В микромире силы тяготения теряют свое значение. Потенциальное электрическое поле, напротив, в явлениях микромира приобретает основное значение. Это поле создается электрическими зарядами и объясняет связи микрочастиц в атомах, молекулах и кристаллических решетках.

Наряду с взаимодействием зарядов, покоящихся относительно друг друга, происходит также механическое взаимодействие движущихся зарядов. Так как движение электрического поля отображается в форме вихревого магнитного поля, то в электродинамике рассматривается совокупное электромагнитное поле.

Потенциальное поле близкодействующих ядерных сил имеет смешанную природу. Оно обусловлено зарядовонезависимым взаимодействием ядерных частиц (нуклонов).

Квантовая теория рассматривает все три упомянутых потенциальных поля с единой точки зрения. Дальнодействующие силы связей $\left(f \sim \frac{1}{r^2}\right)$ между элементами вещества (массами, зарядами) в вакууме рассматриваются в этой теории как результат обмена соответствующими частицами поля между этими элементами, имеющими нулевую массу покоя (гравитонами, или квантами гравитационной энергии, и квантами электромагнитной энергии). Близкодействующие силы взаимодействия между частицами вещества, например между атомами в гомополярных молекулах и нуклонами в ядрах, связываются в квантовой теории с обменом микрообразованиями, обладающими массой покоя (электронами и π-мезонами* соответственно).

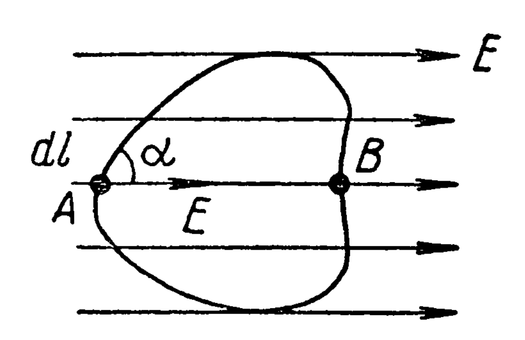


Рис. 7-1. К выводу выражения для циркуляции вектора напряженности электрического поля

Потенциальные силовые поля в каждой данной точке характеризуются напряженностью E поля и его потенциалом U, под которыми подразумевают соответственно силу и потенциальную энергию взаимодействия, отнесенную к единице специфического фактора поля q (единице гравитационного фактора $q_г = m\sqrt{\gamma}$, или электрического фактора $q_э = e\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, или ядерного мезонного фактора $q_я = g$). Между двумя указанными характеристиками потенциального силового поля имеется смысловая связь, вытекающая из понятий напряженности и потенциала поля.

Очевидно,

$$dU = -E \cdot dr, \quad \text{или} \quad E = -\frac{dU}{dr}, \tag{7,1}$$

где r — расстояние от источника центральной силы до рассматриваемой точки поля. Итак, напряженность потенциального поля в данной точке определяется как градиент потенциала в этой точке, взятый с обратным знаком.

Циркуляция вектора напряженности потенциального поля по любому замкнутому контуру будет всегда равна нулю (рис. 7-1), так как

$$\oint E_l \cdot dl = \int_A^B E \cdot \cos\alpha \cdot dl + \int_B^A E' \cdot \cos\alpha' \cdot dl' = U - U = 0. \tag{7,2}$$

В квантовой теории потенциального поля испускание и поглощение связующих частиц рассматриваются как результат взаимодействия специфических факторов q с их собственными полями, это приводит к известным выражениям потенциальной энергии взаимо-

* π-мезон — элементарная частица с промежуточной между электроном и протоном массой покоя, равной примерно 270 массам покоя электрона.

действия двух одинаковых объектов (соответственно по Ньютону, Кулону и Юкава):

для гравитационного поля, присущего массам покоя,

$$U_г = -\frac{(m\sqrt{\gamma})^2}{r} = -\gamma\frac{m^2}{r} \quad и \quad E_г = \gamma\frac{m^2}{r^2} \tag{7,3}$$

(гравитационная постоянная γ не зависит от свойств среды);

для электрического поля, присущего зарядам e,

$$U_э = -\frac{\left(\frac{e}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2}{r} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{e^2}{r} \quad и \quad E_э = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e^2}{r^2} \tag{7,4}$$

(ε — диэлектрический параметр окружающей среды, который зависит от рода среды и термодинамических условий в ней);

для мезонного ядерного поля, присущего нуклонам,

$$U_я = -\frac{g^2}{r}e^{-\frac{r}{R}} \quad и \quad E_я = \frac{g^2}{r^2}\frac{R-r}{R}e^{-\frac{r}{R}}, \tag{7,5}$$

где $R = \frac{h}{m_\pi c} = \lambda_\pi \approx 10^{-13}$ *см* — примерный радиус действия ядерных сил, равный длине такой электромагнитной волны, которая соответствует массе обменной частицы (π-мезону), $g = 1{,}5\times\times10^{-9}$ а. э. е. $= 1{,}5\cdot10^{-18}$ ед. СИ — специфический фактор ядерного поля (квазимезонный заряд). Из приведенных выражений для потенциальной энергии полей следует, что при взаимодействии двух протонов в ядре

$$\frac{U_г}{U_э} = \gamma\left(\frac{m}{e}\right)^2 \approx 10^{-36},$$

т. е. гравитационное поле не имеет значения, и для $r < R$

$$\frac{U_э}{U_я} = \left(\frac{e}{g}\right) \approx 0{,}1,$$

т. е. электромагнитное поле также играет лишь второстепенную роль.

Гравитационные и электромагнитные поля не независимы и, как показывает релятивистская квантовая теория поля, взаимно превращаемы. Непосредственными наблюдениями подтвержден факт отклонения потока квантов энергии электромагнитного поля (квантов света) гравитационным полем Солнца.

Кванты энергии гравитационного поля могут образовывать пары противоположно заряженных частиц, и обратно — пары заряженных частиц могут образовывать гравитоны. Вероятность таких гравитационных превращений мала, так как она определяется квадратом гравитационного радиуса преобразующихся частиц, который из условия $mc^2 = \gamma\frac{m^2}{r}$ составляет $r_г = \gamma\frac{m}{c^2} \approx 8\cdot10^{-13}\ m$ (а.э.е.).

Однако при больших массах движения частиц, когда их энергия достигает значений порядка 10^{21} собственных энергий электрона ($m_0c^2 = 0{,}5$ *Мэв*), вероятность гравитационных превращений становится сравнимой с вероятностью аналогичных преобразований в электромагнитных полях.

Потенциальная энергия взаимодействия частиц вещества зависит от расстояния между ними.

Начальный уровень потенциальной энергии, соответствующий нулевой энергии, вообще говоря, может быть выбран произвольно, однако, как показывают выражения (7,3), (7,4), (7,5) для взаимодействующих масс и зарядов, во всех случаях $U = 0$ при $r = \infty$. Потенциальная энергия притяжения при этом будет всегда отрицательной, а отталкивания — положительной (рис. 7-2).

Потенциальные кривые, иллюстрирующие различные поля, обладают большой наглядностью и простотой. Вид потенциальной кривой нередко позволяет выяснить возможные движения тел. На рис. 7-3 представлены графики потенциальных кривых для некоторых типичных случаев механических взаимодействий. В случае потенциальной ямы, вид которой представлен на рис. 7-3, *а*, при полной энергии системы на уровне W имеют место колебания тела около положения устойчивого равновесия (например, тело на пружине).

Рис. 7-3, *б* иллюстрирует случай равновесия системы с крутым потенциальным барьером (потенциальный ящик). Частица может свободно перемещаться в пределах ширины потенциальной ямы, но покидает ее только при условии сообщения ей добавочной кинетической энергии ΔW, называемой энергией активации.

Энергия, сообщаемая системе, может перевести эту систему в возбужденное метастабильное состояние, что и показано на графике рис. 7-3, *в*.

На рис. 7-4 представлена потенциальная кривая системы гетерополярной двухатомной молекулы. Кривая *1* соответствует изменению энергии отталкивания электронов атомных оболочек в зависимости от расстояния r между центрами атомов (крутой спад). Кривая *2* изображает зависимость энергии притяжения $\left(\sim\frac{1}{r}\right)$ разноименных зарядов атомных ионов, составляющих нейтральную молекулу (например, молекулу NaCl). Кривая *3* представляет результирующую потенциальную кривую поля двухатомной молекулы. Как видно, при полной энергии молекулярной системы $W_1 < W_д$ взаимное движение частиц носит колебательный характер около устойчивого положения равновесия, соответствующего расстоянию r_0. В случае $W_2 > W_д$ молекула диссоциирует на ионы (расстояние между атомами может оказаться равным бесконечности).

В механических явлениях существенную роль играет гравитационное поле Земли, потенциал которого по закону тяготения Нью-

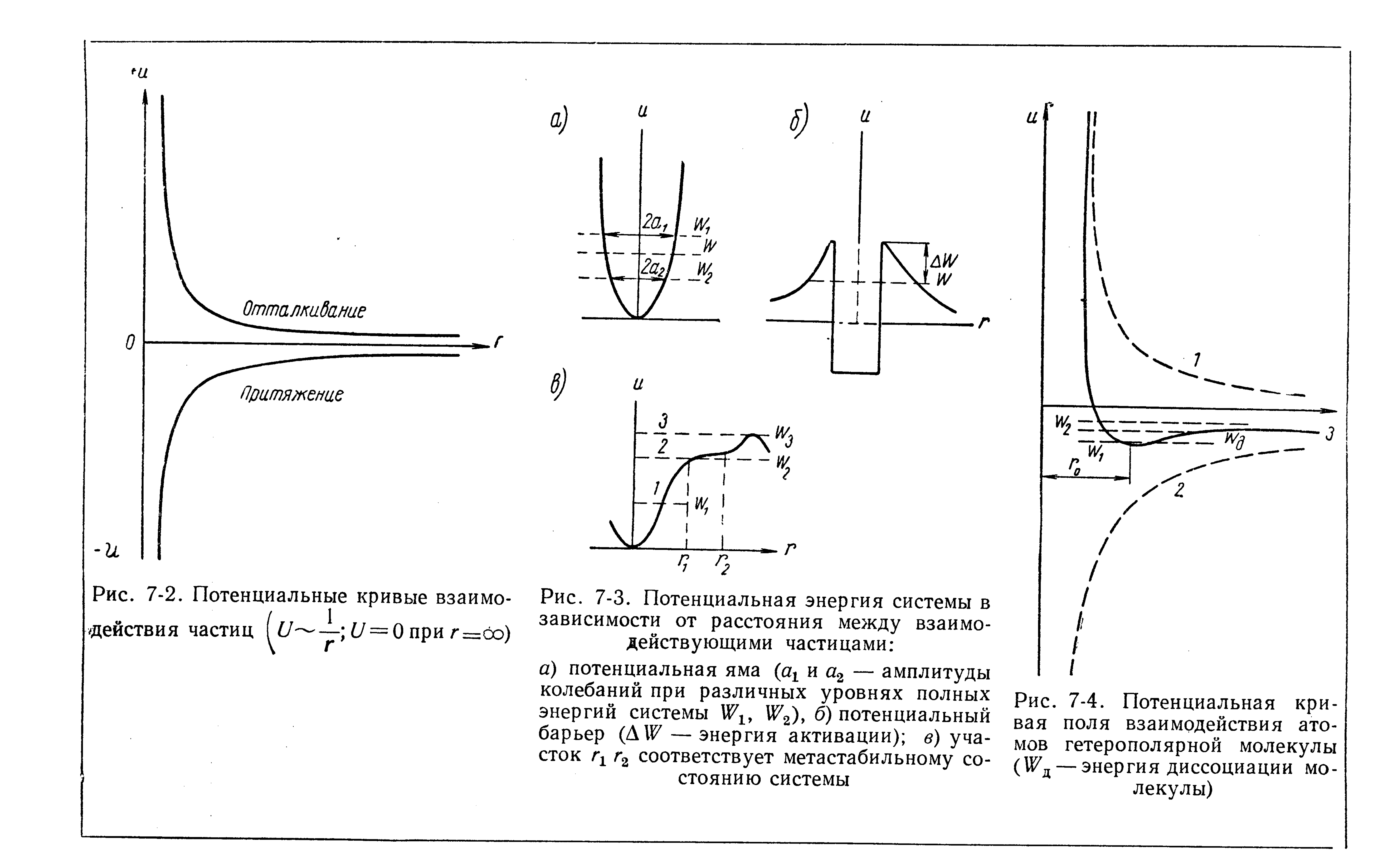


Рис. 7-2. Потенциальные кривые взаимодействия частиц $\left(U \sim \frac{1}{r}; U = 0 \text{ при } r = \infty\right)$

Рис. 7-3. Потенциальная энергия системы в зависимости от расстояния между взаимодействующими частицами:

а) потенциальная яма (a_1 и a_2 — амплитуды колебаний при различных уровнях полных энергий системы W_1, W_2), *б*) потенциальный барьер (ΔW — энергия активации); *в*) участок r_1 r_2 соответствует метастабильному состоянию системы

Рис. 7-4. Потенциальная кривая поля взаимодействия атомов гетерополярной молекулы ($W_д$ — энергия диссоциации молекулы)

тона определяется массой Земли M и расстоянием до ее центра R. Тело массой m на высоте h над уровнем моря имеет энергию

$$U_h = -\gamma \frac{Mm}{R+h} = -\gamma \frac{Mm}{R} \frac{1}{1+\frac{h}{R}}.$$

При малых значениях $\frac{h}{R}\left(\frac{h}{R} \ll 1\right)$: $\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \approx 1 - \frac{h}{R}$ и, значит,

$$U_h = -\gamma \frac{Mm}{R} + \gamma \frac{M}{R^2} mh = -\gamma \frac{Mm}{R} + mgh, \qquad (7,6)$$

где $g = \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{f}{m}$ представляет собой ускорение свободного падения тела в данном месте земной поверхности. Если начало отсчета потенциальной энергии в поле тяготения выбрать на поверхности Земли, положив $U_0 = 0$ при $h = 0$, то

$$U_h = mgh. \qquad (7,7)$$

Ускорение свободного падения g зависит от географической широты местности и высоты ее над уровнем моря, т. е. $g = g\,(\varphi^\circ, h)$. Зависимость от широты местности обусловлена тем, что проекции инерциальных центробежных сил, вызванных вращением Земли, на направление тяготения различны для разных широт (см. рис. 5-4).

Кроме того, земная ось совершает прецессию и нутацию, которые различно влияют на величину g на разных широтах.

Таким образом, $g_{h=0} = g_0\,(\varphi^\circ)$ является сложной зависимостью, но для всех практических целей достаточно пользоваться приближенной формулой

$$g_{0,\varphi^\circ} = 980{,}66 - 2{,}6 \cos 2\varphi\ [см \cdot сек^{-2}] = 9{,}8066 - 0{,}026 \cos 2\varphi\ [м \cdot сек^{-2}]. \qquad (7,8)$$

Для изменения ускорения силы тяжести с высотой в пределах расстояний в несколько километров от уровня моря допустимо принять экспоненциальный закон убывания g с постоянной экспоненты, представленной в виде

$$-\frac{1}{g}\frac{dg}{dh} = 3 \cdot 10^{-9}\ см^{-1} = 3 \cdot 10^{-7}\ м^{-1}. \qquad (7,9)$$

В неинерциальной системе отсчета, которая движется относительно инерциальной с некоторым ускорением, сохраняются те же свойства движения, что и при наличии гравитации в инерциальной системе. Инерциальное ускорение равно и противоположно по направлению ускорению неинерциальной системы. Однако истинные гравитационные поля всегда убывают с возрастанием расстояния от центров тяготения, и на бесконечности потенциалы этих полей равны нулю.

Лекция 8

ПРОИЗВОДНЫЕ СИЛЫ

Три рода рассмотренных в предыдущей лекции сил в зависимости от условий взаимодействия тел могут проявляться в различном виде. Например, под действием силы тяготения одно тело притягивается к другому, так что при относительной свободе движения взаимодействующие тела будут обращаться вокруг общего центра массы (планетная система), а при относительном покое — «контактировать» друг с другом. Механический контакт означает возможность частиц поверхностного слоя одного тела проникать в сферу действия частиц другого тела.

Механическая сила тяготения между телами вызывает, таким образом, электрические взаимодействия элементов вещества контактирующих тел.

Электрические взаимодействия, в свою очередь, связаны с перемещением атомов и молекул вещества и, следовательно, с деформациями тела. Перемещение структурных элементов вещества из их положения устойчивого равновесия (см. рис. 7-3, *а*) означает увеличение потенциальной энергии упругого тела и, следовательно, появление сил реакции, стремящихся восстановить первоначальное равновесие, которое всегда соответствует относительному минимуму потенциальной энергии.

В результате деформации тела возникает производная сила — сила упругости.

Основными видами упругих деформаций твердых тел, к которым сводятся все остальные виды деформаций (изгиб, кручение, поперечное сжатие, дислокации), являются: линейная односторонняя деформация, всестороннее сжатие, или растяжение, и деформация сдвига.

Закон любой упругой деформации твердого тела (закон Гука) выражает прямую пропорциональность относительной деформации тела $\frac{\Delta\xi}{\xi}$ и силы, отнесенной к единице поверхности, воспринимающей ее действие, т. е.

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = k\frac{F}{S}. \qquad (8,1)$$

При односторонней деформации (рис. 8-1, *а*) можно записать

$$\frac{\Delta l}{l} = k\frac{F}{S} = kp, \qquad (8,1а)$$

где $p = \frac{F}{S}$ — напряжение в материале, k — коэффициент растяжения.

Величину $E = \frac{1}{k}$ называют модулем Юнга.

Для всестороннего сжатия отношение $\frac{F}{S}$ очевидно представляет собой давление p (рис. 8-1, *б*), и закон Гука запишется в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = -\beta \cdot \Delta p, \qquad (8,1б)$$

где β — коэффициент объемного сжатия.

В случае сдвига (рис. 8-1,*в*) относительная деформация $\frac{\Delta x}{h} = \operatorname{tg} \alpha$ и, значит,

$$\frac{\Delta x}{h} = k_с \frac{F}{S}, \qquad (8,1в)$$

где $k_с$ — коэффициент сдвига, F — касательная к поверхности S сдвигающая сила.

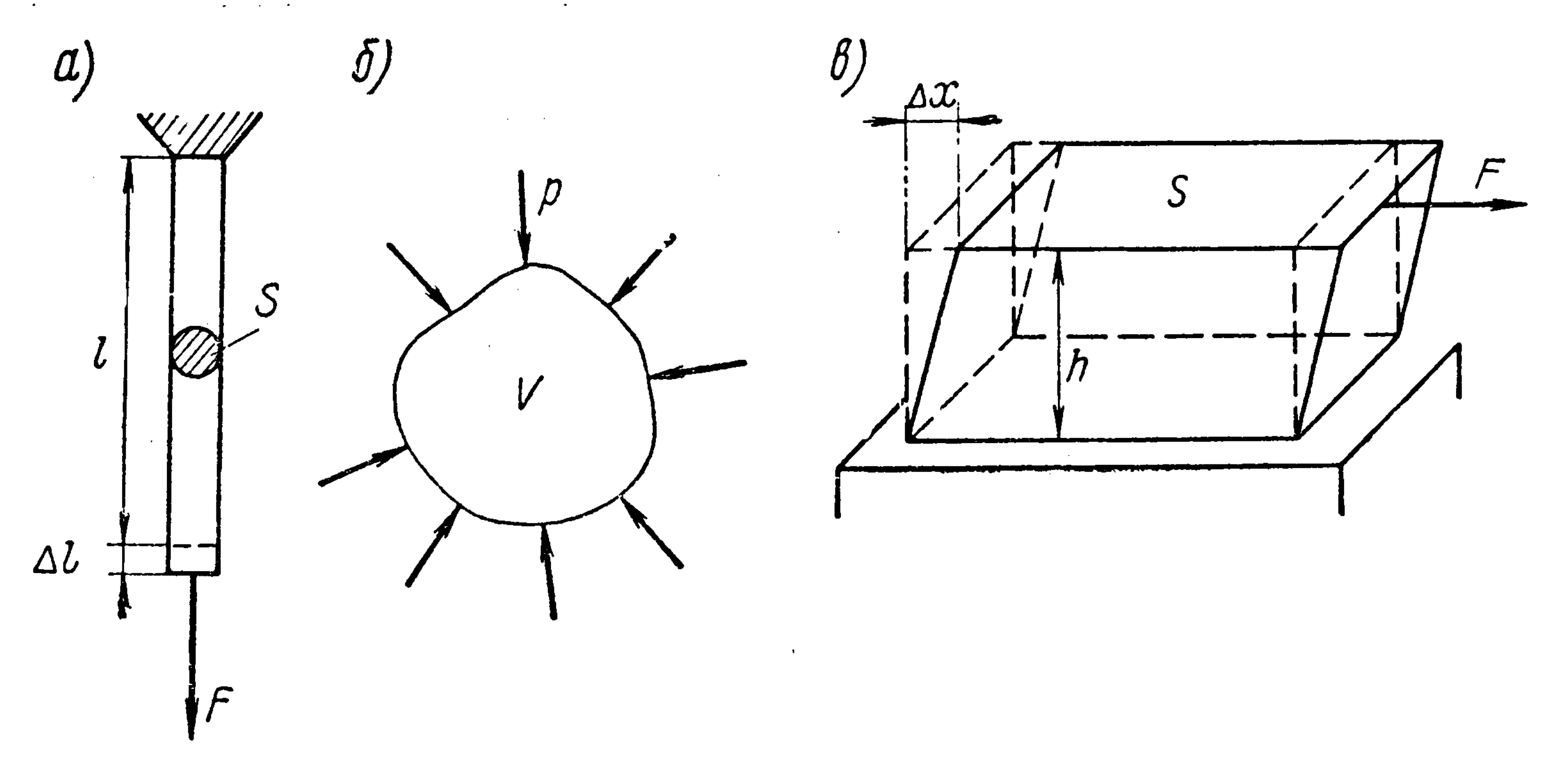


Рис. 8-1. Основные виды упругих деформаций твердых тел: *а*) одностороннее растяжение, *б*) всестороннее сжатие, *в*) сдвиг

Если относительная односторонняя деформация тела превзойдет известный предел (предел пропорциональности по закону Гука), другими словами, если будет превзойден потенциальный барьер межчастичных взаимодействий, то возникает некомпенсируемое перемещение одних частей тела по отношению к другим (текучесть). При сдвиге частиц производится работа разрушения микрозацеплений. В таких динамических условиях взаимодействия статическое расположение взаимодействующих частиц, а следовательно, и сила трения будут зависеть не только от прижимающей силы, но также еще и от скорости относительного перемещения частиц поверхностных слоев. Таким образом, закон сухого трения (закон Кулона) может быть записан в следующем виде (рис. 8-2, *а*):

$$f_{тр} = k' (F + f'), \qquad (8,2)$$

где F — прижимающая сила, f' — сила молекулярного слипания (агдезии), $f_{тр}$ — сила, необходимая для поддержания относитель-

ной скорости v, $k' = k(v)$ — характеристический для контактирующей пары поверхностей коэффициент трения скольжения. Он несколько уменьшается с возрастанием скорости скольжения.

Трением покоя иногда называют среднее статистическое значение k в момент возникновения относительного перемещения контактирующих тел. Наличие жидкостной, или газовой, промежуточной среды между контактирующими поверхностями значительно уменьшает работу скольжения. В соответствии с условиями движения трение между твердыми телами подразделяют на трение скольжения и трение качения. В последнем случае сила трения изменяется обратно пропорционально радиусу r колеса (рис. 8-2, *б*), так как

$$M_{\text{вр}} = k''F \quad \text{или} \quad f_{\text{тр}} = k''\frac{F}{r}, \quad (8,2')$$

где F — сила тяжести, приходящаяся на ось колеса.

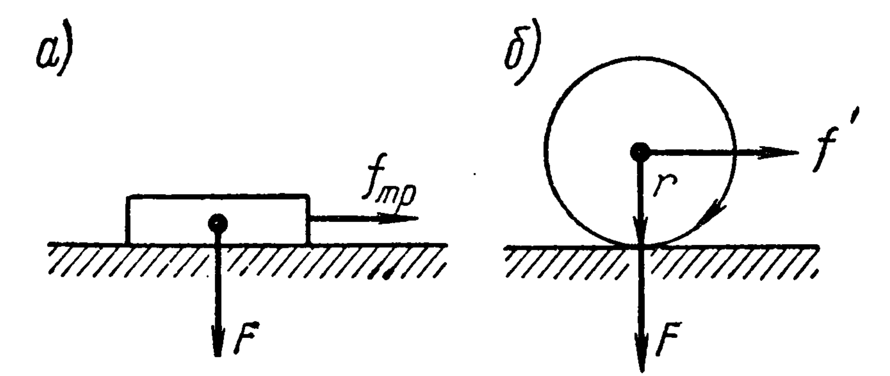


Рис. 8-2. Схема расположения взаимодействующих тел при трении: *а*) скольжения, *б*) кручения

Значение характеристических коэффициентов трения зависит прежде всего от рода соприкасающихся сред.

Закон Кулона является приближенной зависимостью, применимой лишь в условиях умеренных давлений. Кроме сил трения, при движении тел в молекулярных средах возникают силы лобового и вязкого сопротивления. Лобовое сопротивление также происходит вследствие изменения расположения частиц среды (работа раздвижения частиц) и сообщения им кинетической энергии. Сила лобового сопротивления для небольших относительных скоростей v может быть выражена прямой пропорциональностью

$$f_{\text{c}} = r_{\text{c}}v, \quad (8,3)$$

где r_{c} — внешнее механическое сопротивление среды, включающее и внешнее трение. При больших относительных скоростях v перемещения тела в окружающей его среде образуются вихревые движения частиц, резко увеличивающие внешнее механическое сопротивление. Сила внешнего сопротивления при этом изменяется в зависимости от скорости более круто, чем по закону пропорциональности v ($\sim v^2$).

При движении тела в среде, кроме силы внешнего сопротивления, действует еще сила внутреннего трения этой среды, обусловленная ее вязкостью и равная

$$f = \eta \frac{dv}{dx} S, \quad (8,4)$$

где η — вязкость среды (в *г* · *см*$^{-1}$ · *сек*$^{-1}$ или *н* · *сек*/*м*^{2}).

Если рассматривать ламинарное (безвихревое) обтекание сплошной жидкой или газообразной средой сферического тела радиуса r (рис. 8-3), то из условия непрерывности обтекающего потока можно записать отношение скоростей обтекания при наличии тела (v') и без него (v):

$$\frac{v'}{v} = \frac{\pi r}{2r} \sim \frac{3}{2}.$$

Полагая $\Delta x = r$ и $\Delta v = v' = \frac{3}{2} v$ из формулы (8,4), получим закон Стокса для силы внутреннего трения при ламинарном обтекании

$$f_{\text{в}} = \eta \frac{3}{2} \frac{v}{r} \cdot 4\pi r^2 = 6\pi r \eta v. \tag{8,5}$$

В зависимости от рода жидкой среды и температуры вязкость η изменяется в широких границах: от 10^{-4} *пуаз* для газов до 10^{10} *пуаз* для битума при 15° С.

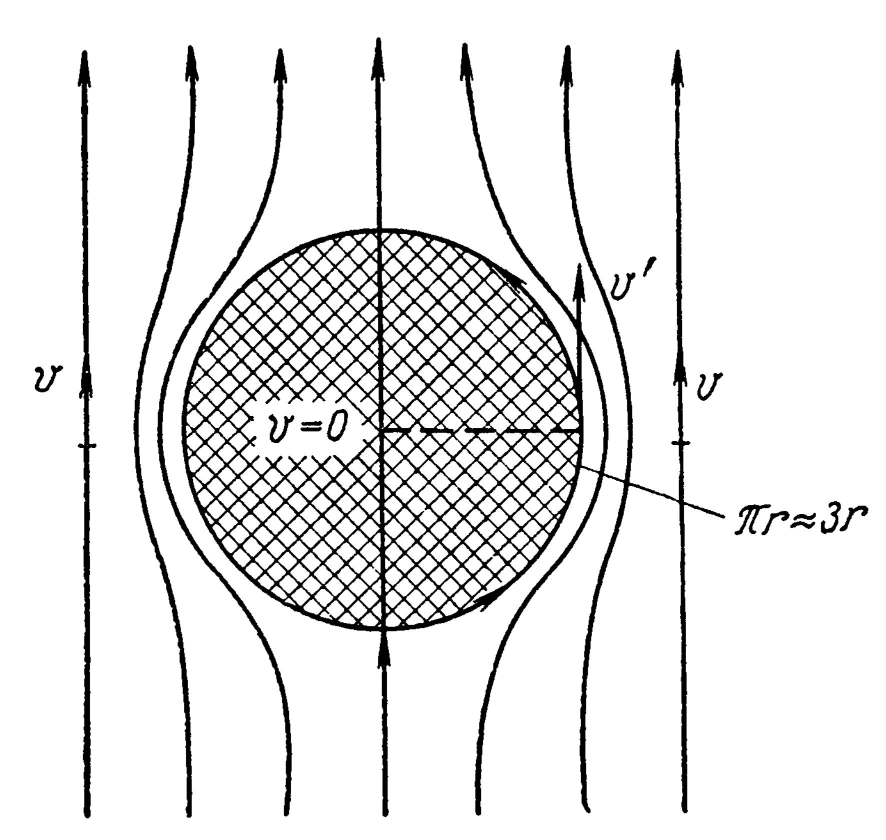


Рис. 8-3. К упрощенному выводу формулы Стокса

Таким образом, причиной возникновения рассмотренных производных сил служит изменение расположения (конфигурации) взаимодействующих тел. Однако в случаях трения и механических сопротивлений движению (раздвижение частиц среды, вязкость среды) эти взаимодействия макроскопически выражаются результирующей силой, которая зависит от скорости относительного перемещения тел. Исходные дипольные и квадрупольные электромеханические взаимодействия между частицами порождают силы совокупных бимолекулярных взаимодействий, которые пропорциональны квадрату числа частиц в единице объема и которые называют ван-дер-ваальсовыми силами, равными

$$f_n = \alpha n^2, \tag{8,6}$$

где n — объемная концентрация молекул, α — характеристическая постоянная взаимодействия.

Наконец, есть еще один вид производной силы, которая играет существенную роль, но имеет другую природу возникновения, — это инерциальная сила Кориолиса, возникающая в системах, движущихся с ускорением по отношению к инерциальной системе. Такой неинерциальной системой является Земля, вращающаяся с угловой частотой $\omega = 7 \cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$.

Если тело движется по земной поверхности, например вдоль меридиана с постоянной линейной скоростью v', то, как видно из рис. 8-4, вследствие сферичности Земли и ее вращательного движения для наземного наблюдателя за время Δt создается векторное избыточное приращение пути Δl по кругу широт. Так как

$$\Delta l = v' \cdot \Delta t \cdot \Delta \alpha = v'\omega (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} a_к (\Delta t)^2,$$

то

$$a_к = 2v'\omega, \qquad (8,7)$$

и, следовательно, действует инерциальная сила Кориолиса

$$f_к = 2mv'\omega.$$

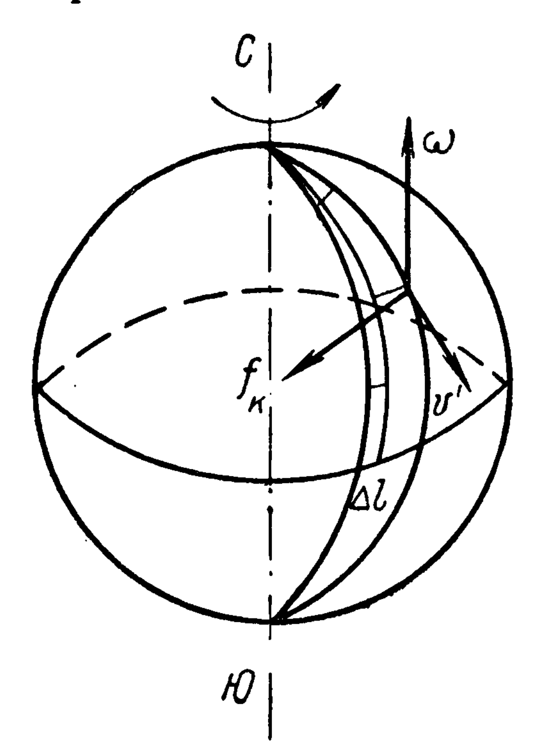


Рис. 8-4. Возникновение инерциальной силы Кориолиса для наземного наблюдателя

Эта сила направлена вдоль ускорения $a_к$, что соответствует направлению векторного произведения линейной скорости на угловую скорость вращения системы (рис. 8-4).

Инерциальными силами Кориолиса объясняются такие известные наземные явления, как различие профилей берегов рек, текущих вдоль меридианных направлений (в северном полушарии правый берег, подмываемый водой, имеет более крутой профиль), и различный износ рельс двухколейных железных дорог того же направления (в северном полушарии больше срабатывается правый рельс).

Лекция 9

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

Ранее было рассмотрено движение неизменяемых систем (твердых тел), обладающих свойством восстановления формы. Жидкости вовсе не обладают сопротивлением сдвигу. Они имеют очень малый коэффициент объемного сжатия и практически считаются несжимаемыми. В таком случае стационарный ламинарный (слоистый) поток жидкости постоянной плотности должен удовлетворять условию неразрывности, по которому количество жидкости, протекающее сквозь сечение потока за произвольный, но одинаковый промежуток времени не меняется или, иначе, произведение средней по сечению скорости на площадь поперечного сечения потока должно быть величиной постоянной вдоль всего контура потока, т. е.

$$Sv = \text{const}. \qquad (9,1)$$

Применяя уравнение работы (4,8) к двум сечениям потока жидкости произвольной конфигурации (рис. 9-1) и пренебрегая трением, можем записать

$$(p_1 - p_2) \cdot \Delta v = \rho \cdot \Delta v (z_1 - z_2) g = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V (v_2^2 - v_1^2), \qquad (9,2)$$

где p_1 и p_2 — внешние давления, оказываемые на избранные сечения; $(z_1 - z_2)$ — разность высот сечений над нулевым уровнем, v_2 и v_1 — средние скорости потока в избранных сечениях. Обозначив вес единицы объема $\rho g = \gamma$, записанное уравнение представим в виде

$$p_ж = p + \gamma z + \gamma \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \qquad (9,3)$$

Это будет уравнение Бернулли. Здесь $p + \gamma z$ — гидростатическое давление жидкости в данном сечении потока (потенциальная часть гидравлического давления жидкости $p_ж$), $\gamma \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} \rho v^2$ — гидродинамическое давление (кинетическая часть гидравлического давления жидкости $p_ж$). Из выражений (9,1), (9,2) следует, что в местах сужений потока жидкости гидродинамическое давление ее возрастает, а гидростатическое, соответственно, понижается.

Уравнение Бернулли справедливо для ламинарного течения идеальной жидкости без трений. Реальные жидкости обладают внутренним трением, или вязкостью. Течение ламинарных потоков вязких, практически несжимаемых жидкостей подчиняется уравнению Пуазейля. Скорость течения вязкой жидкости в трубе изменяется по сечению трубы: она равна нулю у стенки трубы и максимальна на ее оси (рис. 9-2). Обозначая через η динамическую вязкость жидкости и используя выражение силы внутреннего трения (8,4) для трубы длиною l и радиусом r при разности давлений на концах $p_1 - p_2 = \Delta p$, можно записать:

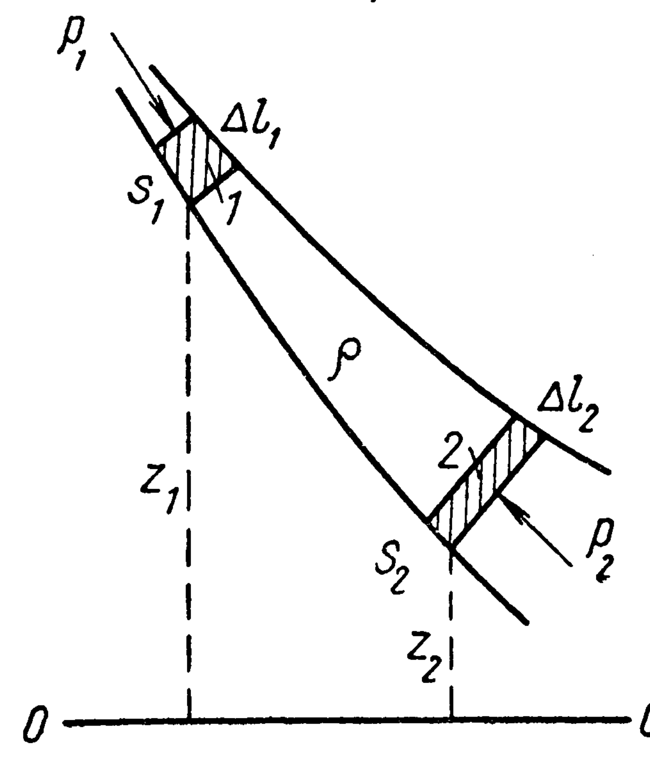


Рис. 9-1. Установившийся ламинарный поток жидкости постоянной плотности

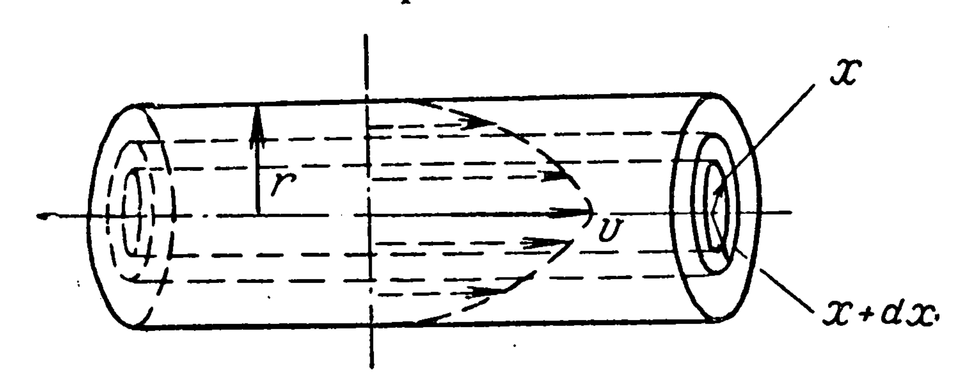


Рис. 9-2. Распределение скорости ламинарного течения жидкости по диаметру трубы

$$(p_1 - p_2)\pi x^2 = -\eta \frac{dv}{dx} \cdot 2\pi x l, \qquad (9,4)$$

откуда

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} x \cdot dx.$$

После интегрирования в границах от предела x, когда $v = v_x$, до $x = r$, когда $v = 0$, имеем

$$v_x = \frac{\Delta p}{4\eta l}(r^2 - x^2). \qquad (9,5)$$

Элементарный цилиндрический объем жидкости, вытекающей за 1 *сек* сквозь кольцевое сечение между окружностями радиусов x и $(x + dx)$,

$$dV = \pi\,[(x + dx)^2 - x^2]\, v_x \approx 2\pi x\, v_x \cdot dx.$$

После подстановки v_x из выражения (9,5) получим

$$dV = \frac{\pi \cdot \Delta p}{2\eta l}\,(r^2 x \cdot dx - x^3 \cdot dx). \tag{9,6}$$

Новое интегрирование в границах изменения x от $x = 0$ до $x = r$ приводит к результату

$$V = \frac{\pi r^4}{8l}\,\frac{\Delta p}{\eta}. \tag{9,7}$$

Для стационарного потока за конечное время t получим

$$V_t = \frac{\pi r^4}{8l}\,\frac{1}{\eta}\,(p_1 - p_2)\,t \text{ — формула Пуазейля.} \tag{9,8}$$

Это выражение служит основой для экспериментального определения динамической вязкости η путем сравнения времен истечения t_2 и t_1 одинакового объема двух жидкостей — испытуемой (обозначим индексом *2*) и образцовой (*1*) через один и тот же капилляр. Очевидно, при ламинарности обоих потоков и постоянстве перепада давлений $\Delta p = p_1 - p_2$ при условии $V_{t,1} = V_{t,2}$ имеем

$$\eta_2 = \eta_1\,\frac{t_2}{t_1}.$$

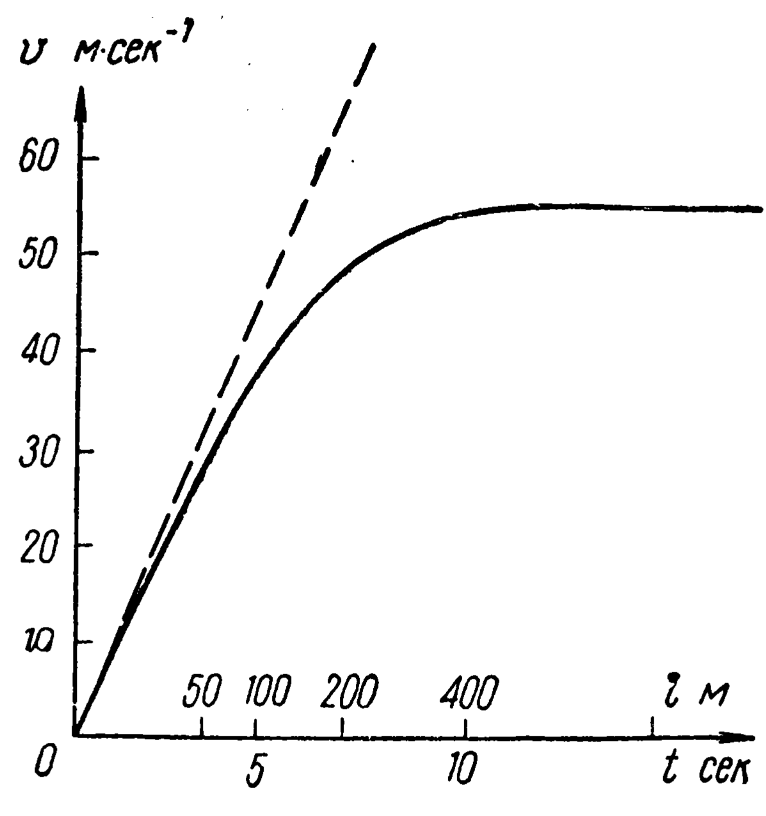


Рис. 9-3. График скорости падения шара массой 70 *кг* в атмосферном воздухе ($v_к \approx 55$ *м · сек*$^{-1}$)

Если вязкость жидкости велика, например больше 1 *пз* (единицы вязкости в системе СГС), то рассматривают не ламинарное истечение жидкости из капилляра, а равномерное падение сферического тела в испытуемой жидкости. Согласно формуле Стокса (8,5), конечная скорость $v_к$ равномерного падения (рис. 9-3) шара в вязкой среде может быть найдена из условия

$$F - F_A - F_C = 0,$$

где F — сила тяготения, приложенная к шару, F_A — архимедова сила, равная $\frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_ж$, F_C — сила внутреннего трения.

Таким образом,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g\,(\rho_т - \rho_ж) = 6\pi r \eta v_к,$$

откуда

$$v_к = \frac{2}{9}\frac{gz^2}{\eta}(\rho_т - \rho_ж). \qquad (9,9)$$

При малых размерах сферического тела, т. е. при $\frac{\lambda}{r} \geqslant 1$ (λ — среднее расстояние между молекулами вещества, r — радиус сферического тела), вязкую среду, в которой происходит падение, уже нельзя рассматривать как сплошную (мелкие зародыши туманов и кристаллов) и поэтому вводится поправочный множитель в виде $\left(1 + A\frac{\lambda}{r}\right)$, где A — характеристическая для среды величина. Значение динамической вязкости жидкостей изменяется в широких пределах. Оно зависит не только от рода жидкости, но в сильной мере еще от температуры, убывая с ее повышением.

Приведем значения η (в пуазах) различных жидкостей при $t = 20°$ C

Гелий II	~ 0
Углекислота (жидкая)	$7 \cdot 10^{-4}$
Вода	$1 \cdot 10^{-2}$
Глицерин	8,5
Битум	10^8

Если в канале течения жидкости имеются резкие скачкообразные изменения поперечного сечения или если градиент скорости поступательного движения потока жидкости настолько велик, что происходит скачкообразное изменение ее плотности (разрыв струи), то имеет место завихрение потока (турбулентность).

Макроскопическим критерием возникновения вихрей в потоке жидкости служит безразмерное отношение работы ускорения $A_у$ к работе трения $A_т$, называемое числом Рейнольдса и равное $N_R = \frac{A_у}{A_т}$. Пользуясь методом анализа размерностей, можем записать

$$[A_у] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = [l^3\rho v^2] \quad \text{и} \quad [A_т] = [F_{тр}l] = [\eta l^2 v];$$

после деления этих равенств получим

$$N_R = \frac{lv\rho}{\eta}, \qquad (9,10)$$

где v — скорость жидкости относительно твердых стенок канала, ρ — плотность жидкости, η — динамическая вязкость жидкости $\left(\frac{\eta}{\rho}\right.$ называют кинематической вязкостью), l — определяющий линейный размер канала (например, диаметр трубы). При ламинарном течении жидкости основное значение имеет работа трения, что соответствует малым числам Рейнольдса ($0 \div 10$). В гладких трубах диаметром D завихрения возникают при $N_R = \frac{Dv\rho}{\eta} > 2000$. В отсутствие внутреннего трения очевидно $N_R \to \infty$. Критерий тур-

булентности широко используется при механических моделированиях потоков. Подбирая род жидкости и скорость течения, можно получить необходимое число N_R на малых по размерам моделях. Для пористых сред число Рейнольдса зависит еще от относительного объема пор ω, поэтому

$$N'_R = \frac{D_i v \rho}{\eta} f(\omega), \tag{9,11}$$

где D_i — диаметр частиц пористого вещества, $f(\omega)$ — функция пористости, зависящая от формы частиц и состояния их поверхностей (шероховатости).

Для частиц гладкой сферической формы функция пористости $f(\omega)$ показана на рис. 9-4.

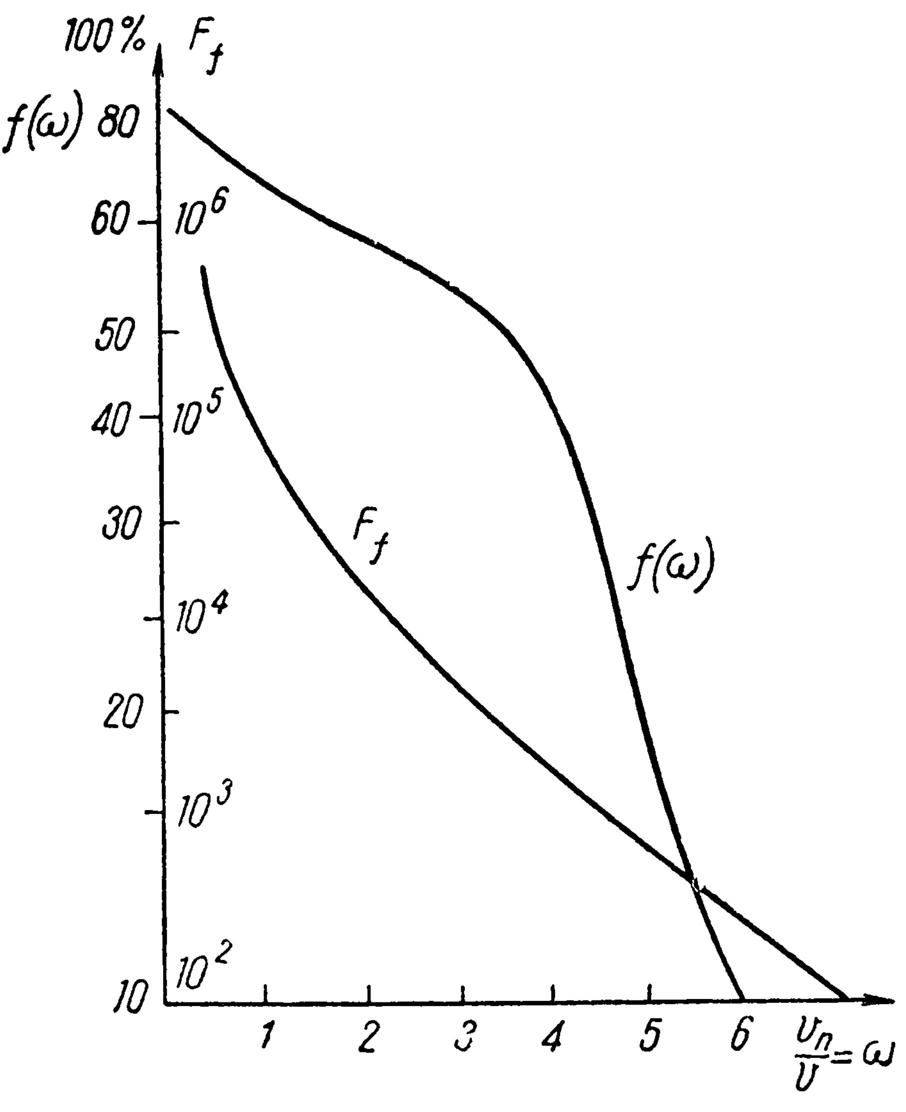


Рис. 9-4. Зависимость функции пористости $f(\omega)$ и коэффициента пористого сопротивления F_f от пористости ω для сферических частиц

Все приведенные в этой лекции зависимости могут быть распространены и на газы, если газы считать несжимаемыми лишь при относительно небольших скоростях поступательного движения (примерно до 70 *м/сек*).

Имея в виду сказанное и пользуясь формулой (9,3), можно выяснить некоторые вопросы истечения жидкостей и газов из отверстий.

Для жидкостей по уравнению Бернулли имеем

$$p_1 - \rho g h_1 + \rho_2 \frac{v_1^2}{2} = \\ = p_2 - \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2},$$

а при условии, что $v_1 = 0$, для $h_1 = 0$ и $p_1 = p_2$ это уравнение переходит в формулу Торичелли

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}. \tag{9,12}$$

Полагая $v_1 = 0$ и учитывая малую плотность газов, для случая истечения газов из узких отверстий имеем

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 \approx 0,$$

и, следовательно,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \tag{9,13}$$

Как видно из этой формулы, скорость истечения газов зависит от их плотности $\left(v \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$.

В этой связи будут различными и соотношения для перепада давлений $p_1 - p_2$, необходимого для протекания жидкостей и газов по трубам и порам с заданной скоростью. Обозначив диаметр трубы через D, диаметр частиц пористого вещества через D_i, длину канала через L, получим выражения разности давлений:

а) при ламинарном течении жидкости ($N_R < 2000$), согласно формуле (9,8),

$$p_1 - p_2 = \frac{128}{\pi} \frac{mL}{D^4} \eta, \tag{9,14}$$

где m — масса жидкости (или газа), ежесекундно протекающей через сечение канала;

б) при турбулентном течении жидкости

$$p_1 - p_2 = \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \rho f(N_R), \tag{9,15}$$

где $f(N_R)$ — множитель сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса, а значит, и от вязкости жидкостей;

в) при ламинарном течении газов в капилляре для $T = \text{const}$ справедлива видоизмененная формула Пуазейля (9,8)

$$p_1^2 - p_2^2 = 256 \frac{RT}{\pi} \frac{m}{\mu} \frac{h}{D^4} \eta, \tag{9,16}$$

поскольку условие непрерывности струи означает не постоянство объема V, а постоянство массы $\frac{m}{\mu}$ протекающего газа, и, следовательно, для газа условие непрерывности струи означает $pV = \text{const}$;

г) при течении сильно разреженных газов ламинарное или вихревое течение газа отсутствует. Молекулы движутся независимо друг от друга, но соударяются со стенками канала (прилипают и отскакивают). Вместо формулы Пуазейля (9,14) справедлива формула Кнудсена

$$p_1 - p_2 = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{mL}{D^3} \sqrt{\rho_0}, \tag{9,17}$$

где m — масса газа, ежесекундно вытекающего из сосуда с малым давлением p_1 в сосуд с другим давлением $p_2 < p_1$, ρ_0 — плотность газа при давлении, принятом за единицу;

д) при течении жидкости сквозь пористую среду имеем подобно выражению (9,15)

$$p_1 - p_2 = \frac{L}{D_i} \frac{v^2}{2g} \rho F_f, \tag{9,18}$$

где F_f — новый множитель сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса N'_R, выраженного формулой (9,11), и, следовательно, от пористости среды ω (рис. 9-4).

Вращательное движение жидкостей и газов по сравнению с вращением твердых тел осложнено тем, что в этих агрегатных состояниях вещество не обладает сопротивлением сдвигу. Таким образом, при вращении жидкости происходит взаимное перемещение частиц вещества, и, следовательно, вращение уже не определяется общей угловой скоростью. Вся система перестает быть консервативной из-за наличия в ней внутреннего трения, при котором происходят преобразования упорядоченного направленного движения в беспорядочное молекулярное (диссипативная система).

Лекция 10

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Вращение твердого тела вокруг центра притяжения представляет собой пример периодического движения. Подобным периодическим движением является поступательно-возвратное перемещение тела около центра притяжения. Такое движение называют колебанием с одной степенью свободы, например движение тела, укрепленного на пружине (рис. 10-1). Рассматривая такую систему как изолированную и обозначая через x отклонение тела массой m от положения равновесия, на основании выражения (4,11) имеем

$$U = \frac{1}{2} kx^2.$$

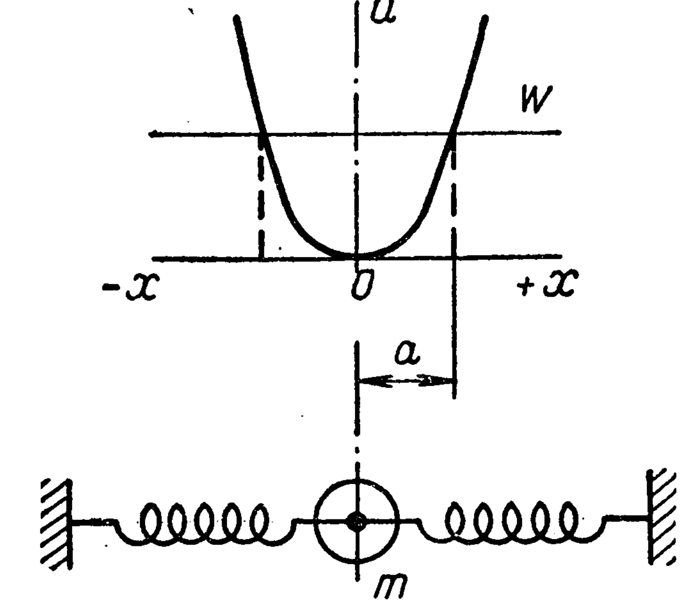


Рис. 10-1. Линейное гармоническое колебание: W — полная энергия системы, U — потенциальная энергия деформации; a — амплитуда колебаний

Это уравнение параболы (рис. 10-1).

Так как

$$F = m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} = -kx,$$

можно записать уравнение для свободных колебаний тела (трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем) с одной степенью свободы

$$m\ddot{x} + kx = 0. \qquad (10,1)$$

Если обозначить $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, формула (10,1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения второго порядка равен сумме двух частных решений x_1 и x_2, представленных

в виде гармонических функций времени (в чем легко убедиться подстановкой). Таким образом,

$$x = x_1 + x_2 = c_1 \cdot \cos \omega_0 t + c_2 \cdot \sin \omega_0 t. \qquad (10,2)$$

Постоянные c_1 и c_2 должны быть выяснены из начальных условий. Полагая при $t = 0$ $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$, из уравнения (10,2) имеем: $c_1 = x_0$ и $c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$, и, значит,

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \qquad (10,3)$$

Как видно, оба слагаемых в общем решении изменяются по гармоническому закону, но со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$, причем первое из

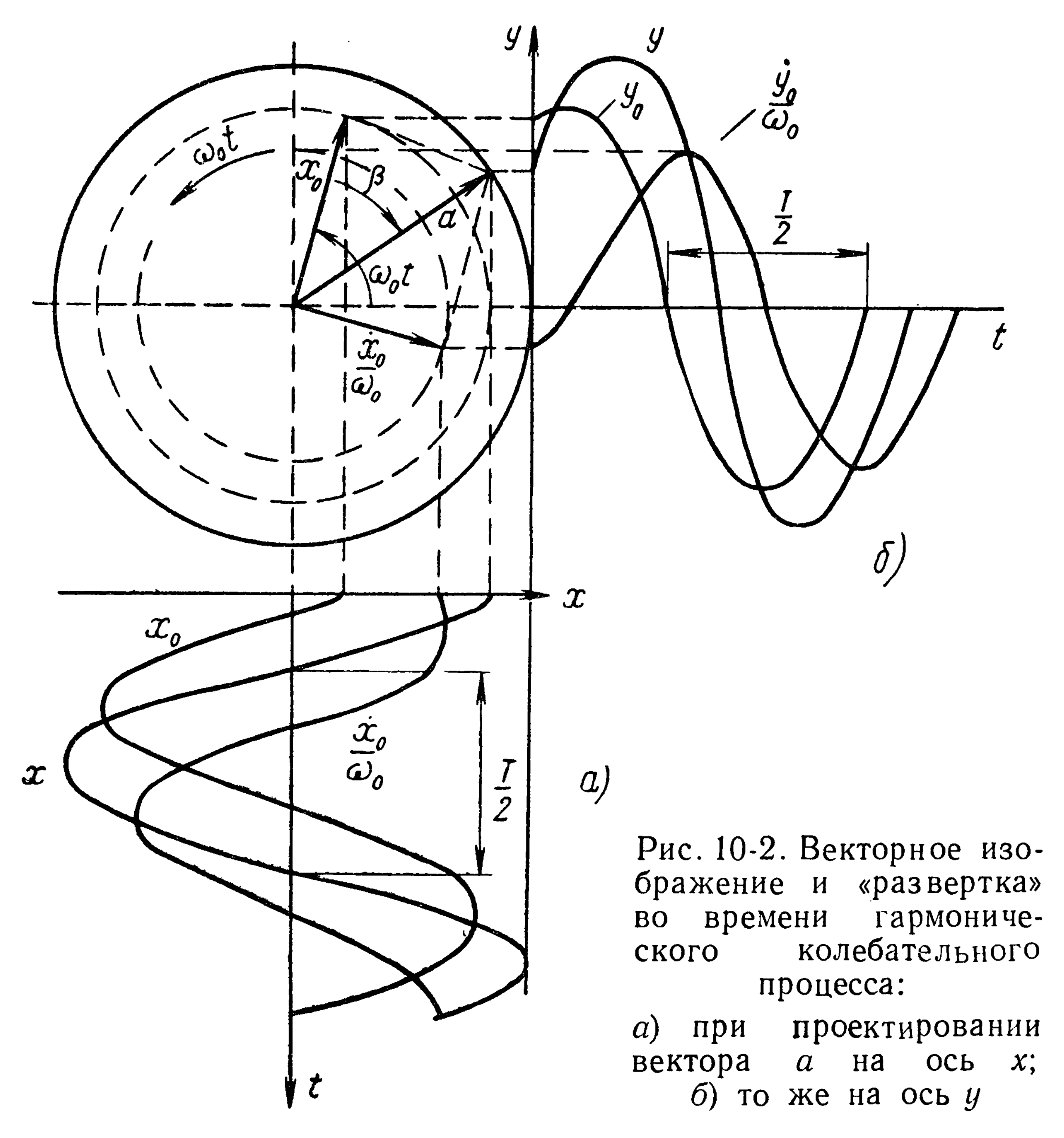


Рис. 10-2. Векторное изображение и «развертка» во времени гармонического колебательного процесса:

а) при проектировании вектора *a* на ось *x*; *б*) то же на ось *y*

них зависит от начального смещения, второе — от начальной скорости. На рис. 10-2 представлены графики разверток и векторные изображения гармонических функций

$$x_1 = x_1(t) \text{ и } x_2 = x_2(t).$$

График фактического перемещения колеблющегося тела $x = x(t)$ получится суммированием ординат разверток составляющих гармонических движений или сложением проекций на ось x векторов x_0

и $\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$, вращающихся с циклической частотой (или угловой скоростью) $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (рис. 10-2, *а*).

Такой результат будет, если рассматривать величину замыкающего вектора $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$ (см. рис. 10-2, *б*), составляющего с осью x угол $(\omega_0 t - \beta)$ при $\operatorname{tg}\beta = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$. В этом случае уравнение (10,3) может быть представлено в эквивалентной форме

$$x = a \cdot \cos(\omega_0 t - \beta) \tag{10,4}$$

или, если брать проекцию на ось y,

$$y = a \cdot \sin(\omega_0 t - \beta). \tag{10,4'}$$

Колебания, описываемые уравнениями (10,4) и (10,4′), называются гармоническими с амплитудой a, циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и начальной фазой — β. Скорость колебательного движения по оси y

$$\dot{y} = a\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t - \beta),$$

т. е. также будет гармонической функцией времени; ускорение

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 a \cdot \sin(\omega_0 t - \beta) = -\omega_0^2 y.$$

Аналогичные выражения скорости и ускорения справедливы и для колебаний по оси x.

Если колебательная система консервативная, то, согласно формуле (10,4) и закону сохранения механической энергии, имеем

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}_m^2, \tag{10,5}$$

т. е. полная энергия колебания, равная сумме потенциальной и кинетической энергий системы, в каждый данный момент прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Для колебаний заданной амплитуды полная энергия остается величиной постоянной.

В механических системах собственные свободные колебания возникают при восстановлении равновесия после действия внешнего возмущающего импульса. Если такой импульс создает изменение размеров упругих тел или изменение их положения в потенциальных силовых полях (сжатие, растяжение, изменение уровня жидкости), то в системе возникают восстанавливающие силы f' (силы упругости, или гидростатического давления).

Если внешние импульсы вызывают кручение, то при этом возникают восстанавливающие моменты внутренних сил M'. В случае упругих линейных колебаний имеем

$$f' = -kx \quad \text{и} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{10,6}$$

Для гидростатических колебаний уровня h жидкости в манометрической трубке с площадью поперечного сечения S получаем

$$f' = \rho g h S = 2\rho g S h_{\text{цт}},$$

где ρ — плотность жидкости, $h_{\text{цт}}$ — высота центра тяжести. Коэффициент k восстанавливающей силы равен $\frac{f'}{h_{\text{цт}}} = 2\rho g S$, так что по формуле (10,6)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g S}}. \quad (10,7)$$

Для крутильных колебаний маятника имеем

$$M' = D\varphi = J\varepsilon, \quad (10,8)$$

где D — коэффициент восстанавливающего момента M', J — момент инерции маятника.

Пользуясь соответствием между формулами динамики поступательного (4,2) и вращательного (6,5) движений, для крутильных и маятниковых колебаний получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (10,9)$$

Для физического маятника

$$M' = mgr \cdot \sin\varphi,$$

где r — расстояние от центра тяжести маятника до точки подвеса, φ — угол отклонения от положения равновесия.

Если угол отклонения мал, так что $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \approx 1$, то

$$M' = mgr\,\varphi,$$

и тогда, согласно формуле (10,9),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mrg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}. \quad (10,10)$$

Величина $l' = \frac{J}{mr}$ называется приведенной длиной физического маятника.

Простые гармонические колебания практически происходят редко. Всегда существует сопротивление движению и, следовательно, всегда происходит уменьшение энергии колебания из-за преобразования части энергии направленного движения в беспорядочное движение молекул вещества. При этом с течением времени уменьшается амплитуда колебаний, т. е. происходит затухание колебаний.

Полагая, что за единицу времени амплитуда затухающих колебаний убывает на одну и ту же часть α, называемую коэффициентом затухания, можем записать

$$da = -\alpha a \cdot dt. \quad (10,11)$$

После интегрирования в пределах времени от 0 при $a = a_0$ до t при $a = a_t$ получим

$$a_t = a_0 e^{-\alpha t}. \qquad (10,12)$$

Уравнение затухающих (ангармонических) колебаний представится тогда в виде (рис. 10-3)

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega_1 t \pm \beta) \\ \text{или}\quad y &= a_0 e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega_1 t \pm \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (10,13)$$

Коэффициент затухания α прямо пропорционален механическому сопротивлению r колебаниям и обратно пропорционален массе колеблющегося тела. Действительно, с одной стороны, $r = \frac{(f_c)_a}{x_a}$, где индекс «а» указывает на амплитудное значение величин, и, с другой стороны, $\alpha = \frac{(f_c)_a}{2mx_a}$, так что $\alpha = \frac{r}{2m}$. Время $t = \tau = \frac{2m}{r}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называют постоянной времени колебательной системы. Для разных систем это время имеет различные значения и лежит в пределах от $\tau = 10^{-3}$ *сек* до $\tau = 10^{3}$ *сек*.

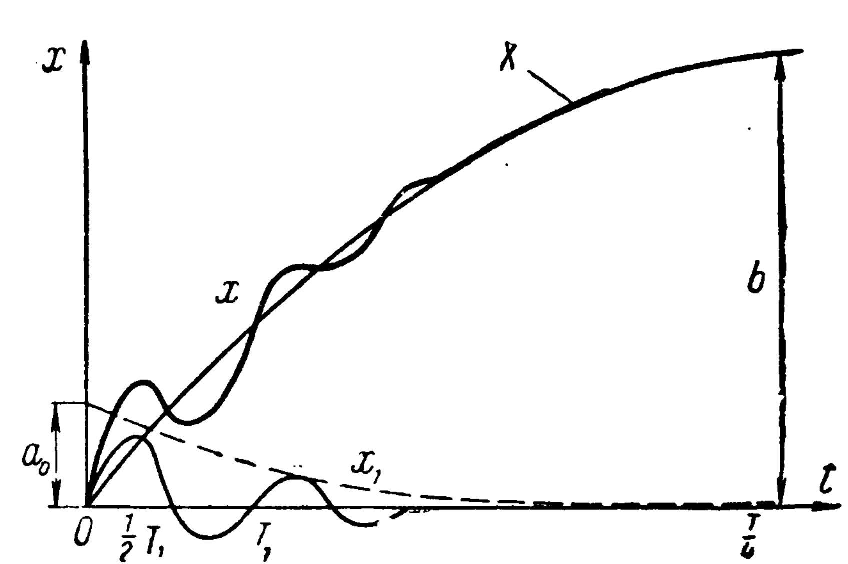


Рис. 10-3. График затухающего колебания (x_1) при логарифмическом декременте затухания $\Theta = 1$, постоянной времени $\tau = 10^{-3}$ *сек* и $\beta_1 = 0$ (частота собственных колебаний $\nu_1 = \frac{1}{T_1} = 1$ *кгц*)

X — развертка вынужденных колебаний амплитуды b и частоты $\nu = {}^1/_{18}\,\nu_1$; $x_1 + X = x$ — развертка результирующего колебания

Чтобы установить характеристику затухания, учитывающую не только параметры системы, но и частоту колебаний, часто пользуются логарифмическим декрементом затухания Θ, определяемым по формуле

$$\Theta = \ln\frac{a_t}{a_{t+T}} = \alpha T = \frac{T}{\tau}. \qquad (10,14)$$

Приведем значения логарифмических декрементов затухания для некоторых колебательных систем:

Кварцевые пластины	$10^{-4} \div 10^{-5}$
Камертоны	10^{-3}
Электрические колебательные контуры	$(2\div5)\cdot10^{-2}$
Акустические системы	10^{-1}
Подвижные системы в индукционных полях и вязких средах	$10 \div 10^{2}$
Элементы строений	$1 \div 5$
Мостовые фермы	$5 \div 10$

При наличии сопротивления среды частота затухающих колебаний несколько меньше частоты свободных колебаний системы и при $\alpha < \omega_0$ равна

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}. \qquad (10,15)$$

Очевидно, при некотором критическом сопротивлении, когда $\alpha = \omega_0$, или, иначе, при $r = 2\sqrt{km}$ движение становится апериодическим ($\omega_1 = 0$).

Большинство практически осуществляемых незатухающих колебаний (механических и электромагнитных) имеют искажения по сравнению с гармоническими (синусоидальными). Такие искажения возникают вследствие наложения на основные колебания дополнительных колебаний разных частот, амплитуд и фаз. Если складываются колебания одного направления и одинаковой частоты, например

$$y_1 = a_1 \cdot \sin(\omega t + \beta_1) \text{ и } y_2 = a_2 \cdot \sin(\omega t + \beta_2),$$

то результатом сложения (см. рис. 10-2) является новое гармоническое колебание с амплитудой

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cdot \cos\varphi}, \qquad (10,16)$$

где $\varphi = \beta_2 - \beta_1$ есть сдвиг фаз складывающихся колебаний, и с начальной фазой β, задаваемой соотношением

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_1 \cdot \sin\beta_1 + a_2 \cdot \sin\beta_2}{a_1 \cdot \cos\beta_1 + a_2 \cdot \cos\beta_2}. \qquad (10,17)$$

Выражение (10,16) определяет явление, называемое интерференцией колебаний.

Если $\varphi = 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, то амплитуда результирующего колебания $A = a_1 + a_2$, т. е. колебания усилят друг друга.

При $\varphi = (2k + 1)\pi$ имеем $A = a_1 - a_2$, и, значит, одно колебание ослабит другое.

Когда частоты колебаний неодинаковые, то при различных амплитудах и начальных фазах получается сложное колебание, как это можно видеть на рис. 10-4. По теореме Фурье любую периодическую функцию можно представить в виде суммы нескольких гармонических функций с кратными частотами и соответственно подобранными амплитудами и начальными фазами (см. рис. 10-4), так что

$$f(t) = a_0 + a_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \beta_1) + \ldots + a_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \beta_n), \qquad (10,18)$$

где ω_1 — циклическая частота основной гармоники.

Таким образом, сложный периодический процесс, например ряд чередующихся импульсов затухающих колебаний от периодических толчков (биение вала), представляется сериальным спектром, со-

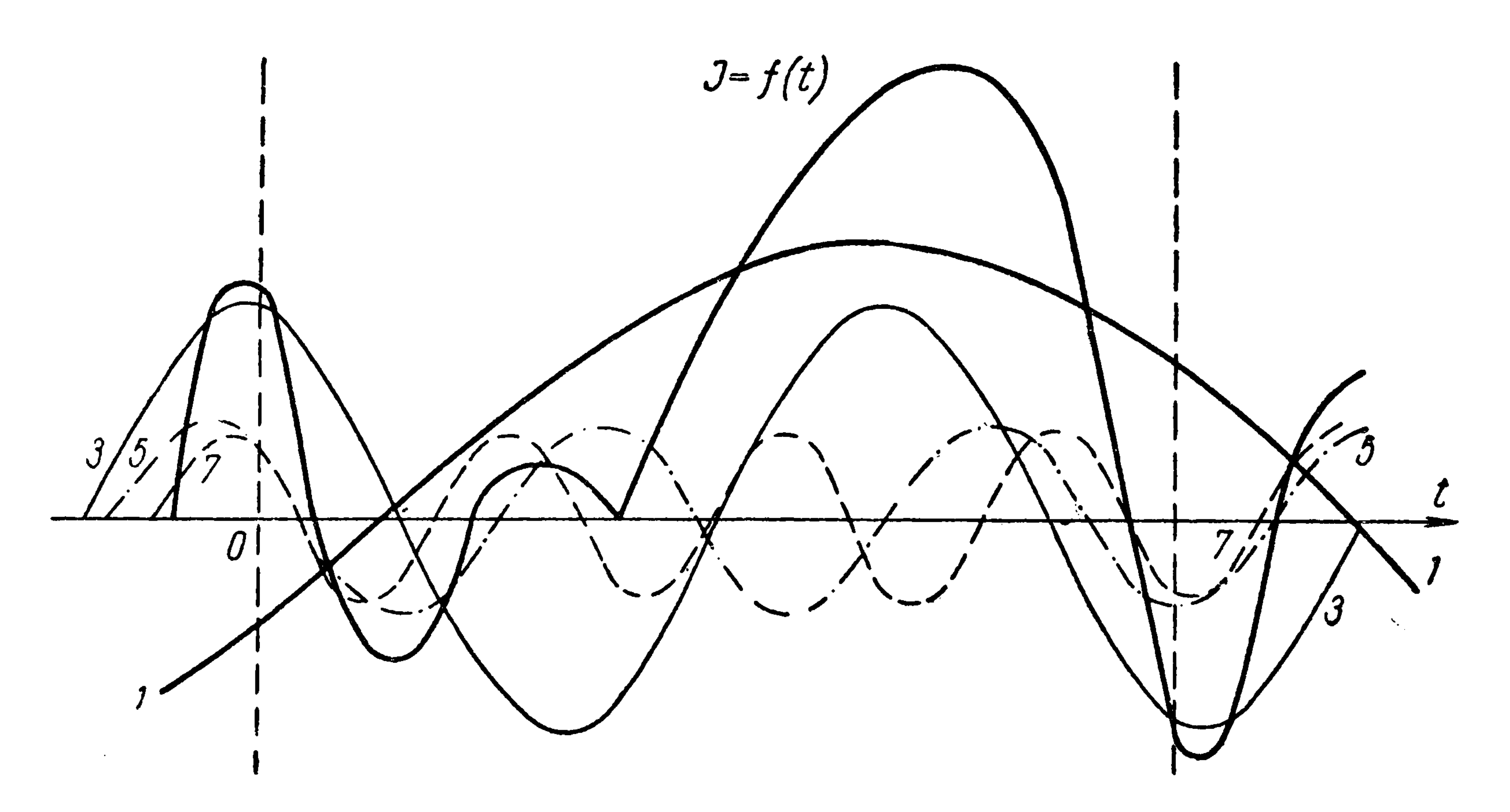


Рис. 10-4. Разложение сложного колебательного движения на составляющие простые гармоники с кратными частотами:

1—1 — основная гармоника ($\beta_1 = -24°$); 3—3 — третья гармоника ($\omega_3 = 3\omega_1$, $a_3 = 0{,}77a_1$, $\beta_3 = 99°$); 5—5 — пятая гармоника ($\omega_5 = 5\omega_1$, $a_5 = 0{,}34a_1$, $\beta_5 = 139°$); 7—7 — седьмая гармоника ($\omega_7 = 7\omega_1$, $a_7 = 0{,}28\,a_1$; $\beta_7 = 128°$)

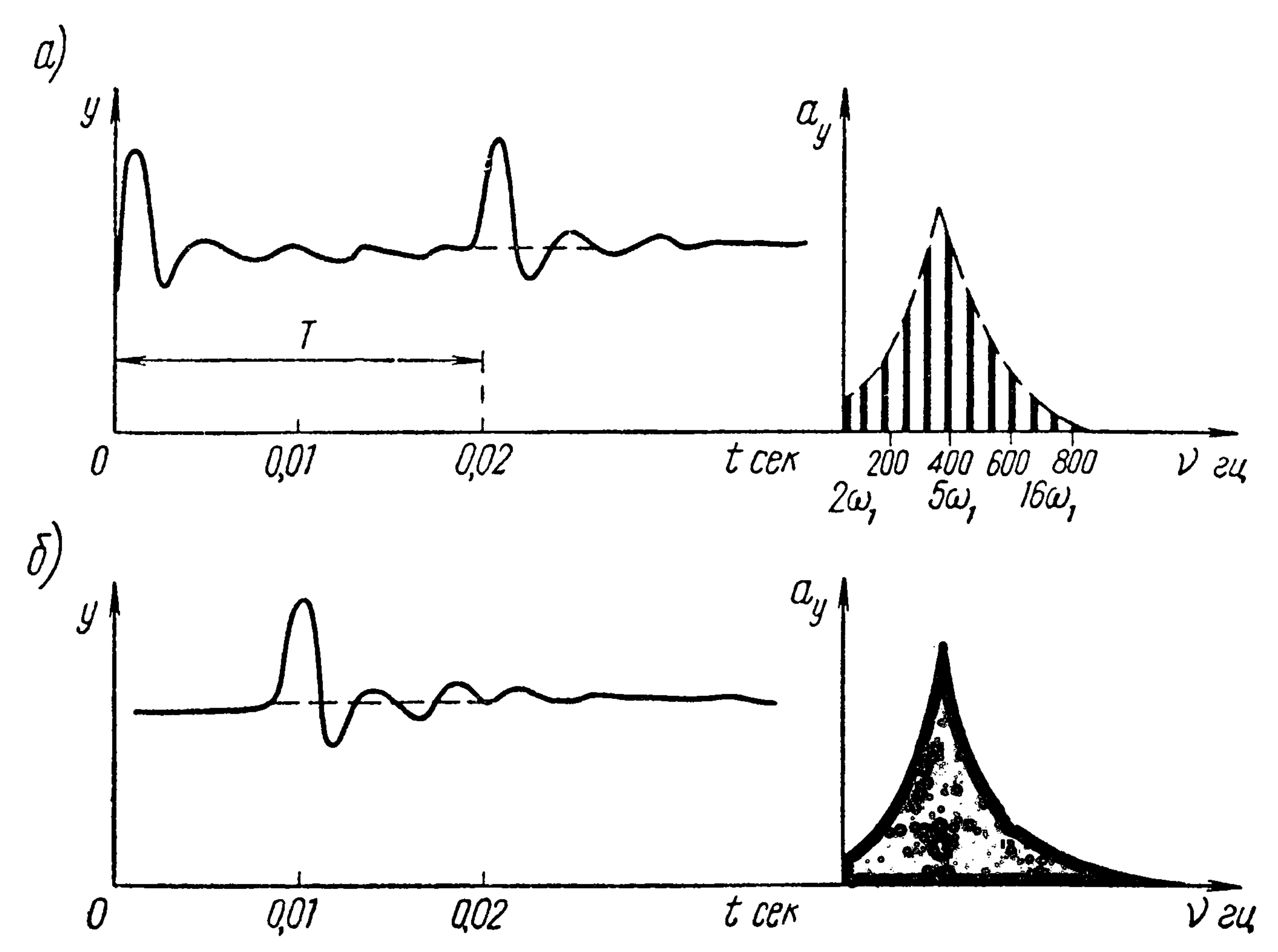


Рис. 10-5. Амплитудные спектры колебательных импульсов: *а*) линейчатый для серии затухающих колебаний, *б*) сплошной для отдельного колебательного импульса

стоящим из дискретного ряда простых гармонических колебаний кратных частот (рис. 10-5, *а*).

Чем реже толчки, тем ниже частота основной гармоники и тем больше может быть число кратных частот.

Отдельный апериодический, затухающий импульс от удара (непериодическая функция времени) представляется сплошным, или непрерывным, спектром, т. е. таким спектром, в котором амплитуды составляющих простых гармонических колебаний не равны нулю для любой частоты в интервале всего спектра (рис. 10-5, *б*).

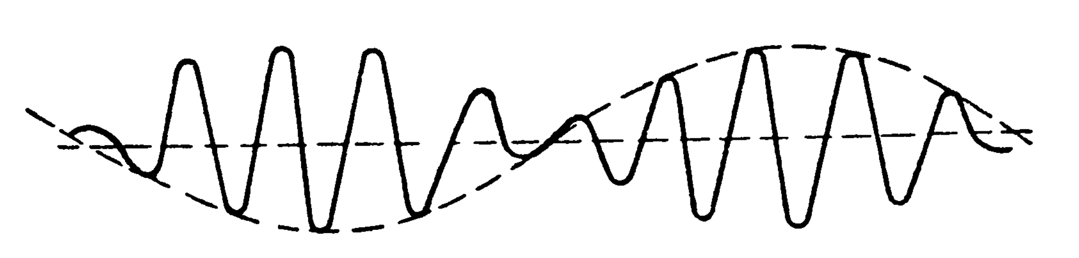


Рис. 10-6. Биение колебаний («развертка» во времени)

Если частоты складывающихся колебаний y_1 и y_2, как и их амплитуды, мало отличаются друг от друга, то, полагая для упрощения $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $a_1 = a_2 = a$ и обозначая $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ и $\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, получим

$$y = y_1 + y_2 = 2a \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot \sin \omega' t. \quad (10,19)$$

Величину $2a \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2}$ можно рассматривать как медленно изменяющуюся амплитуду гармонического колебания высокой частоты ω', что представляет собой так называемое биение колебаний (рис. 10-6).

При сличении двух колебаний на практике нередко прибегают к циклограммам, т. е. к фигурам, получающимся, например, на экране электронно-лучевых трубок при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$y = b\sin(\omega_2 t + \beta_1) \text{ и}$$
$$x = a\sin(\omega_1 t + \beta_2).$$

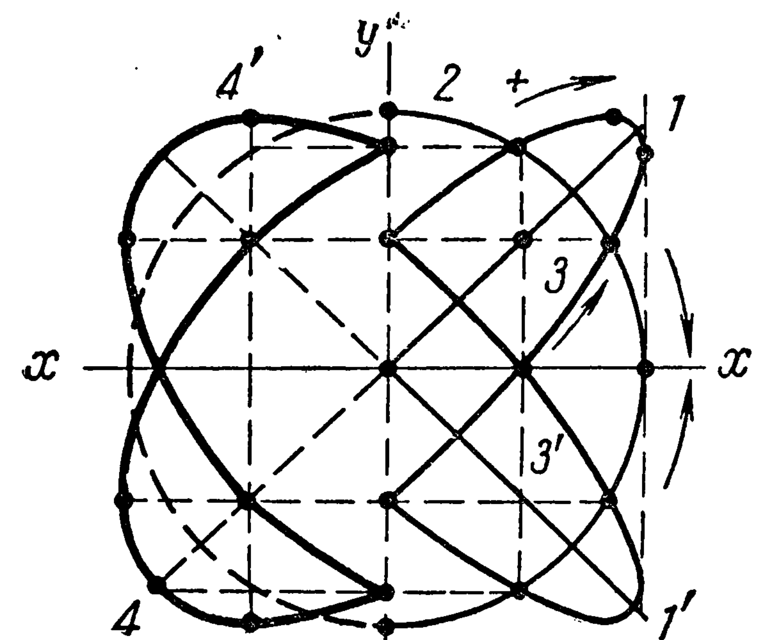


Рис. 10-7. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний, заданных уравнениями $x = a\sin\omega t$ и $y = b\sin(\omega t + \varphi)$, при различных сдвигах фазы φ: *1* и *1'*) $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$; *2*) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; *3* и *3'*) $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \pi - \frac{\pi}{6}$; *4* и *4'*) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3}$

Геометрически складывая перемещения колеблющейся точки по осям x и y через равные моменты времени, можно проследить формирование таких фигур (рис. 10-7).

Равномерное движение точки по окружности получается при условиях $a = b$; $\omega_1 = \omega_2$ и $\varphi = \beta_2 - \beta_1 = \frac{\pi}{2}$. Если $\varphi = 0$, то будут наблюдаться линейные колебания наклонно к осям, а при

промежуточных значениях φ — эллипсы с наклонными осями и постоянными секторными скоростями. В общем случае образующиеся фигуры приобретают более сложный вид (фигуры Лиссажу). При равенстве амплитуд двух взаимно перпендикулярных колебаний, в которых участвует колеблющаяся точка, отношение частот колебаний равно отношению числа касаний фигуры Лиссажу сторон квадрата x и y (рис. 10-8).

Для практического осуществления незатухающих колебаний (маятники часов, генераторные радиотехнические схемы) необходимо питание установок от какого-либо источника энергии. Подводимая энергия должна компенсировать расход энергии колебаний на преодоление сопротивления. Чтобы питание энергией происходило автоматически и соответствовало такту колебаний (автоколебания), должна быть осуществлена обратная связь, при которой часть энергии колебаний затрачивается на управление моментом и продолжительностью подачи энергии (анкером в часах; сеточным потенциалом в радиотехнических схемах; клапанами в двигателях).

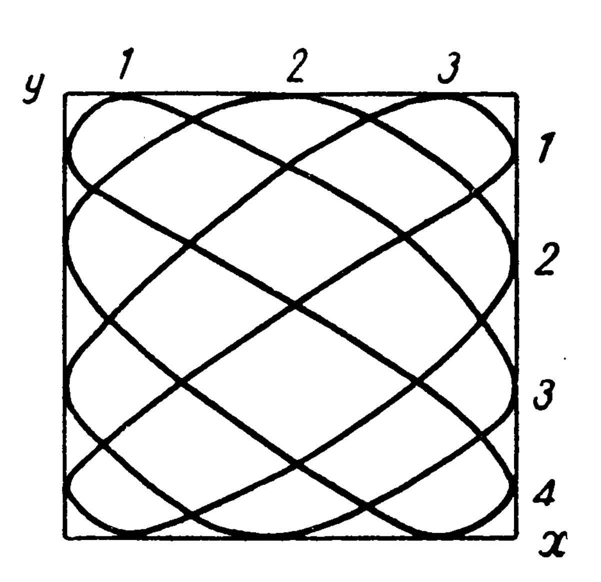


Рис. 10-8. Фигура Лиссажу при отношении частот равноамплитудных взаимно перпендикулярных колебаний, равном 4 : 3

Рассмотренные колебания происходили с частотами, определяемыми параметрами колебательной системы: массой m, сопротивлением r и коэффициентом упругости k. Однако, если тело выводится из положения равновесия не импульсом силы, а гармонически изменяющейся силой $f = F \cdot \sin \omega t$, то после некоторого переходного режима возникнут вынужденные колебания тела с частотой вынуждающей силы.

В этом случае дифференциальное уравнение действующих сил будет иметь вид

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F \cdot \sin \omega t;$$

или, разделив на m и обозначив $\alpha = \frac{r}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, получим

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cdot \sin \omega t. \qquad (10,20)$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения (с правой частью) представляет собой сумму

$$\dot{x} = x_1 + X,$$

где $x_1 = ae^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_1 t$ — уравнение собственных затухающих колебаний системы (общий интеграл уравнения (10,20) без правой части) и $X = b \cdot \sin (\omega t - \beta)$ — частное решение полного уравне-

ния (10,20). Подставляя это частное решение в уравнение (10,20) и обозначая $\omega t - \beta = \gamma$, получаем

$$-\omega^2 b \cdot \sin\gamma + 2\alpha\omega b \cdot \cos\gamma + \omega_0^2 b \cdot \sin\gamma =$$
$$= \frac{F}{m} \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma + \frac{F}{m} \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma.$$

Так как коэффициенты при sin γ равны, то

$$b(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F}{m} \cdot \cos\beta,$$

коэффициенты при cos γ также равны, поэтому (10,21)

$$2\alpha\omega b = \frac{F}{m} \cdot \sin\beta,$$

откуда

$$b = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = f(\omega), \quad (10,22)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = f'(\omega). \quad (10,23)$$

Таким образом, если заданы амплитуда вынуждающей силы F и параметры колебательной системы m, r, k, то амплитуда b и фаза β вынужденных колебаний определяются частотой вынуждающей силы.

При $\omega \to 0$, т. е. при действии практически постоянной силы, независимо от показателя затухания α, из уравнения (10,22) имеем

$$b_0 = \frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k} \text{ — закон Гука.}$$

Введя обозначения $\frac{\omega}{\omega_0} = \varkappa$ и $\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{r}{2\sqrt{mk}} = \varepsilon$, выражение (10,22) можно записать в виде

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa)^2 + 4\varepsilon^2\varkappa^2}} = \Psi(\varkappa). \quad (10,24)$$

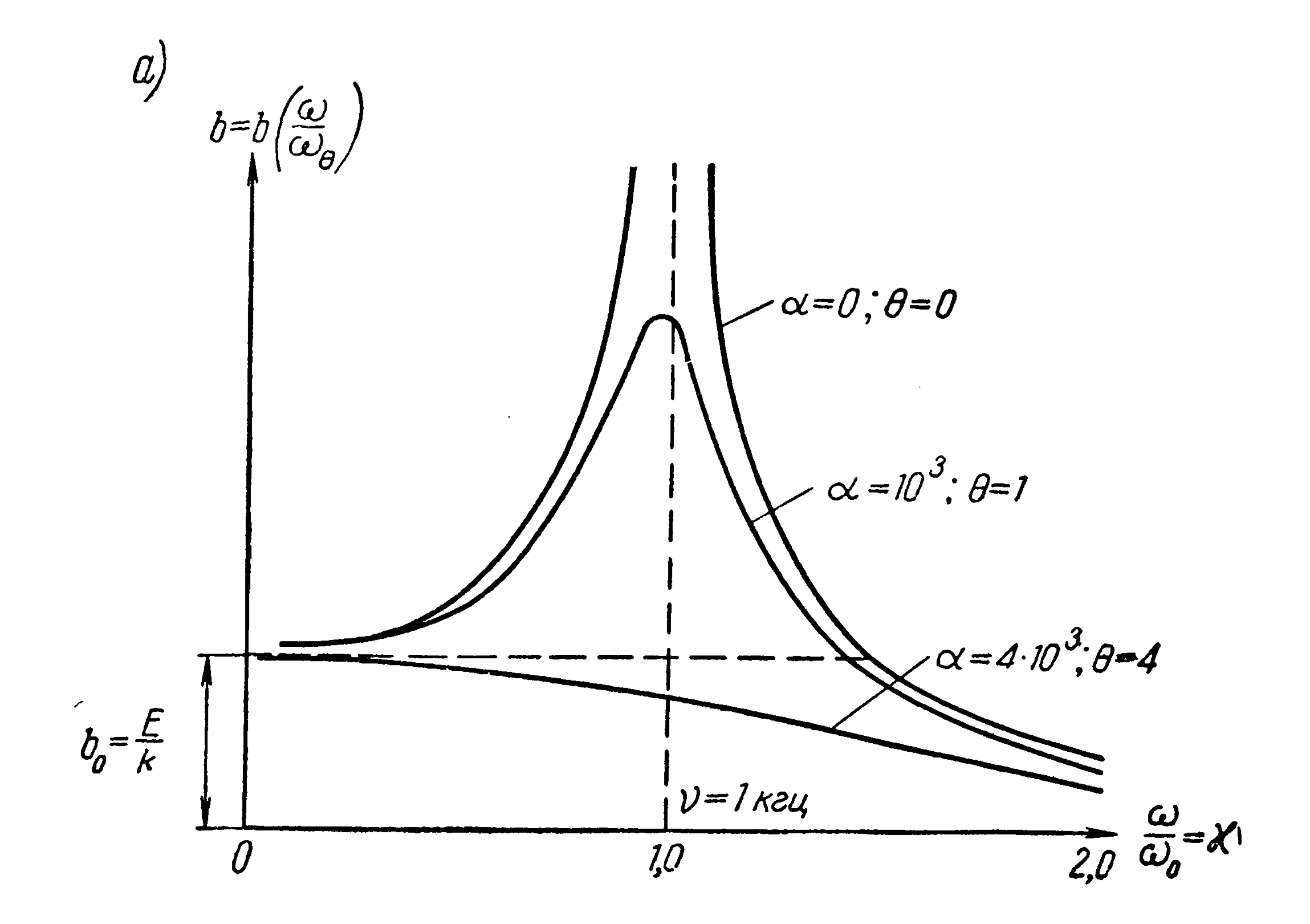
Функция $\Psi(\varkappa)$ имеет максимум при некотором значении $\varkappa = \varkappa_m$, зависящем от показателя затухания α и, значит, от ε. Приравнивая нулю производную по $\varkappa$ знаменателя в выражении (10,24), находим, что максимальная амплитуда вынужденных колебаний b_m (резонанс колебаний) наступает при отношении частоты

$$\varkappa = \varkappa_m = \frac{\omega_m}{\omega_0} \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}, \quad (10,25)$$

причем эта амплитуда, согласно уравнению (10,24), будет иметь значение

$$b_m = b_0 \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (10,26)$$

При отсутствии сопротивлений движению, т. е. при показателе, затухания $\alpha = 0$, имеем $\varepsilon = 0$, и, значит, по выражению (10,25) $\omega_m = \omega_0$,



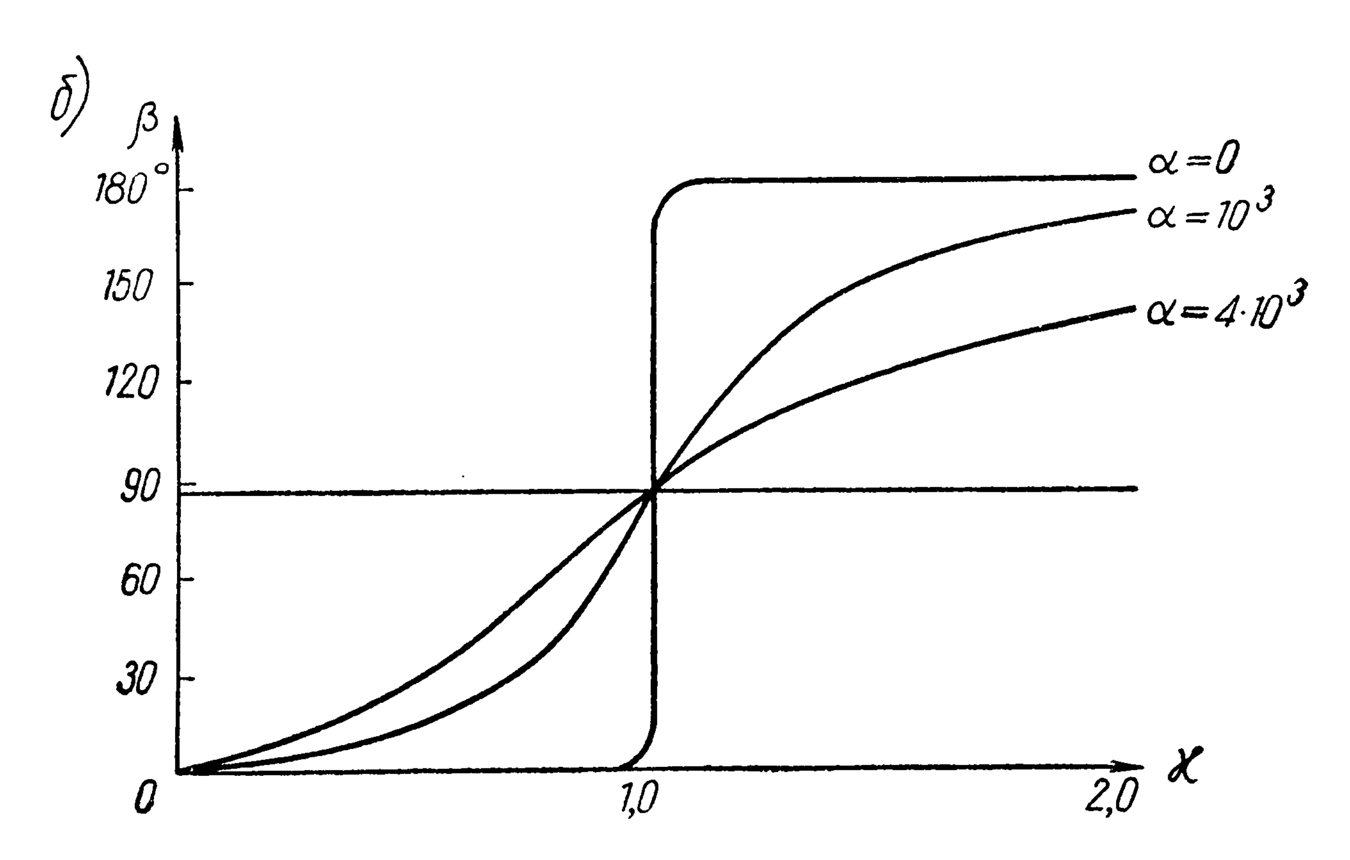


Рис. 10-9. а) Резонансные кривые при различных значениях декремента затухания Θ и б) зависимость фазы вынужденных колебаний при тех же значениях α

а $b_m = \infty$ [см. (10,26)] при любом конечном значении амплитуды вынуждающей силы F. Как видно из рис. 10-9, по мере возрастания α, а значит, и ε, резонансная частота и резонансная амплитуда убывают [см. уравнения (10,25) и (10,26)]. Так как $\varkappa$ имеет только вещественные значения, то предельное значение ε, при котором еще может наблюдаться резонанс колебаний, вытекает из условия $1-2\varepsilon^2 = 0$, т. е.

$$\varepsilon = \frac{r}{2\sqrt{mk}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7;$$

при этом из уравнения (10,26) следует, что $b_m = b_0$.

Для значений $\varkappa \to \infty$ в соответствии с выражением (10,24) имеем $b \to 0$.

На рис. 10-9 приведены резонансные кривые для различных значений логарифмического декремента затухания при условии, что собственная частота колебаний системы $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1$ *кгц*. Там же показан сдвиг фазы β вынужденных колебаний относительно гармонического возбудителя колебаний при тех же значениях показателя затухания α, вычисленный из соотношения (10,23), имеющего в новых обозначениях вид

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\varepsilon\varkappa}{1-\varkappa^2}. \qquad (10,23')$$

Как видно, при очень низких, по сравнению с ω_0, частотах, когда $\varkappa \to 0$, сдвиг фаз отсутствует ($\beta = 0$), при резонансе ($\varkappa = 1$) β достигает значения $\frac{\pi}{2}$ и при высоких частотах, когда $\varkappa \gg 1$, $\beta \to \pi$.

Рис. 10-9 показывает, что при малых затуханиях переход через резонансное значение частоты $\omega = \omega_0$ сопровождается резким изменением сдвига фазы β.

Вынужденные колебания и явление резонанса колебаний имеют важное научное и практическое значение. Механический резонанс при малых затуханиях может вызвать разрушение сооружений и зданий небольшими гармоническими усилиями. Резонанс позволяет отмечать весьма слабые проходящие колебания (сейсмография). Резонансными явлениями объясняются многие акустические, электрические, оптические и ядерные процессы.

Лекция 11

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Механические колебания возникают во всякой среде, содержащей атомы и молекулы, при нарушении в ней устойчивого равновесия. Процесс распространения колебаний в среде называется волной. В зависимости от направления деформаций относительно

линии распространения фазы колебаний различают волны продольные и поперечные. Продольные волны (например, звуковые волны в газах, в жидкостях) образуются в результате деформаций сжатия или растяжения. Поперечные волны (например, поверхностные волны в жидкости или волны изгиба струн) возникают при деформациях сдвига. Кроме упругостных волн на границах двух однородных сред, например воздуха и воды или пресной и соленой воды, возникают гравитационные волны, обусловленные полем тяготения (волны прибоя), и капиллярные волны, порождаемые смещением одной среды относительно другой (рябь на поверхности воды).

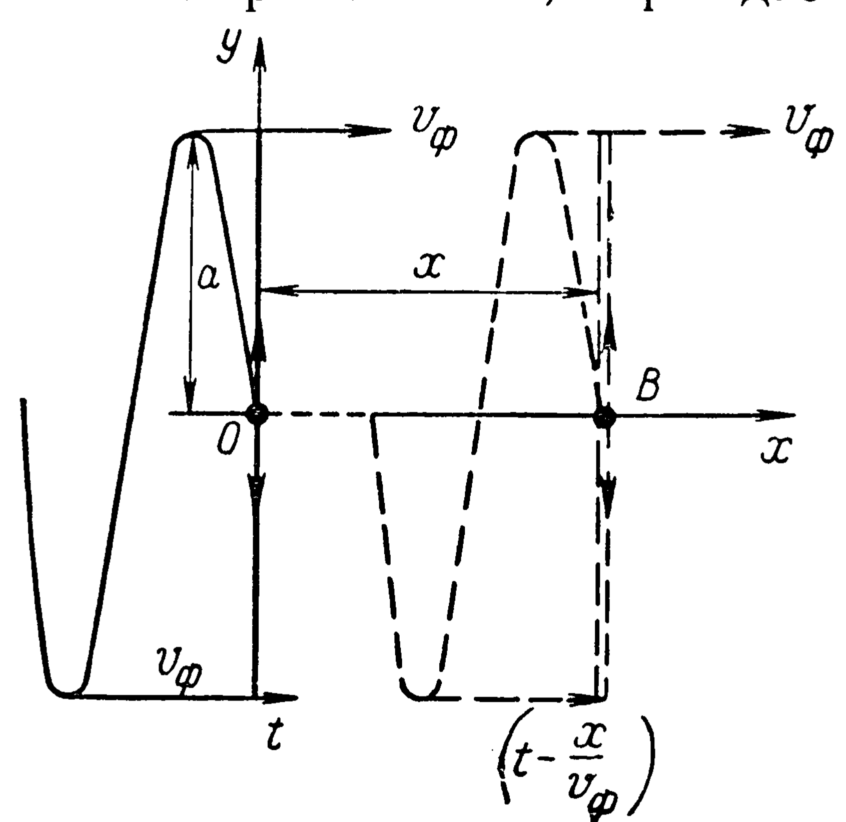


Рис. 11-1. К выводу уравнения бегущей волны (поперечная волна)

Волновой процесс характеризуется тем, что точки среды совершают только колебания относительно положения равновесия и почти не имеют поступательных перемещений вдоль распространения волны. Поступательно перемещаются фаза колебания (фазовая скорость $v_ф$) и энергия колебания (групповая скорость $v_г$), причем всегда в направлении от «источника». Таким образом, уравнение бегущей волны должно определять состояние колебания в любой точке на луче в любой заданный момент времени.

Если $y = a \cdot \sin \omega t$ будет уравнением колебаний точки O (рис. 11-1), то такое же колебание начнется в точке B несколько позднее, так что интервал времени с момента возникновения колебания в точке B составит только

$$(t - \tau) = t - \frac{x}{v_ф},$$

где x — расстояние по лучу от точки O до B, $v_ф$ — скорость перемещения фазы колебания в среде.

Для плоско-поляризованной бегущей волны (волны, содержащей колебания только в одной плоскости) уравнение колебания точки B представится в виде

$$y = a \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_ф}\right) = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) =$$
$$= a \cdot \sin 2\pi (\nu t - kx). \qquad (11,1)$$

Здесь $v_ф T = v_ф \frac{1}{\nu} = \lambda$ — длина волны, или расстояние по лучу, на которое фаза колебания перемещается за время одного периода, $k = \frac{1}{\lambda}$ — волновое число (число волн, приходящееся на единицу

длины). Таким образом, для всякого волнового процесса в любой среде справедливо соотношение

$$v_ф = \lambda \nu. \qquad (11,2)$$

Колебание как периодический процесс характеризуется частотой ν, поэтому кванты энергии гармонических периодических процессов составляют $h\nu$. В то же время фазовая скорость распространения $v_ф$ волн определяется свойствами среды. Приведем таблицу, из которой видно, что волны одной и той же частоты колебаний в различных средах имеют различную длину волны λ.

Таблица 2

Частота механических колебаний (*гц*)	Длина волны в *см* при 20° С в среде			Название области механических колебаний
	воздух	вода морская	алюминий	
$2 \cdot 10$	$1{,}7 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$3{,}2 \cdot 10^4$	Инфразвук
$2 \cdot 10^2$ $2 \cdot 10^3$ $2 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^2$ $1{,}7 \cdot 10$ $1{,}7$	$7 \cdot 10^2$ $7 \cdot 10$ $7{,}0$	$3{,}2 \cdot 10^3$ $3{,}2 \cdot 10^2$ $3{,}2 \cdot 10$	Звук
$2 \cdot 10^5$ $2 \cdot 10^6$ $2 \cdot 10^8$	$1{,}7 \cdot 10^{-1}$ $1{,}7 \cdot 10^{-2}$ $1{,}7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-1}$ $7 \cdot 10^{-2}$ $7 \cdot 10^{-4}$	$3{,}2$ $3{,}2 \cdot 10^{-1}$ $3{,}2 \cdot 10^{-3}$	Ультразвук

Примечание. 1 *гц* = 1 *сек*$^{-1}$.

Длину волны часто приводят для качественной характеристики волнового процесса, однако лишь в целях наглядности и всегда (за исключением очевидных условий) с указанием среды.

Спектр механических волн удобно разделить на три интервала: инфразвуковые волны с частотами колебаний $\nu < 20$ *гц* характерны для колебаний фундаментов зданий и уровня жидкости в крупных водоемах; звуковые волны с частотой от 20 *гц* до 20 *кгц*, воспринимаемые органами слуха человека (звуки при колебаниях механизмов и машин, звуки голоса, ударных, духовых, струнных и скрипичных музыкальных инструментов), ультразвуки с $\nu > 2 \cdot 10^4$ *гц*, возбуждаемые аэро- и гидромеханическими устройствами, пьезоэлектрическими и магнитострикционными источниками. Если учесть, что из выражения (11,1)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v_ф^2} y,$$

то уравнению бегущей волны можно придать иной вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_ф^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (11,3)$$

Это уравнение называют волновым уравнением и в общем случае пространственных волн его записывают в виде

$$\nabla^2 S - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0, \tag{11,4}$$

где $\nabla S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, а S — характеристика волнового возмущения любого вида (механического, акустического, электромагнитного, светового или квантового).

Фазовая скорость распространения механических колебаний зависит прежде всего от таких макроскопических свойств среды, как плотность и упругость материала. Однако в тех случаях, когда при колебаниях среды изменяется ее термодинамическое состояние, например при ультразвуковых волнах в газах, или когда резко изменяются граничные условия (глубокие и мелкие места в водоемах), скорость распространения зависит еще и от частоты колебаний.

Рассматривая перемещение деформации сжатия в круглом (диаметром D) упругом стержне при условии, когда $\frac{D}{\lambda} < 1$, можно легко установить зависимость фазовой скорости от свойств среды (рис. 11-2).

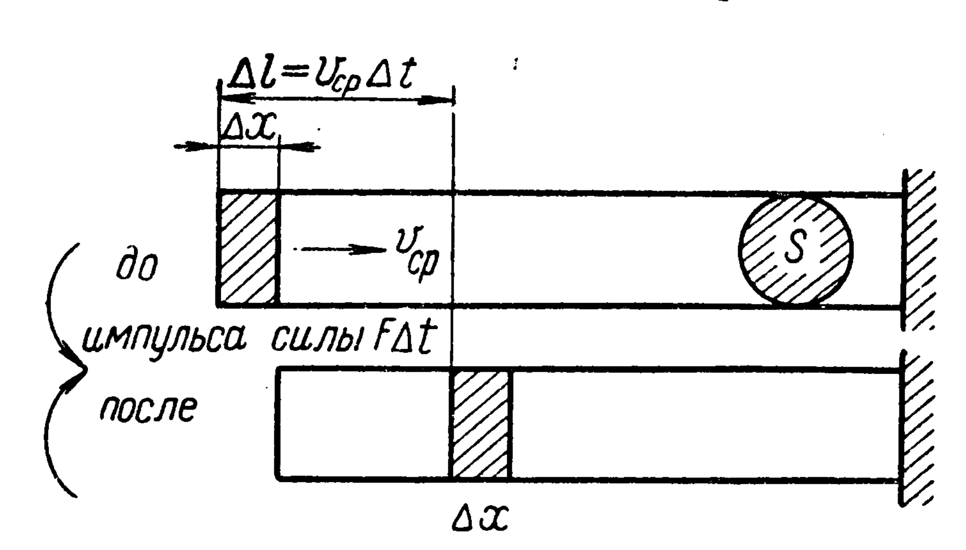


Рис. 11-2. К выводу соотношения для скорости распространения колебаний

Пусть импульс внешней силы $F \cdot \Delta t$ вызывает деформацию сжатия размером Δx. За время действия импульса деформация распространится в стержне на длину

$$\Delta l = v_{\text{ф}} \cdot \Delta t. \tag{11,5}$$

Масса сдвинутого вещества составит

$$\Delta m = S\rho \cdot v_{\text{ф}} \cdot \Delta t, \tag{11,6}$$

где S — сечение стержня, ρ — плотность деформируемого вещества в нормальном состоянии.

По закону упругой деформации Гука

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}, \tag{11,7}$$

где E — модуль упругости или модуль Юнга, а по основному закону механики

$$F \cdot \Delta t = \Delta m \frac{\Delta x}{\Delta t}, \tag{11,8}$$

так как $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — скорость деформации. После подстановки в уравнение

(11,8) значений Δm (см. 11,6) и F (см. 11,7) получим фазовую скорость

$$v_ф = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{k\rho}}, \qquad (11,9)$$

где $k = \frac{1}{E}$ — коэффициент сжатия или растяжения среды, в которой распространяются колебания. Найденный результат может быть применен к неограниченной монолитной среде с учетом поперечной деформации, которой сопровождается одностороннее сжатие или растяжение стержня.

Обозначим через σ отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной (коэффициент Пуассона), тогда фазовая скорость распространения продольных колебаний в сплошной среде

$$v_ф = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right) \frac{1}{1-2\sigma}}. \qquad (11,10)$$

Вообще говоря, $0 < \sigma < 0,5$ и для большинства металлов σ составляет $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$, так что для продольных волн в металлах

$$v_{ф,\parallel} = \left(1,1 \div 1,2\right) \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (11,11)$$

откуда $v_\parallel = (1,5 \div 60) \cdot 10^4$ *см* $\cdot$ *сек*$^{-1}$ $= (1,5 \div 60) \cdot 10^2$ *м* $\cdot$ *сек*$^{-1}$.

Для поперечных колебаний в формулу (11,9) вместо модуля Юнга следует поставить модуль сдвига $E_с$, который связан с E соотношением

$$E_с = \frac{1}{2(1+\sigma)} E,$$

что для металлов составляет $E_с = 0,4E$. Таким образом,

$$v_{ф,\perp} \approx 0,63 v_{ф,\parallel}.$$

В жидкостях возможны только продольные колебания ($\sigma = 0$), и выражение (11,10) оказывается справедливым, если учитывать изменения плотности жидкости при изменении температуры. При $T = 293°$ К

$$v_{ф,ж} \approx (10 \div 20) \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1} = (10 \div 20) \cdot 10^2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Продольные колебания газа, связанные с быстрым расширением или сжатием газа, сопровождаются изменением температуры, а следовательно, и упругости газа, поэтому выражение (11,9) принимает вид

$$v_{ф,г} = C \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \qquad (11,12)$$

где C — характеристическая величина, зависящая от атомности молекул газа и в малой степени от частоты колебаний, μ — молеку-

лярный вес газа. При $T = 293°$ К

$$v_{ф,г} \approx (3 \div 10) \cdot 10^4\ см \cdot сек^{-1} = (3 \div 10) \cdot 10^2\ м \cdot сек^{-1}.$$

Фазовая скорость звука для воздуха в спокойном состоянии будет $v_{ф,в} = 2 \cdot 10^3 \sqrt{T}$ $см \cdot сек^{-1} = 20\sqrt{T}$ $м \cdot сек^{-1}$ независимо от частоты колебаний. Скорость распространения объемных колебаний практически не зависит от их частоты, но в случае поверхностных волн такая зависимость существует.

Если над жидкой средой плотностью ρ находится другая жидкость или газообразная среда плотностью $\rho' < \rho$, то скорость распространения поверхностных, гравитационных и капиллярных волн выражается формулой

$$v_ф^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\alpha}{\rho + \rho'}, \tag{11,13}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела сред. При $\rho' \ll \rho$ (как, например, для воздуха и воды) выражение (11,13) принимает вид

$$v_ф^2 = g\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\alpha}{\rho}. \tag{11,14}$$

Здесь первое слагаемое относится к гравитационным волнам, второе — к капиллярным. Если преобладает первое слагаемое, то для мелкого места $\left(h \cong \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ при всех частотах

$$v_ф = \sqrt{gh}, \tag{11,15}$$

а для глубокого места $\left(h > \frac{\lambda}{2\pi}\right)$

$$v_ф = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{g}{2\pi\nu} = \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{11,16}$$

Если преобладают капиллярные волны ($\lambda < 2$ *см*), то

$$v_ф = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\nu\alpha}{\rho}} = \varphi'(\nu). \tag{11,17}$$

Выражения (11,16) и (11,17) определяют дисперсию (зависимость фазовой скорости от частоты колебаний) поверхностных волн, причем с возрастанием частоты колебаний фазовая скорость распространения гравитационных волн убывает, а капиллярных — возрастает.

Распространение волнового сигнала определяется не перемещением какой-либо фазы колебаний, а перемещением энергии колебаний, приносимых группой волн, испускаемых источником.

Излучение всегда содержит некоторый, может быть очень узкий, но конечный, спектральный интервал колебаний. Пакет таких волн с близкими частотами колебаний представляется волновой группой, имеющей, вообще говоря, кочующий максимум амплитуды. Этот

максимум перемещается по пакету волн от хвоста к голове или от головы к хвосту, в зависимости от знака дисперсии (рис. 11-3).

Для максимума амплитуды в пакете волн, с которым связана скорость распространения энергии сигнала, условие совпадения фаз составляющих волн имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{d\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v_ф}\right)\right]}{d\nu} = 0. \qquad (11,18)$$

Отсюда

$$t = x\,\frac{d\left(\frac{\nu}{v_ф}\right)}{d\nu}, \qquad (11,19)$$

или, поскольку $x = v_г t$, получим

$$v_г = \frac{d\nu}{d\left(\frac{\nu}{v_ф}\right)}. \qquad (11,20)$$

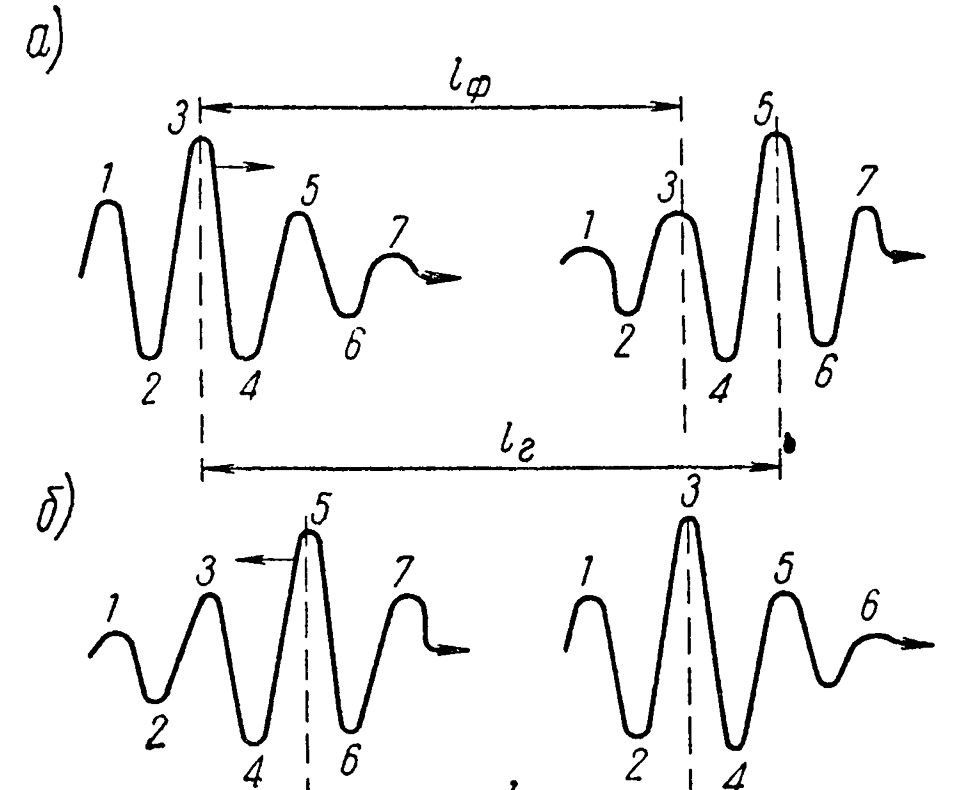


Рис. 11-3. Изображение распространения пакета плоских волн:

а) дисперсия волн в среде $\frac{dv_ф}{d\lambda} < 0\,(v_г > v_ф)$;

б) то же $\frac{dv_ф}{d\lambda} > 0\,(v_г < v_ф)$

Путем введения длины волны излучения в данной среде выражению (11,20) для групповой скорости в этой среде может быть придан иной вид.

Используя уравнение (11,2), имеем

$$v_г = \frac{d\left(\frac{v_ф}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = v_ф - \lambda\,\frac{dv_ф}{d\lambda}, \qquad (11,21)$$

поскольку $d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\cdot d\lambda$. Если $\frac{dv_ф}{d\lambda} = 0$, иначе говоря, отсутствует дисперсия (что справедливо, например, для звуковых волн в воздухе), то по формуле (11,21) $v_г = v_ф$.

Условие $v_ф \cdot d\lambda = \lambda \cdot dv_ф$ или $\frac{dv_ф}{v_ф} = \frac{d\lambda}{\lambda}$ по выражению (11,21) означает, что $v_г = 0$, т. е. образуется стоячая волна. При нормальной дисперсии, когда $\frac{dv_ф}{d\lambda} > 0$, например в случае гравитационных поверхностных волн, из уравнения (11,16) имеем $v_г < v_ф$. При аномальной дисперсии, когда $\frac{dv_ф}{d\lambda} < 0$, например в случае капиллярных волн, из выражения (11,17) очевидно, что $v_г > v_ф$. Однако при всех обстоятельствах справедливо условие: $v_г \leqslant c$, где c — предель-

ная наибольшая скорость распространения энергии (скорость электромагнитных волн в вакууме, где $v_ф = v_г = c$).

Когда источник и приемник механических колебаний имеют поступательные движения относительно промежуточной среды вдоль линии, соединяющей их, со скоростями, соответственно, $u_{ист}$ и $u_{пр}$, то частота колебаний ν', отмечаемая в приемнике, будет отличаться от частоты колебаний ν в источнике (эффект Доплера — Физо). При одинаковом

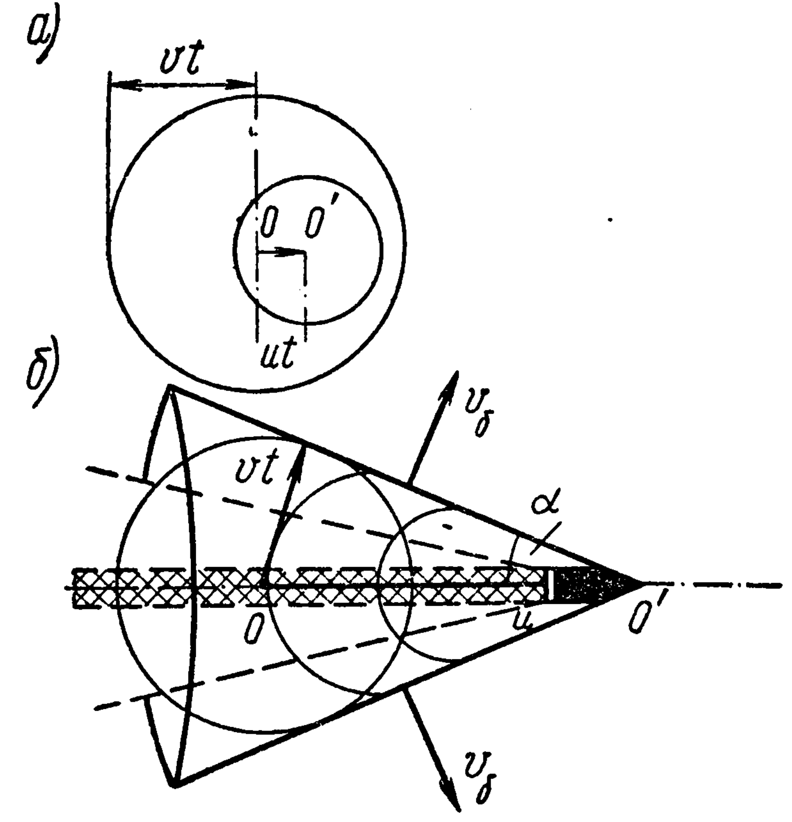


Рис. 11-5. Образование скачка плотности ударной волны при сверхзвуковой скорости источника:

а) поверхности сферических волн источника при дозвуковой скорости его перемещения на отрезок OO'; *б*) перемещение источника со сверхзвуковой скоростью (конус — «головная» баллистическая (ударная) волна сжатия; $v_б$ — скорость распространения баллистической волны)

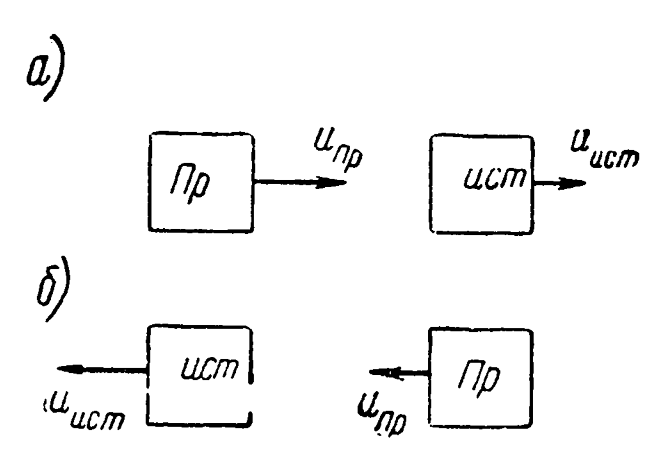


Рис. 11-4. Схема относительного перемещения источника и приемника волн при возникновении эффекта Допплера:

а) сближение; частота принимаемых колебаний ν' больше частоты ν при относительном покое ($\nu' > \nu$);

б) удаление ($\nu' < \nu$)

направлении этих скоростей (рис. 11-4) от приемника к источнику имеем

$$\nu' = \nu \frac{v + u_{пр}}{v + u_{ист}} = \nu \frac{1 + \frac{u_{пр}}{v}}{1 + \frac{u_{ист}}{v}}, \tag{11,22}$$

где v — скорость распространения волнового сигнала частоты ν в среде, неподвижной относительно источника колебаний. Если $u_{пр} = u_{ист}$, то $\nu = \nu'$ и, следовательно, отсутствует изменение частоты, или эффект Доплера.

При сближении источника с приемником $u_{пр} > u_{ист}$ и, следовательно, $\nu' > \nu$; при удалении, наоборот, $u_{пр} < u_{ист}$ и значит $\nu' < \nu$ (см. 11,22).

Эффект Доплера в акустике хорошо известен по изменению высоты тона звука свистка паровоза при встрече поездов. В некоторых случаях (ружейные пули, артиллерийские снаряды, реактивные самолеты) скорость движения источника звука превышает

скорость его распространения в среде, что следует из уравнения (11,2), и тогда, кроме звуковой волны, в среде образуется ударная, или так называемая «головная», баллистическая волна, возникающая из-за скачка уплотнения газа (рис. 11-5).

Если известна скорость распространения звука v, то по углу раствора α конуса баллистической волны может быть найдена скорость движения источника u:

$$u = v \cdot \sin\alpha. \tag{11,23}$$

Лекция 12

ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ

Действующий излучатель механических волн образует в среде некоторое волновое поле (обычно рассматривается звуковое поле). Характеристикой волнового поля является интенсивность излучения I (интенсивность звука), мерой которой служит энергия W, проникающая ежесекундно сквозь единицу поверхности S, расположенную нормально к вектору скорости v распространения излучения. Если качество и интенсивность излучения не меняются во времени, то

$$I = \frac{W}{St} = \frac{W}{vSt}v = \frac{Wv}{V} = w_0 v, \tag{12,1}$$

где $w_0 = \frac{W}{V}$ — объемная плотность энергии излучения. Таким образом, интенсивность излучения представляет собой поток энергии излучения, или мощность излучения сквозь единицу площади поперечного сечения пучка. В случае полного поглощения излучения поверхностным слоем h вещества, на которое падает волна, объемная плотность поглощенной энергии

$$w = \frac{I}{V} = \frac{W}{Sh} = \frac{F}{S} = p,$$

откуда

$$I = pv. \tag{12,2}$$

Здесь p — среднее давление, испытываемое поверхностным слоем среды, поглощающей энергию волн. В случае полного отражения очевидно, что

$$I = 2pv. \tag{12,2'}$$

Объемную плотность звуковой энергии можно выразить через параметры колебаний: плотность среды ρ и максимальную колебательную скорость $\dot{y}_m$, так что

$$W = \frac{1}{2}\rho\dot{y}_m^2. \tag{12,3}$$

По закону сохранения импульса

$$F_а \cdot \Delta t = m\dot{y}_m, \quad \text{или} \quad p_а = \rho v \dot{y}_m, \tag{12,4}$$

значит

$$I = wv = \frac{p_а^2}{2\rho v} = \frac{1}{2}\frac{p_а^2}{R_а}. \tag{12,5}$$

Здесь $p_а$ — амплитудное избыточное колебательное (акустическое) давление в волне, $R_а = \rho v$ — величина, называемая акустическим, или волновым, сопротивлением среды. Следовательно, интенсивность излучения прямо пропорциональна квадрату амплитуды колебательной скорости $\dot{y}_m$, или квадрату акустического давления $p_а$. Из выражений (12,2) и (12,3) следует, что в случае изотермического распространения звука в воздухе среднее давление p, оказываемое звуковыми волнами на полностью отражающую стенку, связано с амплитудным акустическим давлением $p_а$ соотношением

$$p = \frac{p_а^2}{v^2 \rho}. \tag{12,6}$$

Интенсивность звуковых излучений изменяется в очень широких границах: от порогового значения $I_1 = 10^{-9}\ \frac{эрг}{см^2 \cdot сек} = 10^{-12}\ дж/м^2 \cdot сек$ (порог слышимости) до $I_2 = 10^5$ СГС $= 10^2$ *дж/м² · сек* (ощущение боли), т. е. в диапазоне $\frac{I_2}{I_1} = 10^{14}$. Это соответствует перепаду акустического давления от $p_{а1} = 10^{-4}$ *бар* $= 10$ *н/м²* до $p_{а2} = 10^3$ *бар* $= 10^8$ *н/м²*, или отношению $\frac{p_{а2}}{p_{а1}} = 10^7$. Интенсивность звука I_1, соответствующая порогу слышимости для колебаний частотой $\nu = 1$ *кгц*, принимается в акустике за нулевой уровень громкости звука B. Громкость звука B определяется при этом согласно физиологическому закону восприятия Вебера—Фехнера по формуле:

$$B = \lg\frac{I}{I_1}\ б = 10\lg\frac{I}{I_1}\ дб.$$

Уровень громкости речи при таком отсчете соответствует (50÷60) *дб* $\left(\frac{I_р}{I_1} = 10^5 \div 10^6\right)$, а громкость звука при работе отбойного молотка — 100 *дб* (рис. 12-1).

Ослабление интенсивности звукового излучения происходит вследствие геометрии расходящегося пучка, вследствие поглощения энергии колебаний из-за вязкости и теплопроводности колеблющейся среды и вследствие рассеяния излучения (отражения и преломления волн) из-за конвекций, градиентов температуры, турбулентности среды и зерен неоднородности в ней. Для точечного источника излучения, находящегося в однородной среде, геометрический фактор определяет ослабление интенсивности излучения обратно пропорционально квадрату расстояния. В отсутствие по-

глощения и рассеяния очевидно, что $N_1 = N_2$, или $I_1S_1 = I_2S_2$; следовательно,

$$I_2 = I_1 \frac{S_1}{S_2} = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \qquad (12,7)$$

Геометрический фактор при параллельном пучке излучения отпадает, и все ослабление определяется поглощением и рассеянием излучения. Обозначая линейные коэффициенты ослабления, поглощения и рассеяния, соответственно, через μ, τ и σ, имеем $\mu = \tau + \sigma$. Для слоя среды толщиной dx изменение интенсивности составит $dI = -\mu I \cdot dx$, что после интегрирования приведет к результату

$$I_x = I_0 e^{-\mu x} = I_0 \exp(-\mu x), \qquad (12,8)$$

где I_0 — интенсивность излучения под поверхностью поглощающей среды ($x = 0$). Линейный коэффициент поглощения τ, т. е. коэффициент, определяющий преобразование энергии звукового излучения в другой вид, зависит от качества среды (вязкости η, упругости E, плотности ρ) и частоты колебаний ν (рис. 12-2):

$$\tau = k\nu^2 \left(\frac{E}{\rho}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\eta}{\rho}. \qquad (12,9)$$

Для комнатного воздуха при обычной влажности (40%÷80%) имеем

$$\tau \approx 2 \cdot 10^{-13}\nu^2 \ \textit{см}^{-1} = 2 \cdot 10^{-11}\nu^2 \ \textit{м}^{-1}.$$

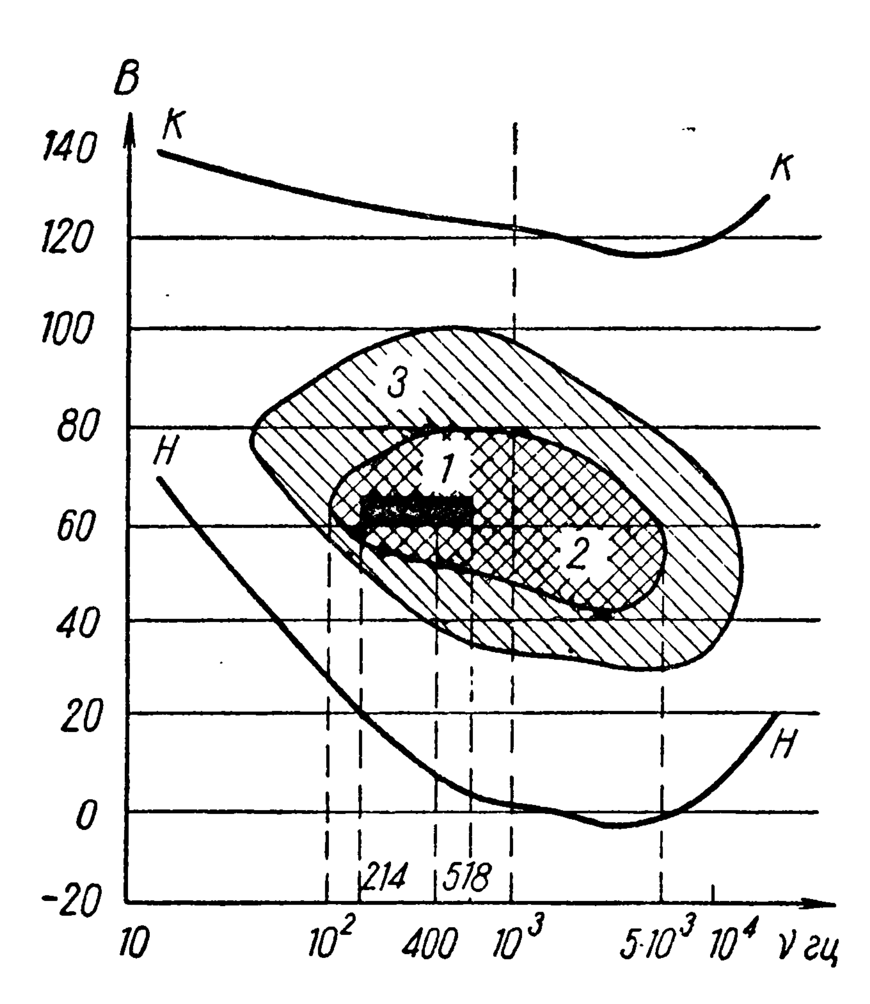


Рис. 12-1. Диаграмма областей восприятия механических колебаний органом слуха человека (уровни громкости B устанавливаются по частоте $\nu = 1$ *кгц*):

H H — порог слышимости; *KK* — предел восприятия звука; *1* — область нормальной громкости звучания натуральной музыкальной гаммы ($\nu_{\text{ля}} = 440$ *гц* при $t = 20°$ — международный стандарт); *2* — область нормального звучания речи; *3* — область нормального звучания музыкальных инструментов

Однако из-за влажности резко изменяется линейный коэффициент поглощения звука (рис. 12-3). Максимальное значение τ при всех частотах колебаний приходится на относительную влажность воздуха порядка 15÷20%.

Как видно из уравнения (12,9), особенно сильно поглощаются средой волны высокой частоты колебаний (ультразвуковые волны), вследствие чего они производят заметные эффекты в поглощающей среде, но из выражения (12,8) очевидно, что такие волны мало пригодны для целей сигнализации. Однако поглощение ультразвуковых волн в воде значительно меньше, чем в воздухе, из-за большей ско-

рости их распространения (см. 11,11) и малого значения кинематической вязкости $\frac{\eta}{\rho}$ воды $\left(\frac{\eta}{\rho}\right.$ воды примерно в 1000 раз меньше по сравнению с воздухом).

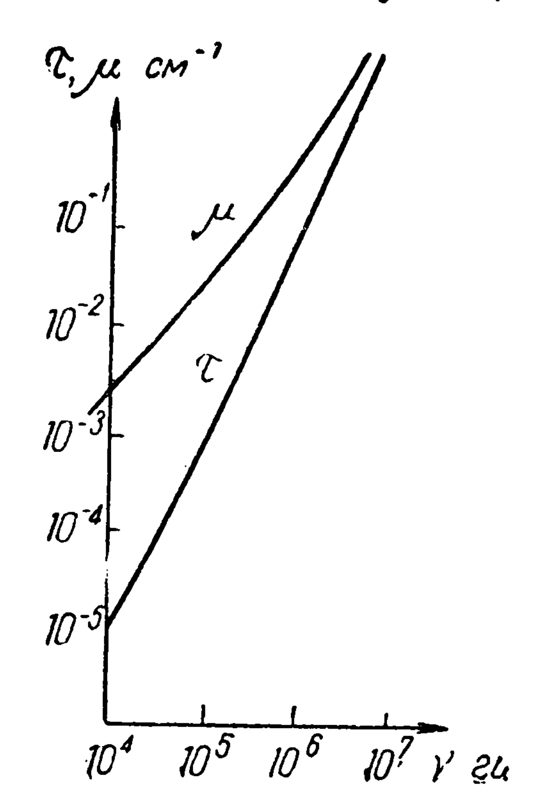


Рис. 12-2. Зависимость линейных коэффициентов ослабления (μ) и поглощения (τ) звука и ультразвука в воздухе от частоты колебаний

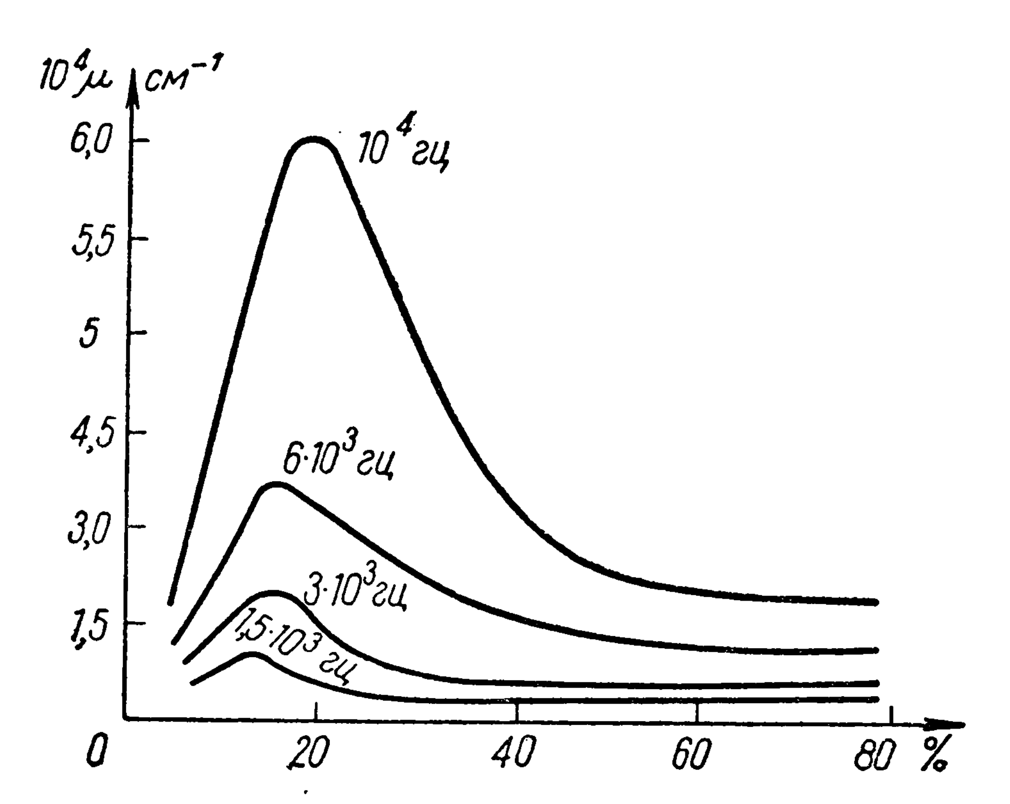


Рис. 12-3. Зависимость линейного коэффициента ослабления звука в спокойном воздухе от относительной влажности воздуха для различных частот колебаний

Современные ультразвуковые генераторные установки допускают возбуждение направленных пучков излучений с высокими частотами колебаний (до 10^9 *гц*) и достаточно большими интенсивностями (до $I = 100$ *вт/см*^{2} $=$ $= 10^6$ *вт/м*^{2}) при $\nu = 30$ *кгц*.

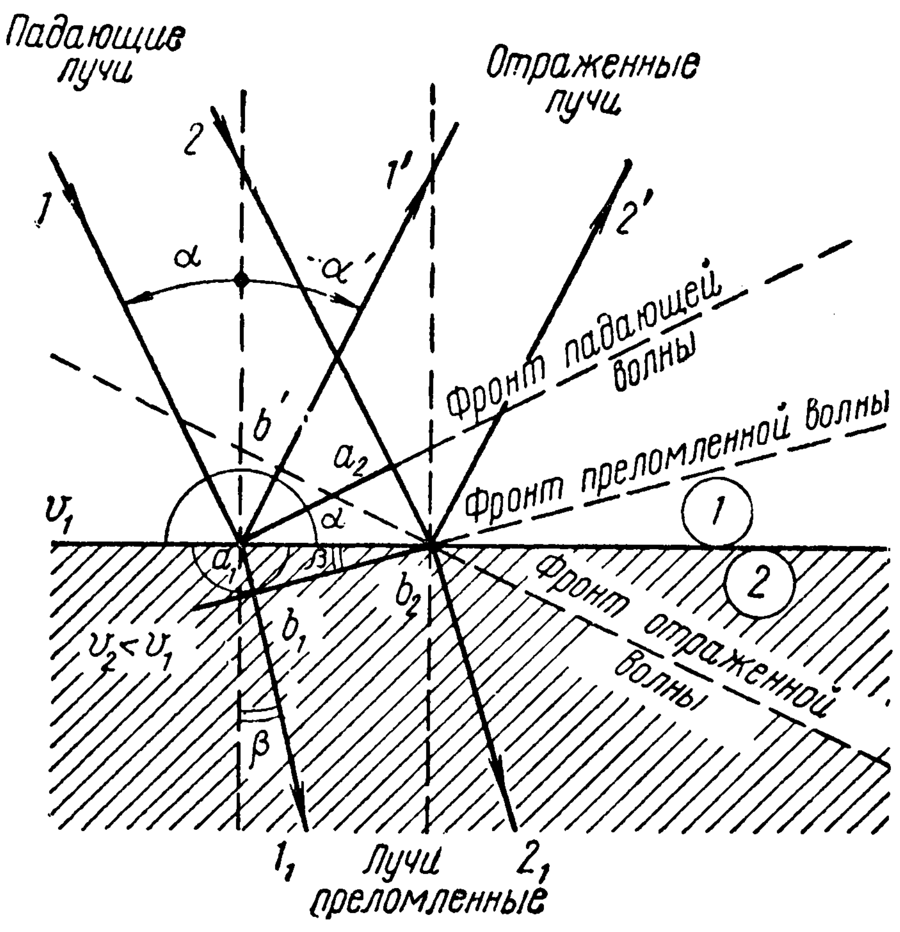


Рис. 12-4. Построение фронта отраженной и преломленной волн по Гюйгенсу

Помимо молекулярного поглощения, на границе двух сред звуковые волны претерпевают отражение и преломление. В соответствии с принципом Гюйгенса, каждую точку колеблющейся среды можно рассматривать как самостоятельный источник сферических волн. При наложении друг на друга эти волны в каждый данный момент создают некоторую картину волнового поля. На основе этого принципа может быть указан фронт волны, или волновая поверхность, т. е. геометрическое место точек, имеющих одинаковую фазу колебаний, и вместе с тем

выяснены закономерности изотропного отражения и преломления волн на границе двух сред с различными скоростями распространения в них колебаний (рис. 12-4). Как видно, простое построение фронта волны с учетом изменения скорости во второй среде приводит к известным законам отражения волн

$$a_2b_2 = a_1b', \text{ или } |\angle\alpha| = |\angle\alpha'|$$

и преломления волн

$$n = \frac{v_{ф\,1}}{v_{ф\,2}} = \frac{a_2b_2}{a_1b_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

На границе раздела сред, согласно закону сохранения энергии, должно соблюдаться условие

$$I = I_{отр} + I_{пр}. \tag{12,10}$$

Так как интенсивность излучения I, согласно уравнению (12,5), пропорциональна квадрату амплитуды акустической скорости $\dot{y}_m^2$ или квадрату амплитуды акустического давления $p_а^2$, то

$$\begin{aligned} \dot{y}_m^2 &= (\dot{y}_m)_{отр}^2 + (\dot{y}_m)_{пр}^2; \\ p_а^2 &= (p_а)_{отр}^2 + (p_а)_{пр}^2. \end{aligned} \tag{12,11}$$

Равенства (12,11) могут быть выражены в следующем виде (индекс m для краткости записи отброшен):

$$\left.\begin{aligned} (\dot{y} - \dot{y}_{отр})(\dot{y} + \dot{y}_{отр}) &= \dot{y}_{пр}^2, \\ [p_а + (p_а)_{отр}][p_а - (p_а)_{отр}] &= (p_а)_{пр}^2. \end{aligned}\right\} \tag{12,12}$$

Максимум акустического давления по уравнению (12,4) составляет $p_а = \rho v\dot{y}$, так что

$$(\dot{y} + \dot{y}_{отр})(\dot{y} - \dot{y}_{отр})\rho_1^2 v_1^2 = \dot{y}_{пр}^2\rho_2^2 v_2^2 = (p_а)_{пр}^2. \tag{12,12'}$$

При нормальном падении волны и при условии, что $\rho_1 v_1 \neq \rho_2 v_2$, соотношения (12,12) будут совместными лишь в случае, когда при $\rho_1 v_1 > \rho_2 v_2$

$$\dot{y} + \dot{y}_{отр} = \dot{y}_{пр} \quad \text{и} \quad (\dot{y} - \dot{y}_{отр})\rho_1 v_1 = \dot{y}_{пр}\rho_2 v_2,$$

а при $\rho_1 v_1 < \rho_2 v_2$

$$\dot{y} - \dot{y}_{отр} = \dot{y}_{пр} \quad \text{и} \quad (\dot{y} + \dot{y}_{отр})\rho_1 v_1 = \dot{y}_{пр}\rho_2 v_2. \tag{12,13}$$

Совместно решая уравнения (12,13), получим выражение коэффициента отражения как отношения амплитуд скоростей отраженной и падающей волн

$$r = \left|\frac{\dot{y}_{отр}}{\dot{y}}\right| = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}. \tag{12,14}$$

Волновые сопротивления различных сред $R_а = \rho v$ весьма разнообразны. Например, для воздуха, воды и стали они составляют

соответственно 42; $1{,}5 \cdot 10^5$ и $4{,}2 \cdot 10^6$ (СГС). Коэффициент отражения по интенсивности излучения очевидно будет равен $\frac{I_{\text{отр}}}{I} = r^2$ и на границе воздух — вода или воздух — металл будет близок к единице, поскольку $\rho_2 v_2 \gg \rho_1 v_1$.

Интенсивность излучения, проникающего во вторую среду, при нормальном падении волны, согласно уравнению (12,10), составит

$$I_{\text{пр}} = I(1 - r^2) = I \frac{4R_{\text{а}\,1} R_{\text{а}\,2}}{R_{\text{а}\,1} + R_{\text{а}\,2}}. \tag{12,15}$$

При наклонном падении волны (с поперечными и продольными колебаниями) на поверхности соприкосновения двух твердых тел происходит разделение этой волны на две в связи с тем, что скорость распространения продольных и поперечных колебаний различна (см. 11,9).

Распространение механических колебаний в среде сопровождается поглощением энергии этих колебаний, а также рассеянием (изменением направления распространения) колебательной энергии на всякого рода неоднородностях вещества (на вихрях в газах и жидкостях, на дисперсных примесях и на зернах поликристаллических тел). Следует рассмотреть подобные явления при различных по качеству излучениях.

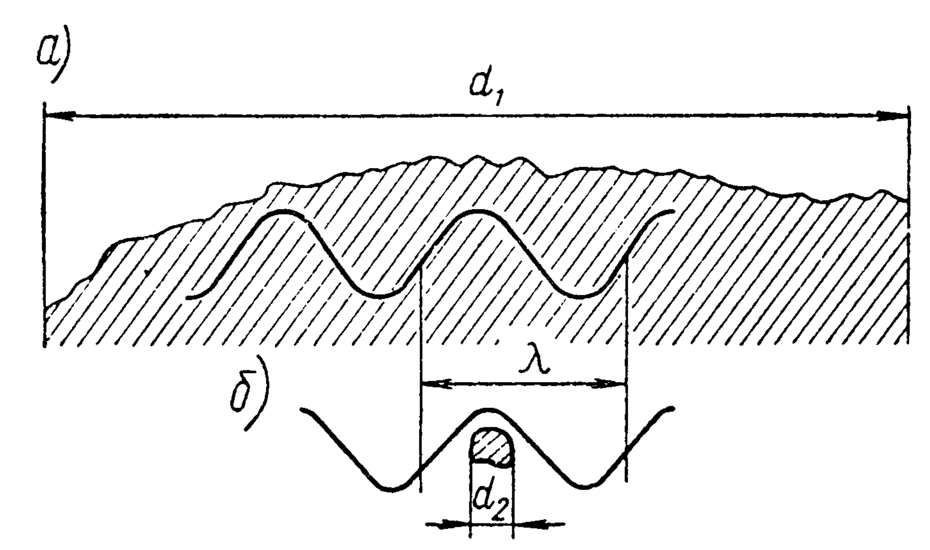


Рис. 12-5. Характерные для поглощения и рассеяния механических волн соотношения между линейными размерами тела и длиной волны:

а) $\lambda \ll d_1$; б) $\lambda \gg d_2$.

Если размеры неоднородностей d значительно превосходят длину волны λ механического излучения в данной среде, т. е. $\frac{d}{\lambda} \gg 1$ (рис. 12-5, *а*), то ослабление интенсивности происходит, главным образом, за счет поглощения, как и в случае однородной среды. Основное значение при этом имеет вязкость компонент вещества, в то время как явления на границах сред играют второстепенную роль. При обратном соотношении между размерами неоднородностей и длиной волны $\left(\frac{d}{\lambda} \ll 1\right)$ (рис. 12-5, *б*) акустическое давление на границе неоднородности можно считать одинаковым, и существенное значение приобретают переходные процессы на поверхностях раздела неоднородностей, т. е. рассеяние.

В промежуточных случаях, когда $\frac{d}{\lambda} \lessgtr 1$, оба процесса (поглощение и рассеяние) имеют примерно одинаковое значение, поскольку в поглощении энергии играет роль не только вязкость веществ компонент неоднородной среды, но и внешнее трение между зернами

неоднородностей. Таким образом, массовый коэффициент ослабления механического излучения в среде может быть представлен в виде

$$\frac{\mu}{\rho} = \alpha\nu^2 + \beta, \tag{12,16}$$

где α — эффективное значение фактора, характеризующего упруговязкие свойства вещества, $\beta = \frac{d}{\lambda}$ — специфический фактор рассеяния, зависящий как от частоты колебаний, так и от размерного спектра имеющихся неоднородностей. При наличии многократных отражений в закрытых помещениях для характеристики их акустических свойств (гулкостей) рассматривают время убывания интенсивности звуков (реверберацию) до 10^{-6} ее первоначального значения. Оптимальное время реверберации зависит от размеров помещения ($\sim V^{\frac{1}{3}}$). Для пустых концертных зал это время имеет значение от $\tau = 2$ *сек* до $\tau = 3{,}5$ *сек*, а для заполненных — от $\tau = 1{,}3$ *сек* до $\tau = 2$ *сек*.

В жилых помещениях при разговорной речи $0{,}7$ *сек* $< \tau <$ $1{,}5$ *сек*. Различные архитектурные детали и материалы значительно изменяют время реверберации, так как

$$\frac{I_{\text{погл}}}{I_{\text{пад}}} = 1 - \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}.$$

Техническое применение механических излучений очень велико. Звуковой диапазон частот используется для всевозможной сигнализации и создания музыкальных произведений. Звуковые и ультразвуковые колебания применяются также в промышленности и на транспорте (локация, дефектоскопия, контроль изделий; воздействие на вещества и механизмы) и для интенсификации технологических процессов (дегазация жидкостей, кавитация, эмульсирование, очистка поверхностей, пайка, уменьшение трения скольжения).

Лекция 13

СТОЛКНОВЕНИЯ И ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Механические перемещения сопровождаются явлениями столкновения тел, т. е. такими кратковременными взаимодействиями тел, при которых происходят как деформация, так и перемена направления их движения; примерами являются упругие и неупругие соударения частиц. Однако механические взаимодействия возникают и в тех случаях, когда деформацию претерпевает не вещество тел, а те силовые поля, которые им свойственны, например, при взаимодействиях электрических зарядов, проводников с токами, проводника с током и магнитного поля. Такие немеханические взаимодействия, сопровождающиеся механическими смещениями тел или изменениями их движений, называют пондеромоторными.

Для явлений, которые протекают в среде электрически нейтральных молекул, существенное значение имеют упругие столкновения или соударения тел. При рассмотрении таких столкновений необходимы сведения о форме, массе покоя, скорости движения и упругих свойствах взаимодействующих тел. Наиболее важно изучить случай удара шаров, поскольку пространственно-симметричная форма соударяющихся тел для молекулярной среды соответствует средне-статистическим свойствам совокупности нейтральных молекул, из которых состоит вещество. Простейшим видом свободного соударения шаров является центральный удар, при котором шары имеют только поступательное движение и их скорости направлены по линии, соединяющей центры шаров.

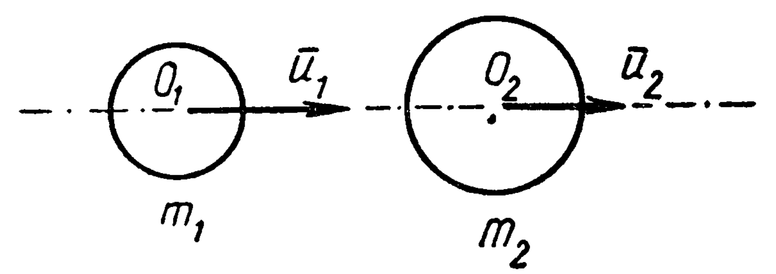


Рис. 13-1. Центральное соударение шаров

На рис. 13-1 показано поступательное движение шаров перед их центральным соударением (вращение шаров отсутствует). Если удар неупругий, то рассматриваемая механическая система является диссипативной, и из трех механических законов сохранения (импульса, механической энергии и момента количества движения) применим лишь один закон сохранения импульса, по которому $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$, или для центрального удара

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \tag{13,1}$$

Отсюда скорость тела, получившегося после слияния шаров,

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{13,2}$$

Из выражения (13,1) следует, что при движении шаров навстречу друг другу и при равенстве их первоначальных импульсов скорость образовавшегося тела будет равна нулю ($u = 0$) и, значит, в этом случае вся кинетическая энергия поступательного движения шаров путем совершения работы по раздвижению молекул при слиянии шаров преобразуется в энергию беспорядочного движения молекул вещества. При всех других сочетаниях начальных импульсов в тепло будет преобразовываться только часть кинетической энергии поступательного движения шаров, так что при неупругом столкновении кинетическая энергия шаров до удара всегда больше, чем после их слияния. При $v \ll c$ имеем

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) > \frac{1}{2}(m_1 + m_2) u^2.$$

Однако изменение энергии направленного механического движения не означает нарушения общего закона сохранения и преобразования энергии, сформулированного Ломоносовым в 1761 г. Полная энергия рассматриваемой изолированной системы, т. е. сумма всех

видов энергии, включая и собственную энергию масс покоя всех частиц до и после столкновения, остается неизменной.

В случае упругого соударения шаров справедливы оба механических закона сохранения для поступательного движения (вращение шаров при центральном ударе отсутствует): закон сохранения импульса, который для центрального удара может быть записан в виде

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{13,3}$$

и закон сохранения кинетической энергии поступательного движения

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \tag{13,4}$$

Совместное решение уравнений (13,3) и (13,4) приводит к выражениям для скоростей шаров после удара:

$$u_1 = \frac{v_1 (m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \tag{13,5}$$

$$u_2 = \frac{v_2 (m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Следует отметить два важных частных случая: 1) соударение одинаковых шаров, когда $m_1 = m_2$, так что по формуле (13,5) $u_2 = v_1$ и $u_1 = v_2$, т. е. шары обмениваются скоростями; 2) удар шара о стенку, когда $m_1 \to \infty$ при $v_1 = 0$ и, следовательно, $u_2 = -v_2$ (см. 13,5), так что при нормальном ударе о стенку упругий шар отскочит от нее со скоростью, равной начальной, но противоположной ей.

Обмен кинетическими энергиями, происходящий при упругих центральных ударах шаров, зависит от отношения масс шаров. Для простоты положим $v_1 = 0$. Тогда $W = W_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ будет кинетической энергией всей системы. Изменение кинетической энергии первого шара (шара-мишени), происшедшее в результате упругого столкновения, очевидно будет $\Delta W_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$, что, согласно формуле (13,5), приводит к результату

$$\Delta W_1 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} W = W \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right)^2 \right] \tag{13,6}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta W_1}{W} = \varphi \left(\frac{m_2}{m_1} \right). \tag{13,7}$$

Отсюда видно, что доля передаваемой энергии при центральном ударе зависит от соотношения между массами ударяющего шара (m_2) и шара-мишени (m_1). При условии, что $m_2 = m_1$, из уравнения (13,6) имеем $\Delta W_1 = W = W_2$, т. е. между шарами имеет место взаимный обмен кинетическими энергиями; при $m_1 = \infty$, т. е. при нормальном

ударе шара об упругую стенку, $\Delta W_1 = 0$, и передача энергии отсутствует.

Уместно разобрать косой удар как частный случай столкновения шаров, движущихся поступательно. Положим, как и раньше, $m_1 = m_2$ и $v_1 = 0$, тогда по выражениям (13,4) и (13,1) при любом угле встречи $\left(0 < \Theta < \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 13-2) имеем соответственно:

$$v_2^2 = u_1^2 + u_2^2,$$
$$\vec{v_2} = \vec{u_1} + \vec{u_2}. \qquad (13,8)$$

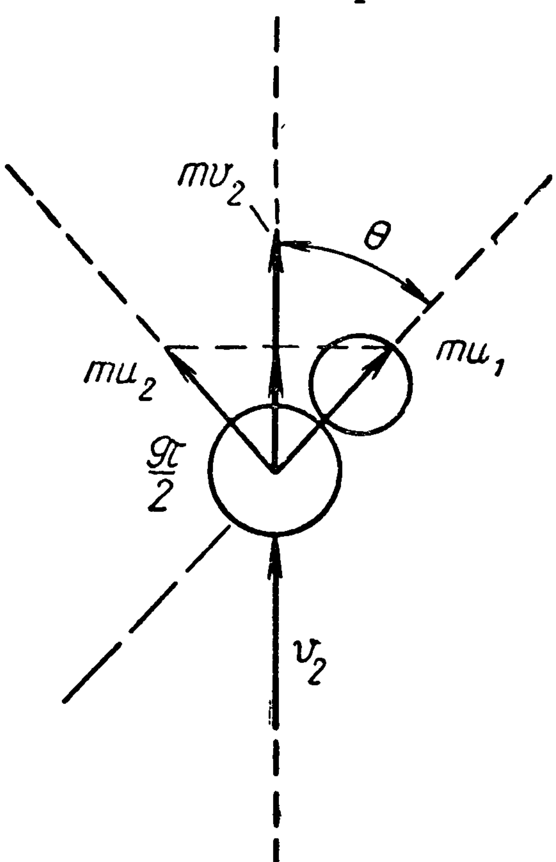


Рис. 13-2. Косой удар упругих шаров с одинаковыми массами ($\Theta \approx 45°$)

Таким образом, при упомянутых условиях $\left(\frac{\dot{x}}{c} \ll 1\right)$ косого соударения упругие невращающиеся шары всегда разлетаются под прямым углом, причем

$$\Theta = \arcsin \frac{u_2}{v_2} = \arccos \frac{u_1}{v_2}. \qquad (13,9)$$

При рассмотрении косого упругого удара шара о стенку-мишень ($m_1 = \infty$ и $v_2 = 0$) скорость ударяющегося шара можно разложить на составляющие, из которых, согласно формуле (13,5), нормальная составляющая изменит знак на обратный, а две другие составляющие, параллельные стенке-мишени, останутся без изменения (рис. 13-3).

Отсюда следует, что при косом упругом ударе шара о стенку величина скорости движения шара не изменяется, а ее новое направление будет определяться по закону правильного отражения (угол падения равен углу отражения).

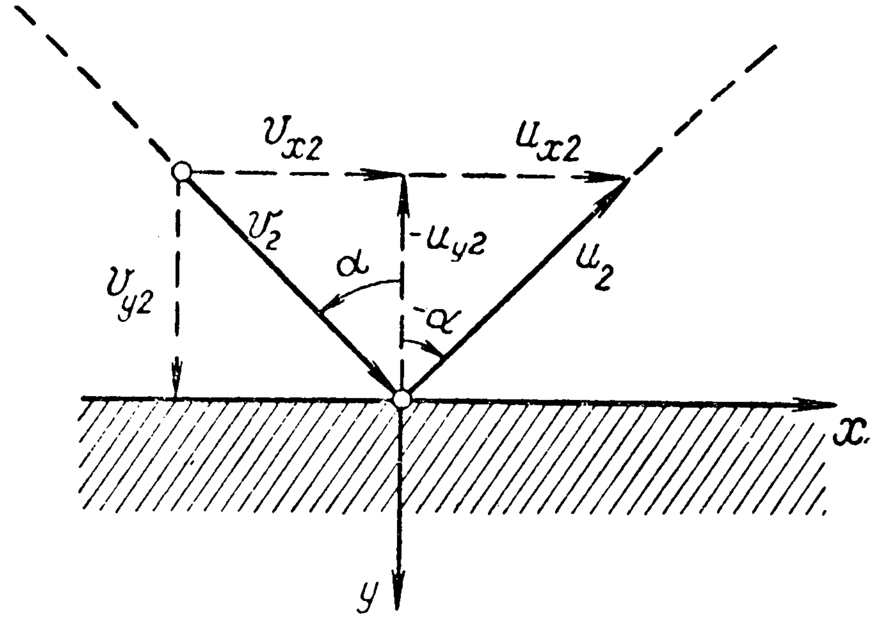


Рис. 13-3. Косой упругий удар шара о стенку

При пондеромоторном взаимодействии частиц вещества важно рассмотреть случай затормаживания быстрых частиц (атомов, ядер, нейтронов и электронов), когда они движутся в среде, содержащей атомы. Нейтроны ($m_2 = 1$) высоких энергий ($\bar{E}_n \approx 2$ *Мэв* $= 3{,}2 \cdot 10^{-6}$ *эрг*), согласно выражению (13,6), сообщают первично выбитым атомам с атомным весом A ($m_1 = A$) кинетическую энергию

$$E_A = \frac{4}{A} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{A}\right)^2}.$$

Выбитый атом массой M, движущийся далее с большой энергией сквозь вещество, замедляется в результате многочисленных неупругих и упругих столкновений. Вначале более вероятно неупругое столкновение, при котором движущийся атом теряет электрон (m_0) оболочки и превращается в положительно заряженную частицу—ион, которая и продолжает движение в среде. При возможных упругих столкновениях движущиеся атомы пондеромоторно взаимодействуют с атомами вещества, передавая им часть кинетической энергии без расходования ее (без потерь) на ионизацию и возбуждение атома-мишени.

При достаточно больших энергиях E движущегося атома M, когда скорость его поступательного движения превышает скорость орбитального электрона атома-мишени, т. е. при энергиях, значительно превышающих так называемую предельную энергию ионизации движущегося атома $E_i (E \gg E_i)$, более вероятным оказываются неупругие взаимодействия с преобладанием ионизационных потерь над передачей энергии упругими взаимодействиями; при $E < E_i$, наоборот, преобладают упругие столкновения. Типичное значение предельной энергии ионизации как для изоляторов, так и для металлов составляет $E_i = \frac{M}{2m_0}$ (*эв*) $= \frac{1840}{2} \cdot A$ и, значит, если эта энергия выражена в килоэлектронвольтах, то она будет численно равна атомному весу движущегося атома, так что, например, для H $E_i \approx 1$ *кэв*, для D $E_i \approx 2$ *кэв*, для Cu $E_i \approx 65$ *кэв*.

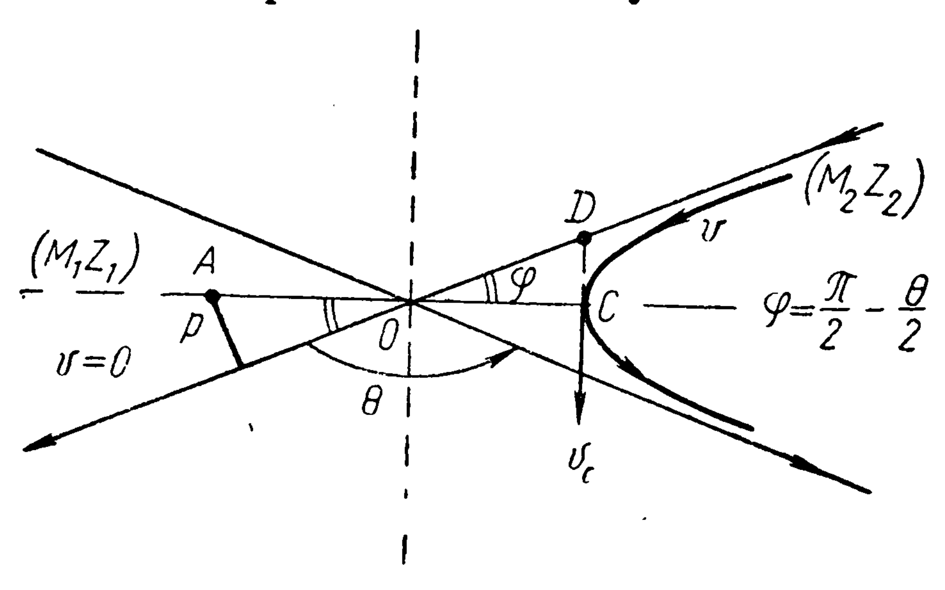


Рис. 13-4. Пондеромоторное взаимодействие движущейся заряженной частицы (M_2, Z_2) с ядром атома A (M_1, Z_1)

p — параметр удара, C — вершина гиперболы; $AO = OD$, Θ — угол отклонения частицы (резерфордовское рассеяние)

В результате упругих столкновений движущаяся в твердом теле заряженная частица может вызвать смещение атома из узла кристаллической решетки. При столкновении с атомом-мишенью частица в свою очередь отклоняется от направления своего движения, причем тем больше, чем меньше ее кинетическая энергия и чем меньше параметр p удара. Под параметром удара подразумевается расстояние от ядра атома-мишени до направления первоначальной скорости движущейся заряженной частицы (рис. 13-4).

Если ядра сталкивающихся атомов имеют зарядовые числа Z_1 и Z_2, а их массы будут соответственно M_1 и M_2, то и при сближении друг с другом на расстояние, меньшее радиуса a экранирующего влияния электронных оболочек, равного

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{Z_1^{\frac{2}{3}} + Z_2^{\frac{2}{3}}}}, \qquad (13,10)$$

(где $a_0 = 0{,}5\text{Å}$ — радиус водородного атома по Бору), отклонение частицы вызывается главным образом кулоновским отталкиванием ядер. Экранированием заряда ядер электронными оболочками в этих условиях можно пренебречь. При таких взаимодействиях пондеромоторные силы, возникающие между движущейся легкой заряженной частицей и ядром атома-мишени, приводят к движению частицы около ядра по гиперболе (см. рис. 13-4). При центральном столкновении, т. е. при параметре удара $p = 0$, по уравнению энергии и работы можно записать

$$\frac{e^2 Z_1 Z_2}{b} = \frac{1}{2} m v^2, \tag{13,11}$$

где

$$m = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \tag{13,12}$$

— приведенная к центру масс системы масса ударяющей частицы, $b = \frac{2e^2 Z_1 Z_2}{mv^2}$ — наименьшее расстояние между ядрами соударяющихся атомов при их центральном столкновении. В случае $M_1 \ll M_2$ очевидно, что $m \approx M_1$. Если параметр удара $p \neq 0$ (см. рис. 13-4), то для вершины гиперболы C можно записать

$$p \cdot mv = mv_C \cdot AC; \tag{13,13}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{e^2 Z_1 Z_2}{AC} = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{bmv^2}{2AC}. \tag{13,14}$$

Из равенства (13,14) получим

$$v_C^2 = v^2\left(1 - \frac{b}{AC}\right); \tag{13,15}$$

так как $AO = OD$, то

$$AC = AO + OC = \frac{p}{\sin\varphi} + p\operatorname{ctg}\varphi = p\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \tag{13,16}$$

и, наконец, из выражений (13,15) и (13,13) следует, что

$$b = \left(1 - \frac{v_C^2}{v^2}\right) AC = \left(1 - \frac{p^2}{AC^2}\right) AC = p\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= 2p\operatorname{ctg}\varphi = 2p\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}. \tag{13,17}$$

Таким образом, угол отклонения Θ движущейся частицы определяется условием

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2} = \frac{b}{2p} = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{mv^2 \cdot p}. \tag{13,18}$$

Как и упоминалось, отклонение движущейся частицы будет тем больше, чем меньше ее кинетическая энергия и меньше параметр

удара (резерфордовское рассеяние). Энергия, передаваемая атому-мишени M_1 при таком пондеромоторном взаимодействии, зависит от размеров частиц и параметра удара (скользящее и отдаленное столкновения). Она может изменяться от нуля до своего максимального значения, которое, согласно формуле (13,6), будет равно

$$\Delta E_m = \frac{4M_1M_2}{(M_1+M_2)^2}E = E\left[1-\left(\frac{1-\frac{M_2}{M_1}}{1+\frac{M_2}{M_1}}\right)^2\right]. \quad (13,19)$$

Если принять, что пороговое значение энергии для смещения атомов в решетке как металлов, так и изоляторов составляет $E_d(E_d \approx 25$ *эв*), то средняя энергия, передаваемая атомам решетки при резерфордовском рассеянии любых частиц и связанная со смещением атомов решетки статически, принимает вид

$$\Delta\bar{E} = \frac{E_d \cdot \Delta E_m}{\Delta E_m - E_d} \cdot \ln\frac{\Delta E_m}{E_d} \leqslant \Delta E_m. \quad (13,20)$$

Например, при изотропном распределении рассеяния нейтронов имеем

$$\Delta\bar{E} = \frac{1}{2}\Delta E_m.$$

Смещение атомов может быть достигнуто и при бомбардировке вещества электронами, причем вследствие их малой массы покоя m_0 они должны обладать релятивистскими скоростями $\left(\frac{v}{c}\to 1\right)$.

В этом случае максимальная передаваемая энергия

$$\Delta E'_m = \frac{2(E+2m_0c^2)}{M_2c^2}\cdot E \quad (13,21)$$

при $m_0 \ll M_2$ и $E \ll M_2c^2$. Рассеяние электронов также происходит благодаря взаимодействию их с ядрами атомов вещества, но соотношения для резерфордовского рассеяния уже будут не справедливы.

При отдаленных столкновениях атомов, когда $\frac{b}{a} \gg 1$, могут быть применены соотношения, установленные для упругого удара шаров.

Атомы вещества, выбитые частицами из своих равновесных положений, энергетически распределяются приблизительно по закону обратной пропорциональности квадрату энергии. К ним также применимо выражение (13,19).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Лекция 14

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Носителями свойств вещества в любом его агрегатном состоянии являются молекулы и атомы. В случае газообразного состояния вещества молекулы (их линейные размеры лежат в границах $10^{-8} \div 10^{-7}$ *см*) удалены в среднем друг от друга на расстояния, в десятки раз превышающие их размеры. При этом силы взаимодействия между молекулами любой природы настолько малы, что движение молекул от столкновения до столкновения происходит по прямолинейным отрезкам. Число ежесекундных столкновений молекул очень велико. В воздухе, например, при нормальных условиях в каждом кубическом сантиметре содержится около

$$\frac{N_0}{V} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22{,}4 \cdot 10^3} = 2{,}7 \cdot 10^{19} \text{ молекул},$$

каждая из которых, двигаясь по всем направлениям в среднем со скоростью порядка $4 \cdot 10^4$ *см* · *сек*$^{-1}$, претерпевает около 10^{12} столкновений в секунду.

Длина среднего свободного пробега молекулы в воздухе, т. е. среднее расстояние по пути движения молекулы между двумя последовательными столкновениями, в сотни раз превышает их линейные размеры. Благодаря этому в газах легко осуществляется диффузия. Газ допустимо рассматривать как совокупность большого числа изотропно и независимо движущихся, упруго взаимодействующих молекул.

В жидкостях, плотности которых в тысячи раз превышают плотности газа, среднее расстояние между молекулами сравнимо с их размерами, и потому силами взаимодействия между ними пренебрегать нельзя. Траектория движения молекулы жидкости уже не представляется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков. Она является ломаной кривой, состоящей из коротких криволинейных отрезков с малым результирующим перемещением молекулы. На поступательное движение накладываются при этом еще

колебания высокой частоты, так что движение молекулы жидкости в целом напоминает дрожание. Диффузия в жидкостях осуществляется медленнее, чем в газе.

В структурно-упорядоченных веществах (кристаллах) преимущественным видом движения взаимодействующих атомов является колебание узлов решетки, так что диффузия в твердых телах затруднена. Проявление неупорядоченного движения молекул, воспринимаемое не только приборами, но и нашим органом осязания, заключается в нагретости тела. Наиболее простым представляется молекулярное движение в газах, так как при достаточно больших расстояниях между молекулами (малые плотности газа) допустимо пренебрегать размерами самих молекул и силами взаимодействия между ними. Соударение молекул статистически может рассматриваться только как упругое. Если отдельно взятые молекулы слипаются друг с другом или прилипают к стенкам сосуда, то это происходит в количествах равновесных с обратным процессом разъединения и отлипания молекул.

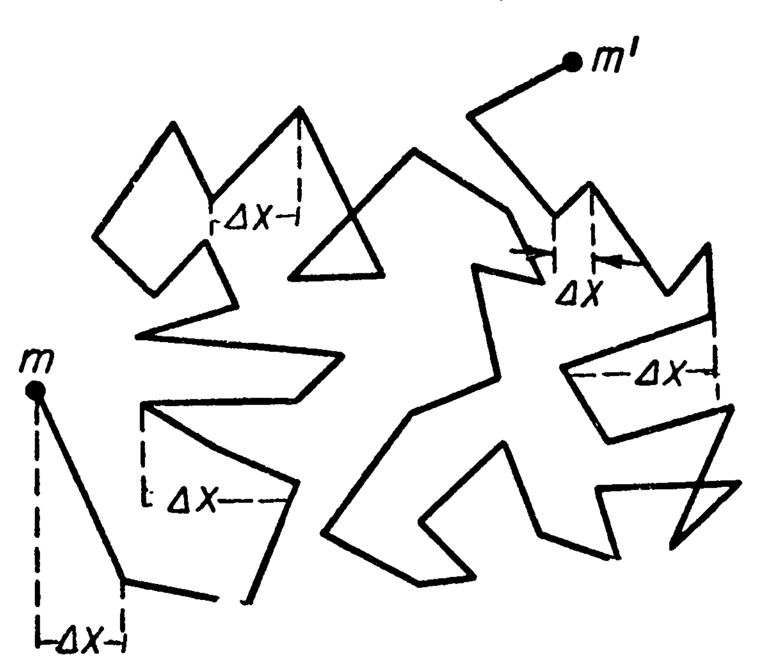


Рис. 14-1. Положения броуновской частицы, отмеченные через одинаковые интервалы времени (m и m' — начальное и конечное положения частицы)

Непосредственно изучать движение большого числа сталкивающихся молекул трудно из-за технической недоступности наблюдения отдельных молекул. Флуктуации в статистическом распределении столкновений молекул могут быть отмечены, если избранное в качестве индикатора тело будет иметь относительно малую массу и малые размеры. Движение таких взвешенных в эмульсии частиц отображает хаотическое движение молекул, и вместе с тем оно доступно наблюдению. Картину неупорядоченного движения этих частиц впервые наблюдал Броун.

Применяя к беспорядочному движению взвешенных частиц статистические методы обработки наблюдений, Перрен установил важный экспериментальный закон: среднее значение из квадратов перемещений любой взвешенной частицы в заданном направлении за некоторый избранный промежуток времени (рис. 14-1) зависит только от температуры, причем изменяется прямо пропорционально абсолютной температуре среды, т. е.

$$\overline{\Delta x^2} \sim T. \qquad (14,1)$$

Именно на этом экспериментальном факте базируется кинетическая теория строения вещества. В ней принимается, что при заданной температуре в смеси газов, имеющей молекулы различных

масс, средняя кинетическая энергия молекул любого вида постоянна и связана с равновесной температурой газа соотношением:

$$\bar{E}_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m_r \bar{u}^2_{q,\,r} = \frac{i}{2} kT, \tag{14,2}$$

где $\bar{u}^2_{q,r} \ll c^2$ — среднее значение из квадратов различных скоростей (u_q) беспорядочно движущихся молекул данного типа (m_r), k — постоянная, не зависящая от рода газа, i — число степеней свободы движения молекулы, или число независимых параметров, определяющих энергию ее движения.

Основным макроскопическим проявлением свойств газа является то давление, которое газ оказывает на стенки сосуда. С точки зрения кинетической теории идеального газа исключается взаимодействие между молекулами. Эта теория объясняет давление газа как средний статистический эффект от многочисленных ударов молекул газа о стенки сосуда, ограничивающего его объем.

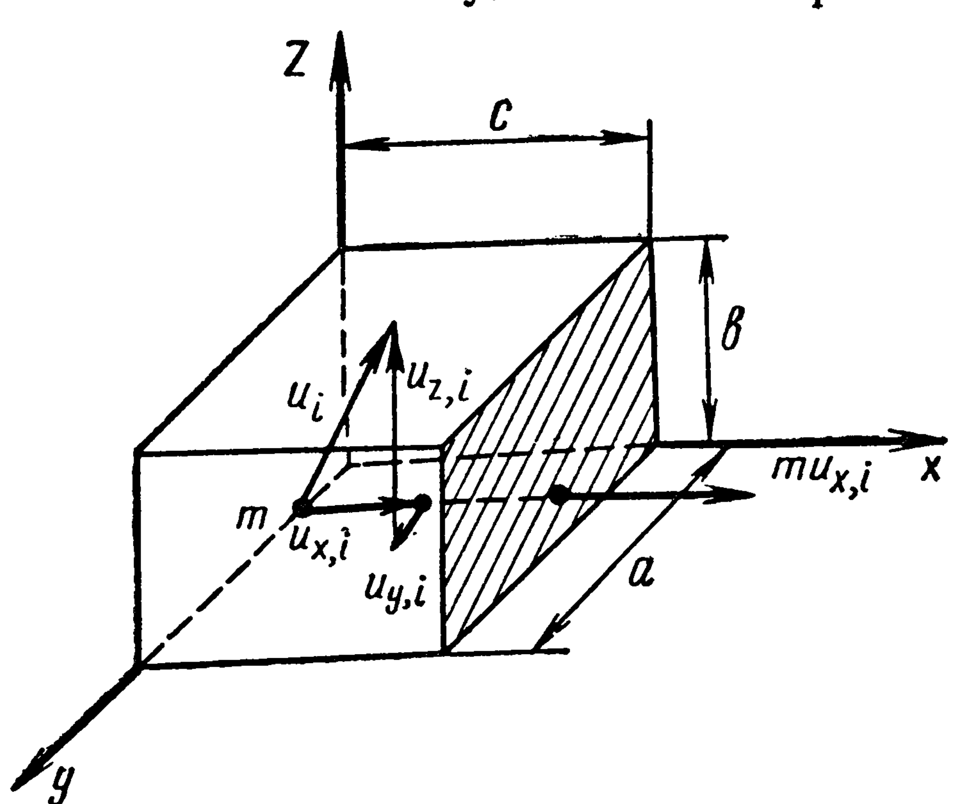


Рис. 14-2. К выводу основного уравнения кинетической теории газов

Уравнение, связывающее давление газа с молекулярными величинами, называют основным уравнением кинетической теории газов. Для вывода этого уравнения надо рассмотреть равновесное состояние достаточно разреженного газа, в котором допустимо пренебречь размерами молекул и их взаимодействиями, а соударения статистически считать упругими.

Пусть m — масса молекул данного газа и u_i — мгновенное значение скорости ее беспорядочного движения, тогда составляющие импульса молекулы по осям представятся в виде (рис. 14-2)

$$p_x = m \cdot u_{x,\,i}; \quad p_y = m \cdot u_{y,\,i}; \quad p_z = m \cdot u_{z,\,i}.$$

Изменение проекции импульса, например при ударе молекулы о стенку ab, составит $\Delta p_{x,i} = 2mu_{x,i}$, поскольку статистически удар является упругим. Если некоторые молекулы и прилипают к стенке, то другие, ранее прилипшие, статистически, в таком же количестве отскакивают от стенки. В таком случае, согласно второму закону классической механики,

$$f_i \Delta t = \Delta p_{x,\,i} = 2mu_{x,\,i}, \tag{14,3}$$

где f_i — сила, действующая в течение короткого времени Δt удара молекулы. Статистический эффект давления определяется дейст-

вием средней по времени силы и не от одной, а от всех молекул, заключенных в рассматриваемом объеме газа (параллелепипед abc, см. рис. 14-2).

Если вместо Δt принять не время удара, а весь интервал времени между двумя последовательными ударами одной и той же молекулы в одну и ту же стенку, то вместо кратковременной силы следует брать среднюю силу давления $\bar{f}_{x,i}$, оказываемого одной молекулой. Пренебрегая размерами молекул и учитывая независимость их действия, давление на избранную стенку от всех молекул газа будет равно

$$p_x = \frac{1}{ab} \sum_1^N \bar{f}_{x,i}, \tag{14,4}$$

а время усреднения

$$\tau_i = \frac{2c}{u_{x,i}}. \tag{14,5}$$

Таким образом, $\bar{f}_{x,i} = \frac{mu^2_{x,i}}{c}$ и, значит,

$$p_x = p_y = p_z = p = \frac{1}{abc} \sum_1^N m \cdot u^2_{x,i}. \tag{14,6}$$

Так как $u_i^2 = u^2_{x,i} + u^2_{y,i} + u^2_{z,i}$, то, согласно уравнению (14,6), после сложения получим

$$3p = \frac{1}{V} \sum_1^N mu_i^2$$

или

$$p = \frac{2}{3} \sum_1^n mu_i^2 = \frac{2}{3} \sum_1^n (E_{\text{кин}})_i. \tag{14,7}$$

Здесь $n = \frac{N}{abc} = \frac{N}{V}$ — среднее число молекул в единице объема газа. Согласно условию (14,2), при термодинамическом равновесии $\bar{E}_{\text{кин}} = \text{const}$, и, следовательно, $m \sum_1^N u_i^2 = Nm\bar{u}^2$, так что в выражение (14,7) можно ввести среднюю квадратичную скорость $\bar{u} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_1^N u_i^2}$ и тогда его можно записать в виде

$$p = \frac{1}{3} nm\bar{u}^2, \tag{14,8}$$

или

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3pV}{Nm}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \tag{14,8'}$$

Применив уравнение (14,7) для смеси двух газов с r и S объемными концентрациями молекул, получим

$$p = \frac{2}{3}\sum_{1}^{r+s} E_{\text{кин}} = \frac{2}{3}\sum_{1}^{r}\frac{m_r u_{ri}^2}{2} + \frac{2}{3}\sum_{1}^{s}\frac{m_s u_{si}^2}{2} = p_r + p_s \qquad (14,9)$$

— закон Дальтона.

Из выражений (14,8) и (14,2) для грамм-моля идеального газа имеем:

$$p_0 V = \frac{1}{3} N_0 m u^2 = k N_0 T = RT \qquad (14,10)$$

— уравнение Клапейрона, где $R = kN_0$ — универсальная газовая постоянная.

Таким образом, основные соотношения кинетической теории газов приводят к известным, установленным экспериментально газовым законам и определяют те условия, при которых эти законы выполняются (идеальный газ).

Равенство (14,2) показывает также, какой физический смысл содержится в понятии температуры. Коэффициент $k = \frac{R}{N_0}$, называемый больцмановской постоянной, имеет значение

$$k = \frac{8{,}31 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^{23}} = 1{,}39 \cdot 10^{-16}\,\frac{эрг}{град} = 1{,}39 \cdot 10^{-23}\,\frac{дж}{град}.$$

Следовательно, выражение (14,2) устанавливает прямую пропорциональность между $\bar{E}_{\text{кин}}$ и $T°$. Количество тепла, сообщенное веществу, и приращение температуры вещества также находятся в прямой зависимости друг от друга. Однако, если количество тепла характеризует кинетическую энергию всех молекул вещества, то температура определяет уровень средней кинетической энергии молекулы вещества. Таким образом, коэффициент $\frac{i}{2}k$ в равенстве (14,2) можно рассматривать как теплоемкость газа, рассчитанную на массу одной молекулы.

Для идеального газа $i = 3$, поскольку лишь поступательное движение молекул имеет энергию. Если никаких других процессов преобразования энергии, кроме нагрева газа, не происходит, грамм-молекулярная теплоемкость идеального газа составит

$$c = \frac{3}{2} k N_0 = \frac{3}{2} R \approx 3\,\frac{кал}{град \cdot моль},$$

так как газовая постоянная $R = 2\,\frac{кал}{град \cdot моль} = 8{,}3736\,\frac{дж}{град \cdot моль}$.

Энергия молекулы идеального газа соответствует только ее поступательному движению (влияние размеров молекул и сил взаимодействия пренебрежимо мало, так что вращение молекул не вносит энергии, а их колебания вовсе отсутствуют). По классическому прин-

ципу распределения энергии на каждую из трех степеней свободы поступательного движения приходится энергия хаотического движения, равная 1 *кал* на 1 *моль* газа и на 1 градус изменения температуры.

Лекция 15

ЭЛЕМЕНТЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ СТАТИСТИКИ

Давление газа на стенки сосуда является некоторым суммарным эффектом (14,7). Любая молекула участвует в его создании. Между тем имеются процессы, при которых тот или иной эффект производят лишь те молекулы, энергия которых превышает некоторое минимальное значение, называемое пороговым. Примером тому может служить испарение молекул жидкости, когда пороговым значением кинетической энергии $E_к$ является работа выхода молекулы жидкости из поверхностного слоя, или химические процессы, в которых пороговое значение является энергией активации молекул к той или другой реакции.

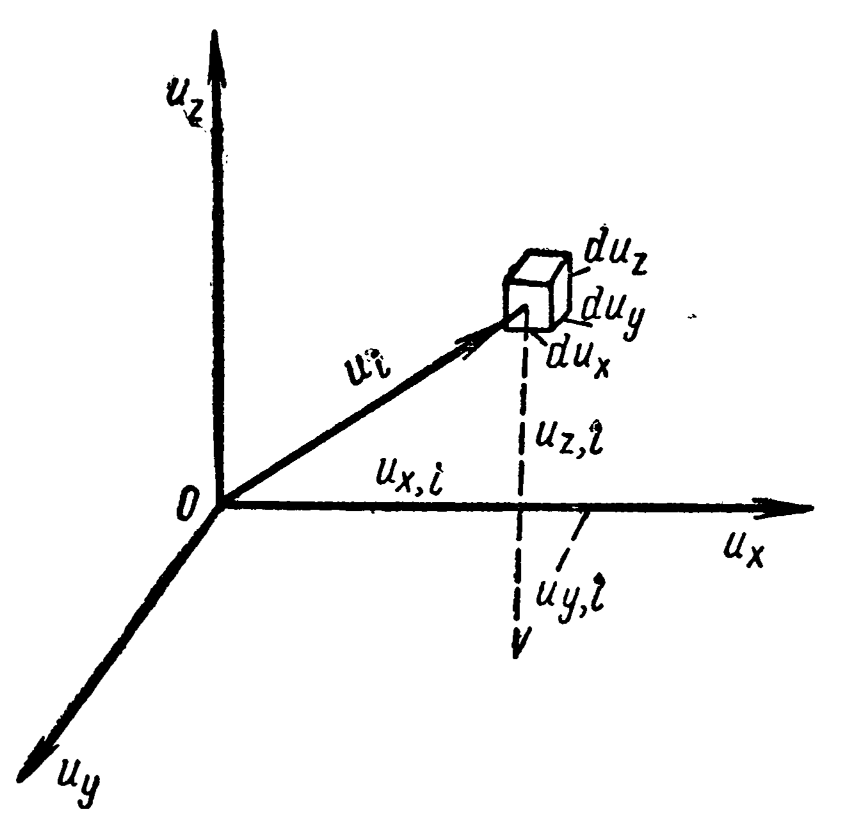


Рис. 15-1. К выводу статистического закона распределения газовых молекул по скоростям

Во всех этих случаях усредненные значения кинетической энергии не характеризуют скорости протекания процесса. Чтобы судить о его течении, необходимо знать статистическое распределение молекул по скоростям или по энергиям.

Статистические закономерности являются приближенными, поскольку они определяются вероятностями событий и представляют собой законы больших чисел, допускающие случайные отклонения от средних величин (флуктуации). Математическое выражение Максвелла для функции распределения молекул по скоростям является таким вероятностным статистическим законом.

В классической молекулярной статистике принимается, что молекулы различимы тем или иным своим качеством (например, составом или возбужденным состоянием), что они независимы друг от друга и что их общее число, равно как и суммарная энергия, остаются неизменными.

Для установления закона распределения молекул по скоростям удобно воспользоваться пространством скоростей, в котором каждой скорости $\vec{u}_i$ соответствует точка с координатами $u_{x,i}$, $u_{y,i}$, $u_{z,i}$ и элемент объема $du_x \cdot du_y \cdot du_z$ (рис. 15-1). Распределение таких «скоростных» точек в области значения скорости $\vec{u}$ по закону ве-

роятности должно быть стационарным и симметричным. Обозначим через $n(\vec{u})$ концентрацию скоростных точек в области произвольно выбранной скорости $\vec{u}$, тогда число молекул, скорости которых лежат между u и $u+du$, равно

$$dn = n(\vec{u})\cdot 4\pi\cdot u^2\cdot du. \qquad (15,1)$$

Условия стационарности и симметрии распределения $n(\vec{u})$ соблюдаются, если выполняется закон распределения случайностей, который по Максвеллу будет представлен в виде

$$n(\vec{u}) = a\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = a\cdot e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}, \qquad (15,2)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}mu^2$ — возможное значение кинетической энергии молекулы ($u \ll c$) и $kT = \frac{1}{2}m\alpha^2$ — некоторое усредненное значение кинетической энергии молекулы при температуре $T°$, откуда

$$\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \qquad (15,2')$$

Значение множителя a определяется из условия нормировки, по которому

$$n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} n(\vec{u})\, du_x\cdot du_y\cdot du_z = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_x^2}{\alpha^2}}\cdot du_x \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_y^2}{\alpha^2}}\cdot du_y\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_z^2}{\alpha^2}}\cdot du_z. \qquad (15,3)$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_x^2}{\alpha^2}}\, du_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_y^2}{\alpha^2}}\cdot du_y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u_z^2}{\alpha^2}}\, du_z = \alpha\sqrt{\pi}$$

— интеграл Гаусса, то после подстановки его в формулу (15,3) имеем

$$a = \frac{n}{\alpha^3\cdot\pi^{3/2}},$$

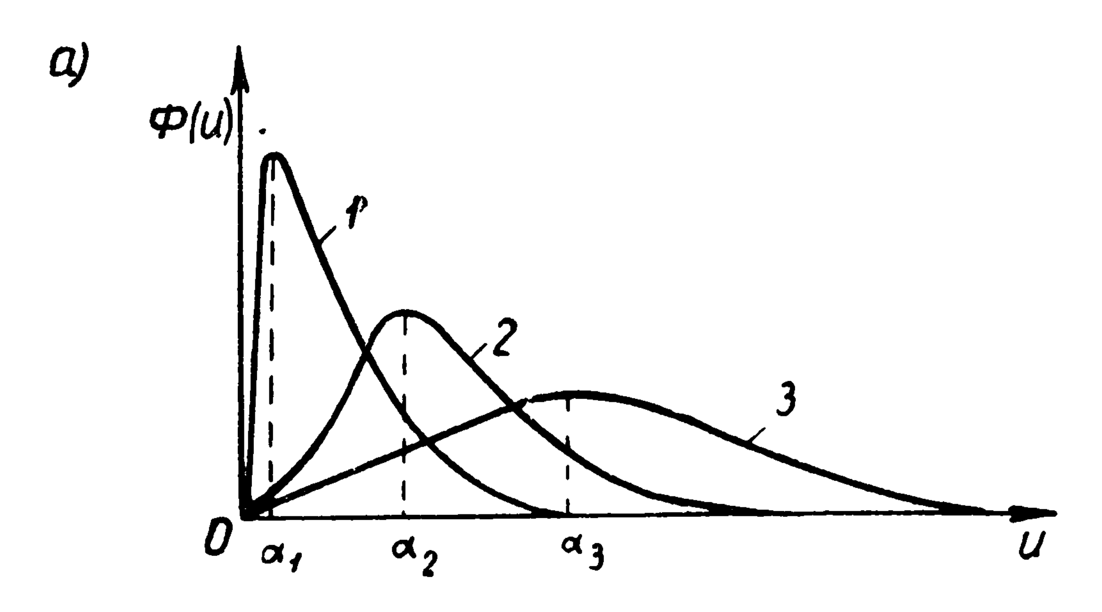
и, значит, из выражения (15,1) получим функцию распределения молекул по скоростям в виде

$$\Phi(u) = \frac{1}{n}\cdot\frac{dn}{du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{u^2}{\alpha^3}\cdot e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}. \qquad (15,4)$$

Если $\frac{d\Phi(u)}{du} = 0$, то для экстремума функции распределения имеем

$$u_{в} = \alpha,$$

т. е. α представляет собой наиболее вероятную скорость. Из графиков рис. 15-2, *а* видно, что при низких температурах, когда $u_в = \alpha_1$ стремится к нулю, разброс скоростей молекул около



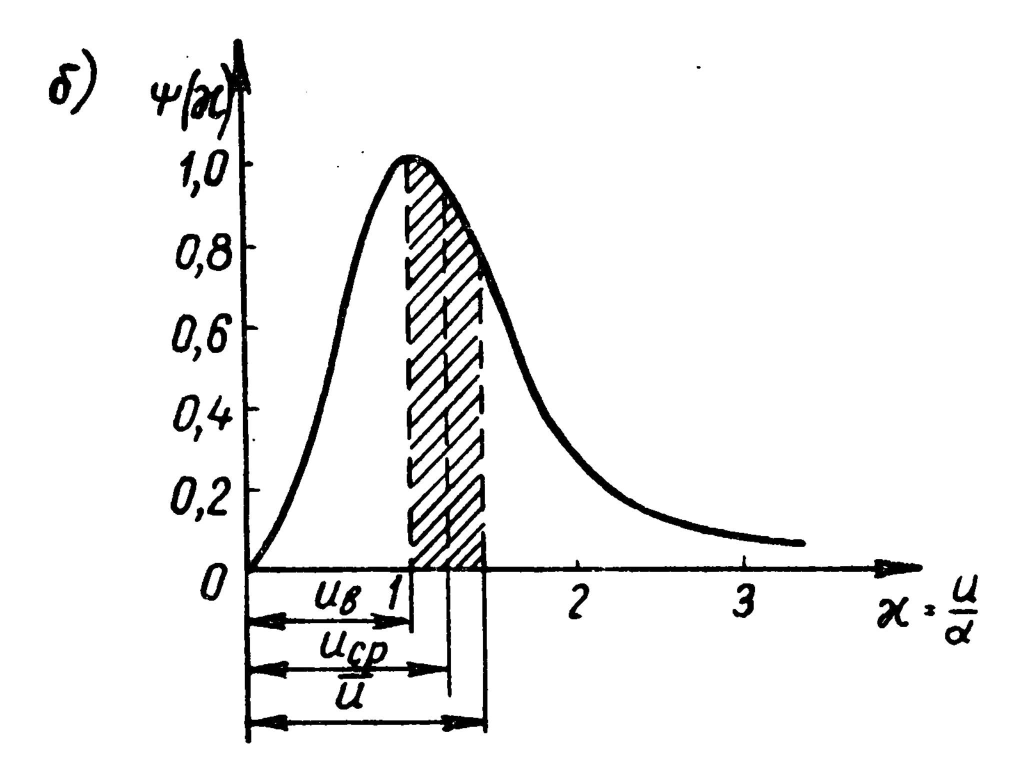


Рис. 15-2. Функции распределения молекул по скоростям:

а) закон Максвелла (n = const); *1* — при низкой температуре $\left(T_1 < T_2;\ \alpha_0 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = u_в\right)$; *2* — при средней температуре ($T_1 < T_2 < T_3$; $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$); *3* — при высокой температуре ($T_3 > T_2$) (площади фигур *1*, *2*, *3* равны);

б) универсальная кривая распределения (на область наиболее вероятных скоростей от $\varkappa = 0{,}75$ до $\varkappa = 1{,}25$ приходится около 37% всех молекул)

этого значения скорости уменьшается. При $T \to 0°$ максимум функции распределения превращается в острый пик; наоборот, при $T \to \infty$ все значения скоростей становятся равновероятными.

Обозначая $\varkappa = \frac{u}{\alpha}$, так что $d\varkappa = \frac{1}{\alpha} du$, из выражения (15,4) получаем

$$\Psi(\varkappa) = \frac{1}{n}\frac{dn}{d\varkappa} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \varkappa^2 e^{-\varkappa^2}. \qquad (15{,}4')$$

Равенство (15,4′) позволяет функцию распределения $\Psi(\varkappa)$ графически представить одной кривой для любых газов и любых значений температуры (рис. 15-2, *б*). Очевидно, $\Psi(\varkappa)$ достигает максимума при $\varkappa = 1$, т. е. при $u = \alpha = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$.

Интегрируя функцию распределения $\Psi(\varkappa)$ в границах изменения от $\varkappa = 0$ до $\varkappa = \infty$, получим

$$\int_0^\infty \Psi(\varkappa)\,d\varkappa = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varkappa^2 e^{-\varkappa^2} d\varkappa = 1 \quad \text{или} \quad 100\%, \qquad (15,5)$$

т. е. полное число молекул (площадь фигуры, ограниченной сверху графиком, на рис. 15-2, *б*).

Аналогично $\int_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \Psi(\varkappa)\,d\varkappa$ представляет долю общего числа молекул, относительные скорости которых лежат в конечном интервале значений между $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Пользуясь выражением (15,3), можно получить еще одно статистическое значение скорости, а именно, среднюю скорость:

$$u_{\text{ср}} = \frac{\int_0^\infty n_u \cdot u \cdot du}{n_u \cdot du} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{RT}{\mu}}. \qquad (15,6)$$

Таким образом, из трех рассмотренных статистических значений скорости беспорядочного поступательного движения молекул, которые одинаково зависят от температуры газа, самой большой является средняя квадратичная скорость $\bar{u} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$ [см. (14,8′)]; промежуточной — средняя арифметическая скорость $u_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \times \sqrt{\frac{RT}{\mu}} < \bar{u}$ [см. (15,6)] и самой меньшей — вероятная скорость $u_{\text{в}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \alpha < u_{\text{ср}}$ (см. рис. 15-2).

Как видно, эти статистические скорости различаются незначительно: в пределах значения коэффициентов ($\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$) при $\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$. По этой причине в дальнейшем при рассмотрении явлений в газах приводится просто статистическая скорость $\bar{u}$, под которой подразумевается одно из указанных значений в зависимости от явления. Полагая $\frac{mu^2}{2} = \varepsilon$ при $\frac{1}{kT} = \beta$ и отмечая, что $\frac{\varepsilon}{kT} = \frac{u^2}{\alpha^2} = \beta \cdot \varepsilon = \lambda$ и, значит, $du = \frac{\alpha}{2u}\,d\lambda$, из выражения (15,4) получаем классический

закон распределения молекул по энергиям беспорядочного движения (рис. 15-3)

$$\frac{dn_\varepsilon}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda} \cdot e^{-\lambda} \cdot d\lambda = k_{\text{Б-М}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon \qquad (15,7)$$

или

$$\varkappa(\varepsilon) = \frac{1}{n} \frac{dn_\varepsilon}{d\varepsilon} = k_{\text{Б-М}} \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\beta\varepsilon} \qquad (15,7')$$

— статистика Больцмана — Максвелла.

Интегрирование $\int\limits_0^\infty \varepsilon dn_\varepsilon$, согласно формуле (15,7), дает выражение полной энергии молекул одного грамм-моля идеального газа

$$W = 3RT. \qquad (15,8)$$

Подобная операция для определения числа молекул, энергия которых превышает некоторое значение $\lambda_1 \gg 1$, приближенно приводит к результату

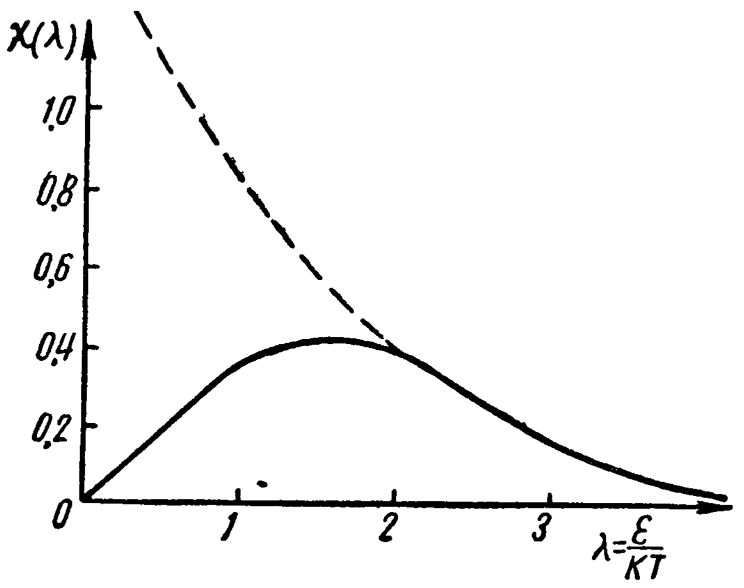


Рис. 15-3. Функция распределения молекул по энергиям

$$n_{\lambda_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot n \cdot \sqrt{\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1}. \qquad (15,9)$$

Для многих случаев пороговая энергия λ_1 не выходит за пределы $1 < \lambda_1 < 2$, тогда допустимо считать, что $2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\pi}} \approx 1$ и, значит,

$$n_{\lambda_1} \approx n \cdot e^{-\lambda_1}. \qquad (15,10)$$

Эта формула выражает изотермический закон распределения молекул в однородном гравитационном поле по Больцману, справедливый для частиц, не связанных взаимодействиями.

Из выражения (15,10) непосредственно вытекает закон распределения давления воздуха с высотой ($h < 10^{-3}R_3$) в земной изотермической ($T = \text{const}$) атмосфере, поскольку $\lambda = \frac{mgh}{kT}$, в виде:

$$n_h = n_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad \text{или} \quad p_h = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \qquad (15,11)$$

где m — масса молекулы газа, n_0 — концентрация молекул на уровне $h = 0$. Это выражение можно получить, если непосредственно вычислить давление, создаваемое столбом газа над избранной поверхностью. Очевидно, что $dp = -\rho_h g \cdot dh$, где ρ_h — плотность газа на высоте h над уровнем моря. По уравнению Менделеева — Клапейрона

$$\rho_h = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT} = \frac{m}{kT} \cdot p,$$

отсюда

$$\frac{dp}{p} = -mgdh. \qquad (15,11')$$

После интегрирования (15,11′) в границах изменения h от 0 до h получим (15,11). Применяя тот же закон к наблюдаемым z взвешенным в эмульсии частицам, имеющим массу покоя M и находящимся в поле земного тяготения, получаем

$$z_l = z_0 \cdot e^{-\frac{Mgl}{kT}}. \qquad (15,11'')$$

Выберем экспериментальные значения h и l так, чтобы $\frac{n_h}{n_0} = \frac{z_l}{z_0}$, тогда

$$mh = Ml. \qquad (15,12)$$

Отсюда, зная среднюю массу M наблюдаемых в микроскоп взвешенных частиц эмульсии, можно найти значение усредненной массы молекулы газовой воздушной смеси:

$$m = M\frac{l}{h}. \qquad (15,13)$$

Например, при $\frac{n_1}{n_0} = 0,8$ и $M \cong 4,8 \cdot 10^{-15}$ *г* из уравнений (15,11) и (15,12) имеем $\frac{l}{h} = 10^{-8}$ и, значит, $m = 4,8 \cdot 10^{-23}$ *г*. Отсюда число Авогадро

$$N_0 = \frac{\mu_в}{m} = \frac{29}{4,8} \cdot 10^{23} \approx 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Выражение (15,11) позволяет ввести более расширенное понятие о температуре. В изолированной равновесной системе при $+0 < T < +\infty$ распределение классических частиц по энергиям во внешнем поле определяется законом Больцмана (15,11), по которому $n < n_0$. При $T = \infty$ для всех значений $\varepsilon \neq 0$ имеем $n = n_0$, т. е. равномерное распределение частиц по всевозможным значениям энергии. Однако в квантовых системах (атомах) значение потенциальной энергии ограничено некоторым предельным значением $\varepsilon_{пред}$, и система под воздействием внешних условий (прием системой энергии) может поддерживаться в возбужденном состоянии, так что в границах $0 < \varepsilon < \varepsilon_{пред}$ окажется, что $n > n_0$. Сохраняя соотношение (15,11) для такого неустойчивого состояния системы, следует считать $T < 0$. Такая квантовая система, поддерживаемая в возбужденном состоянии подводом энергии извне, перейдет в устойчивое состояние с $T > 0$, как только подвод энергии прекратится (рис. 15-4). Реальное осуществление

возбужденных состояний квантовых систем воспроизводится в квантовых генераторах (так называемых лазерах и мазерах).

Молекулярная статистика Больцмана—Максвелла неоднократно проверялась экспериментально. Один из первых способов проверки известен как опыт Штерна. Путем импульсной возгонки серебра в вакууме производился выпуск пучка молекул Ag в радиальном направлении двойного цилиндрического сосуда. Молекулы двигались в вакуумном пространстве $R - r$ между двумя жестко связанными коаксиальными цилиндрами. После конденсации серебра на внутренней поверхности внешнего цилиндра против выпускной щели образовывалось пятно O_0. Так как цилиндры вращались с одинаковой угловой скоростью ω, то молекулы, двигавшиеся радиально со скоростью u_i, попадали уже не в точку O_0, а в точку O_i, определяемую условием

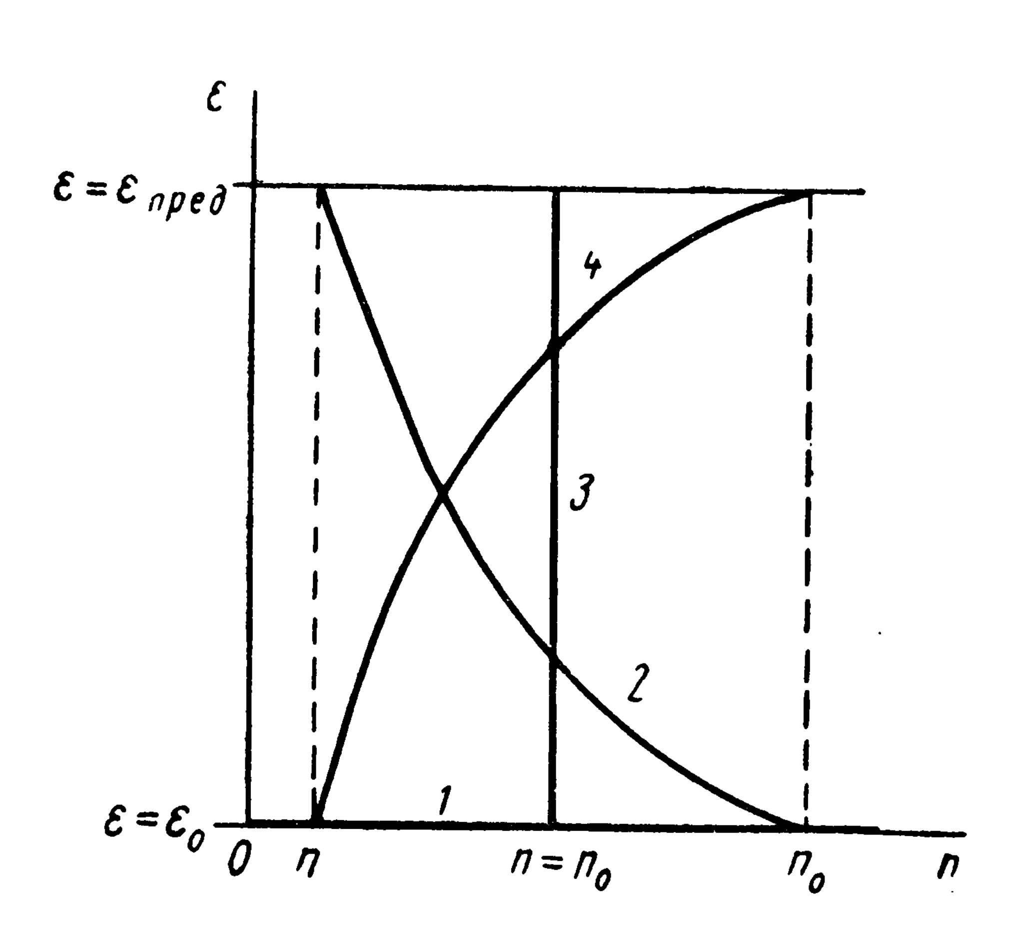


Рис. 15-4. Зависимость числа молекул от их энергии, согласно закону Больцмана: 1 — при температуре $T=0$; 2 — при $0<T<+\infty$ (устойчивое состояние); 3 — при $T\to\infty$; 4 — при $T<0$ (неустойчивое квантовое состояние возбуждения системы)

$$\frac{R-r}{u_i} = \frac{O_0O_i}{\omega R}, \qquad (15,14)$$

так что

$$O_0O_i = \frac{(R-r)\omega R}{u_i}. \qquad (15,14')$$

Таким образом, по толщине слоя осевшего серебра в местах, соответствующих разным значениям O_0O_i, был проверен закон распределения молекул по скоростям, или закон Максвелла.

Приведем основные интегралы и соотношения кинетической теории газов.

$$I = \int_0^\infty u^r \cdot e^{-su^2} \cdot du,$$

где $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $s = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{m}{2kT}$;

$$r = 0; \quad I = I_0 = \int_0^\infty e^{-su^2} \cdot du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \qquad (15,16)$$

— так называемый интеграл случайных ошибок Гаусса;

$$r = 1; \quad I = I_1 = \int\limits_0^\infty u \cdot e^{-su^2} \cdot du = \frac{1}{2s} = \frac{kT}{m}; \tag{15,17}$$

$$r = 2; \quad I = I_2 = \int\limits_0^\infty u^2 e^{-su^2} \cdot du = -\frac{dI_0}{ds} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}; \tag{15,18}$$

$$r = 3; \quad I = I_3 = \int\limits_0^\infty u^3 \cdot e^{-su^2} \cdot du = -\frac{dI_1}{ds} = \frac{1}{2s^2}; \tag{15,19}$$

$$r = 4; \quad I = I_4 = \int\limits_0^\infty u^4 \cdot e^{-su^2} \cdot du = \frac{d^2 I_0}{ds^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}; \tag{15,20}$$

$$r = 5; \quad I = I_5 = \int\limits_0^\infty u^5 \cdot e^{-su^2} \cdot du = -\frac{d^2 I_1}{ds^2} = \frac{1}{s^3}. \tag{15,21}$$

По Максвеллу число молекул, скорость которых лежит между u и $u + du$, равно

$$dn_u = \Psi(u) \cdot n \cdot du = 4\pi n \left(\frac{m}{2nkT}\right)^{3/2} \cdot u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \cdot du;$$

средняя скорость

$$u_{\text{ср}} = \frac{\int\limits_0^\infty u dn_u}{\int\limits_0^\infty dn_u} = \frac{I_3}{I_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{kT}{m}};$$

средняя квадратичная скорость

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{\int\limits_0^\infty u^2 dn_u}{\int\limits_0^\infty dn_u}} = \sqrt{\frac{I_u}{I_2}} = \sqrt{\frac{3}{2s}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \tag{15,22}$$

наиболее вероятная скорость из условия экстремума

$$\frac{d\Psi(u)}{du} = \frac{d}{du}\left(u^2 \cdot e^{-su^2}\right) = 0$$

составляет

$$u_{\text{в}} = \alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

так что

$$u_{\text{в}} < u_{\text{ср}} < \bar{u},$$

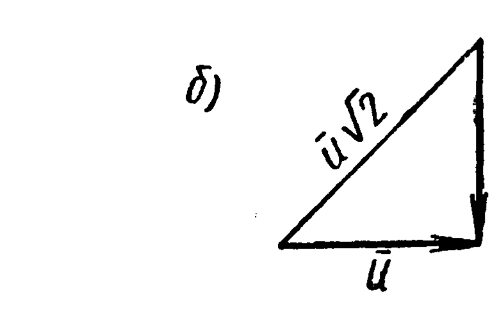
МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ, ПРОНИКНОВЕНИЯ И ПЕРЕДАЧИ

В идеальном газе столкновения молекул исключены. Молекулы такого газа, по условиям его определения, лишены пространственной протяженности.

Молекулы реальных газов имеют хотя и очень малые, но конечные размеры, а потому претерпевают многочисленные столкновения. Частота столкновений молекул, т. е. число столкновений за 1 *сек*, позволяет судить о среднестатистических размерах молекул. При статистике столкновений и симметрии свойств газовой среды допустимо рассматривать некоторый действующий радиус r сферической молекулы. Полагая, что длина ломаного пути молекулы за 1 *сек* составляет $\bar{u}$ *см*, где $\bar{u}$ — средняя арифметическая скорость беспорядочного движения, находим, что ежесекундное число однократных столкновений z' с молекулами газа составляет

$$z' = \pi(2r)^2 \cdot \bar{u} \cdot n = 4\pi r^2 \cdot \bar{u}n, \quad (16,1)$$

где n — концентрация газовых молекул, а z' — число молекул, центры которых попадают в объем цилиндра радиусом $2r$ и длиной, равной $\bar{u}$ (рис. 16-1, *а*).



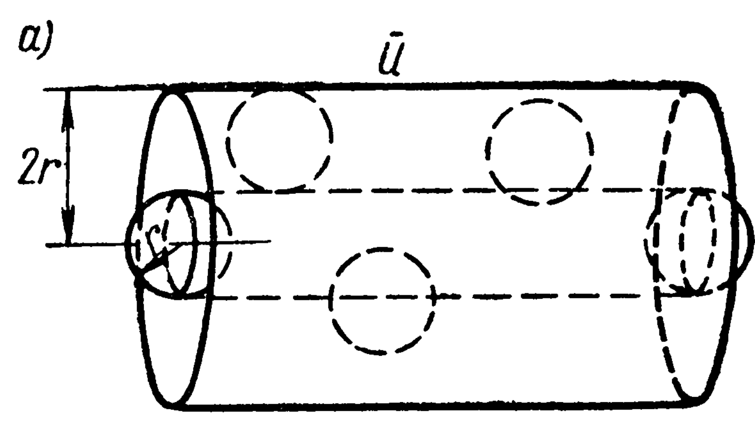


Рис. 16-1. К выводу выражений среднего числа ежесекундных столкновений газовой молекулы и средней длины ее свободного пробега:

а) расчетный цилиндрический объем ударяющей и ударяемой сферических молекул; *б*) треугольник скоростей для учета повторных соударений

Однако следует принять во внимание движение не только рассматриваемой молекулы, но и окружающих ее молекул газа. Средний угол между направлениями движений сталкивающихся молекул составляет $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, эффективную длину цилиндра естественнее считать равной не катету $\bar{u}$, а гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника $\bar{u}\sqrt{2}$ (рис. 16-1, *б*). Исправленное значение для ежесекундного числа столкновений будет

$$z = 4\sqrt{2}\pi r^2 \bar{u} n \quad (16,1')$$

и, значит, средняя длина свободного пробега молекулы

$$\lambda = \frac{\bar{u}}{z} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 \cdot n}. \quad (16,2)$$

При нормальных условиях в 1 $см^3$ воздуха плотностью $\rho = 1{,}293 \times \times 10^{-3}$ $г/см^3 = 1{,}293\ \frac{кг}{м^3}$ имеется

$$n = \frac{6 \cdot 10^{23}}{22{,}3 \cdot 10^3} = 2{,}7 \cdot 10^{19} \text{ молекул}$$

и длина свободного пробега, согласно формуле (16,2), составит $\lambda = 10^{-5}$ *см*, т. е. величину, в сотни раз превышающую размер молекулы ($\sim 10^{-7}$ *см*).

Из выражения (16,2) вытекает также, что в газе для области температур, в которой эффективный радиус молекул можно считать постоянным, соблюдается соотношение

$$\lambda n = \text{const}. \tag{16,3}$$

Однако эффективный радиус статистической молекулы не является фиксированной величиной, он зависит от скорости движения взаимодействующих молекул и несколько убывает с возрастанием скорости или с повышением температуры газа. Соотношение (16,3) вообще перестает выполняться, если возрастающее значение λ при откачке газа достигнет своего предельного значения, равного расстоянию между стенками сосуда. Дальнейшая откачка газа повлечет за собой уменьшение произведения λn. Равенство (16,3) не будет справедливо и при больших изменениях температуры, так как вызывает изменение действующего радиуса молекул (16,2).

Длиной свободного пробега определяются так называемые явления переноса в газе.

Пусть параметр G представляет собой некоторое свойство газа, например его плотность ρ, или температуру T°, или скорость v ламинарного течения; пусть эти свойства изменяются в направлении нормали к рассматриваемой поверхности, другими словами, их градиент не равен нулю, т. е. $\frac{dG}{dr} \neq 0$. Вследствие беспорядочного движения молекул будет происходить процесс выравнивания упомянутых свойств газа с переносом либо массы вещества dM (диффузия), либо количества тепла dQ (теплопроводность), либо количества поступательного движения dL (вязкость). Так как механизм всех трех процессов одинаков, то для всех перечисленных процессов переноса (диффузии, теплопроводности и внутреннего трения) можно записать

$$dK = C\frac{dG}{dr}Sdt, \tag{16,4}$$

где K — переносимая величина, $\frac{dG}{dr}$ — градиент выравниваемого свойства, S — поверхность соприкосновения рассматриваемых слоев, dt — элемент времени и C — специфический коэффициент рассматриваемого процесса.

Если G представить как плотность газа ρ, то описываемое явление будет диффузией, или переносом массы газа в направлении выравнивания от большей плотности к меньшей, тогда

$$dM = D\frac{d\rho}{dx}Sdt. \qquad (16,4')$$

Здесь коэффициент D ($см^2 \cdot сек^{-1}$) является коэффициентом диффузии.

Если G представить как температуру газа T, то выражение (16,4) будет уравнением теплопроводности с переносом не массы молекул (поскольку плотность газа одинакова), а кинетических энергий их беспорядочного движения, т. е.

$$dW = dQ = K\frac{dT}{dx}Sdt, \qquad (16,5)$$

где $K\left(\frac{г \cdot см}{сек^3 \cdot град}\right)$ — коэффициент теплопроводности.

В случае ламинарного течения газа параметр G представляет собой линейную скорость v поступательного движения рассматриваемого слоя газа, а уравнение (16,4) — уравнение внутреннего трения с передачей количества поступательного движения, т. е.

$$dL = \eta\frac{dv}{dx} \cdot S\,dt. \qquad (16,6)$$

Так как $\frac{dL}{dt} = F_{тр}$, то это выражение может быть записано в форме

$$F_{тр} = \eta\frac{dv}{dx}S. \qquad (16,6')$$

Коэффициент η называют коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом динамической вязкости ($\frac{\eta}{\rho}$ будет коэффициентом кинематической вязкости).

На основе кинетической теории газов можно установить связь макроскопических коэффициентов D, K и η с молекулярными величинами, характеризующими газ.

При выводе выражения для коэффициента вязкости рассматривается ламинарное течение газа в трубе, так что скорость течения непрерывно изменяется вдоль радиуса поперечного сечения потока от $v = v_m$ на оси трубы до $v = 0$ у стены трубы. Таким образом, $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dr} \neq 0$ в то время, как плотность и температура газа во всех точках одинаковы (рис. 16-2).

Число молекул, ежесекундно проникающих благодаря хаотическому движению сквозь единицу поверхности раздела, составит

$$n\downarrow = n\uparrow = \frac{1}{6}n\bar{u}. \qquad (16,7)$$

Их количества движения будут

$$L\downarrow\uparrow = \frac{1}{6}n\bar{u}mv\downarrow\uparrow, \qquad (16,7')$$

но $v\downarrow = v + \Delta v$ и $v\uparrow = v - \Delta v$, так что $\Delta L = L\downarrow - L\uparrow = \frac{1}{3} nm\bar{u}\Delta v$. Так как при ламинарном течении $\frac{dv}{dx} = \frac{\Delta v}{\lambda}$, то

$$\Delta L = \frac{1}{3} nm\bar{u}\lambda \frac{dv}{dx}$$

(при $S = 1$ *см*^{2} и $t = 1$ *сек*). Отсюда, согласно формуле (16,6),

$$\eta = \frac{1}{3} nm\bar{u}\lambda. \qquad (16,8)$$

Аналогично для диффузии имеем $M\uparrow\downarrow = \frac{1}{6} n\bar{u}m\uparrow\downarrow$; отсюда $\Delta M = M\downarrow - M\uparrow = \frac{1}{3}\bar{u}m\Delta n = \frac{1}{3}\bar{u}m\lambda\frac{dn}{dx}$ или $dM = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda\frac{d\rho}{dx}$ при $S = 1$ *см*^{2} и $t = 1$ *сек*. Таким образом,

$$D = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda = \frac{\eta}{nm} = \frac{\eta}{\rho}. \qquad (16,9)$$

Наконец, для явления теплопроводности получим

$$Q\downarrow\uparrow = \frac{1}{3} n\bar{u}mc_V T\downarrow\uparrow \quad \text{и} \quad \Delta Q = Q\downarrow - Q\uparrow = \frac{1}{6} nm\bar{u}c_V\lambda\frac{dT}{dx},$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном его объеме. Отсюда коэффициент теплопроводности

$$K = \frac{1}{3} nm\bar{u}\lambda c_V = \eta c_V. \qquad (16,10)$$

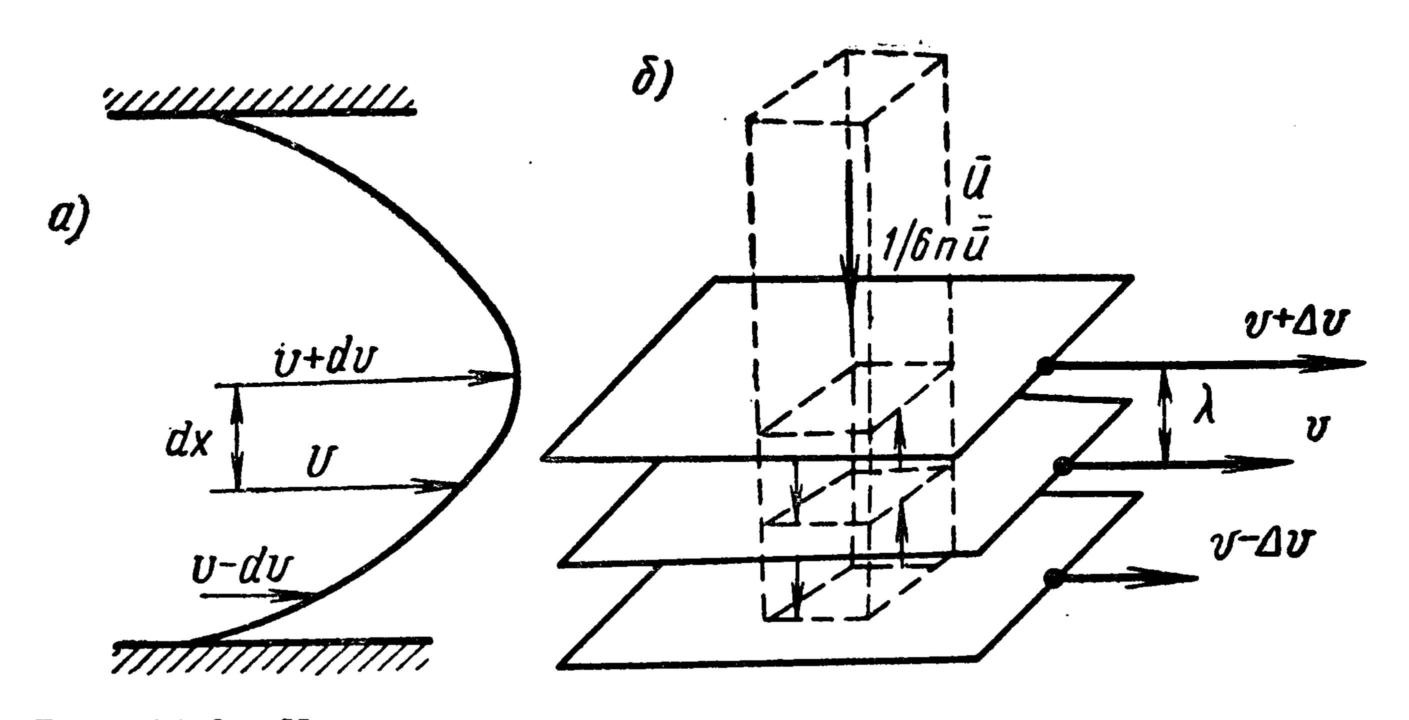


Рис. 16-2. К выводу молекулярно-кинетического выражения коэффициента вязкости:

а) распределение скорости течения газа по сечению ламинарного потока в трубе; *б*) передача импульса поступательного движения переносом молекул

Установленное молекулярное выражение для коэффициента вязкости (16,8) справедливо лишь при ламинарном (слоистом, плавном) течении газа. Турбулентное течение (завихрения) возникает в

потоке в тех случаях, когда отношение работы ускорения к работе трения, называемое числом Рейнольдса и равное

$$N_R = \frac{dA_{\text{уск}}}{dA_{\text{тр}}} = \frac{mvdv}{\eta S dV} = \frac{lv\rho}{\eta} = \frac{lv}{\frac{\eta}{\rho}}, \qquad (16,11)$$

где l — определяющий линейный размер канала течения (например, радиус трубы), превышает некоторые определенные значения. Малые числа $N_R < 10$ означают преобладание вязкости над ускорением и малые скорости потоков, т. е. ламинарное течение. В гладких трубах при больших скоростях течения газа критическое значение безразмерного числа Рейнольдса составляет около тысячи.

Как видно из уравнения (16,8), в пределах справедливости соотношения (16,3) коэффициент вязкости не зависит от плотности газа и возрастает с повышением его температуры. Однако это заключение непригодно для жидкостей, поскольку значительное (на три порядка) уменьшение длины пробега молекул из-за большой плотности жидкости изменяет механизм переноса импульса поступательного движения молекул. Основное значение в жидких средах приобретает передача поступательного импульса при столкновениях молекул, а не при их переходе из слоя в слой. В связи с этим у жидкостей в противоположность газам с повышением температуры, т. е. с увеличением частоты столкновений молекул, внутреннее трение, или вязкость, убывает.

Коэффициент теплопроводности (16,10) также не зависит от плотности газа, однако лишь до тех пор, пока при откачке газа длина свободного пробега молекул не достигнет предельного значения, равного расстоянию между стенками сосуда. Дальнейшая откачка влечет за собой убывание коэффициента теплопроводности, что используется в так называемых сосудах Дьюара, применяемых для теплоизоляции жидкостей.

Критерий вакуума, таким образом, относителен; он определяется соотношением между длиной свободного пробега по формуле (16,3) и расстоянием между стенками сосуда (при симметричной форме сосуда его размерами). При высоком разрежении газа до давлений порядка 10^{-9} *мм рт. ст.*, или $1{,}33 \cdot 10^{-7} \frac{н}{м^2}$, в 1 $см^3$ газа остается еще свыше 10^7 молекул. В неограниченном пространстве длина их свободного пробега была бы около $3 \cdot 10^7$ *см* = 300 *км* [см. (16,3)] и, следовательно, во много раз превышала бы обычные размеры сосудов. В капиллярах пористых веществ при диаметрах каналов менее 10^{-5} *см* вакуум имеется уже при атмосферном давлении, так как при нормальном давлении $\lambda \approx 10^{-5}$ *см*. Вакуум, таким образом, означает лишь то разрежение, при котором основную роль играют не столкновения между молекулами газа, а лишь удары молекул о стенки сосуда.

Сильно разреженные газы подчиняются основному уравнению кинетической теории газов, так как при его выводе столкновения молекул не рассматривались, но все явления переноса в них будут протекать по-иному. В частности, в двух сосудах со стенками, имеющими температуры T_1 и T_2, наполненных разреженным газом и соединенных друг с другом трубкой, давление газа будет разным.

Действительно, как уже отмечалось, молекулярно-кинетическое равновесие (см. 16,7) требует, чтобы

$$n_1\bar{u}_1 = n_2\bar{u}_2. \tag{16,12}$$

Так как $n = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho\mu}{mRT}$ и $\bar{u} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, то из равенства (16,12) следует, что

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} \tag{16,13}$$

вместо $p_1 = p_2$ для плотных газов, в которых возможна конвекция.

Истечение разреженного газа через трубку происходит также только в результате беспорядочного движения и определяется законом Кнудсена, по которому для любого сечения трубки

$$pV = \frac{mRT}{\mu} = 4,6\cdot 10^{-5}R\sqrt{\frac{T}{\mu}}\cdot\frac{D^3}{l}(p_1 - p_2), \tag{16,14}$$

где D и l — соответственно диаметр и длина трубки, $(p_1 - p_2)$ — перепад давлений в ней. Обозначив через $w = \frac{1}{3810}\cdot\frac{l}{D^3}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ (СГС), закон истечения разреженного газа можем представить в виде

$$pV = \frac{p_1 - p_2}{w}. \tag{16,15}$$

Между тем для плотных газов справедлив закон Пуазейля, по которому, согласно выражению (9,8), имеем

$$pV = \frac{\pi}{256\eta}\cdot\frac{D^4}{l}(p_1^2 - p_2^2). \tag{16,16}$$

Соотношения (16,13) и (16,14) используются в технике высокого вакуума ($p < 10$ *мм рт. ст.*). Ионизированный остаточный газ поглощается распыленным металлом [см. (16,13)], обладающим весьма малой упругостью насыщенного пара (например, титаном) и вместе с ним удаляется из эвакуируемого объема [см. (16,14)] вакуумным насосом.

Лекция 17

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ГАЗАХ

Так как под числом степеней свободы движения подразумевается наименьшее число параметров, которыми определяется энергия движения рассматриваемой системы, то для газа, в котором каждая молекула является независимой, число степеней свободы оказы-

вается чрезвычайно большим. Поэтому решить задачу об установлении равновесия таких физических систем невозможно на основе классической механики отдельных частиц. Однако при весьма большом числе степеней свободы поведение механических систем подчиняется статистическим закономерностям. Именно таким путем устанавливаются все закономерности молекулярных процессов на базе не микро-, а макросвойств вещества. С этой точки зрения необходимо прежде всего обратить внимание на то, что состояние газа макроскопически определяется тремя термодинамическими параметрами V, p и T и что работа газа при изменении его объема от V_1 до V_2, вообще говоря, зависит от пути перехода из-за влияния третьего параметра — температуры, так что

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V, T)\, dV + \int_{V_2}^{V_1} p(V, T)\, dV \neq 0. \qquad (17,1)$$

Таким образом, прежде всего должны быть оговорены температурные условия пребывания системы в том или ином термодинамическом состоянии. Система адиабатически изолирована, если для нее исключен обмен энергией (теплообмен) с окружающей средой и, следовательно, изменения температуры окружающих тел не влияют на состояние системы.

Именно для такой изолированной системы применим закон сохранения и превращения энергии, сформулированный Ломоносовым: «Все перемены в натуре случающиеся такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимается, столько же присовокупляется к другому. Так ежели, где убудет несколько материи, то умножится в другом месте. Сей всеобщий, естественный закон простирается и в самые правила движения: ибо тело движущее своей силой другие столько же оные у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает».

Согласно этому закону, в замкнутой изолированной системе (в совокупности физических тел, полностью характеризуемой некоторым числом независимых макроскопических параметров) внутренняя энергия системы, являющаяся мерой содержащегося в системе взаимодействия и движения, есть величина постоянная, какие бы процессы внутри этой системы ни происходили (первое начало термодинамики), т. е.

$$U = U_с + U_к + U_п = \mathrm{const}. \qquad (17,2)$$

В формуле (17,2) $U_к$ — сумма кинетических энергий всех тел системы, включая и кинетическую энергию беспорядочного движения молекул вещества, $U_с$ — сумма энергий, эквивалентных массам покоя элементов вещества, входящего в состав системы (массам электронов, ядер, атомов, молекул и их соединений), $U_п$ — сумма потенциальных энергий всех взаимосвязей.

Первое начало термодинамики может быть применено и к тепловому процессу, при котором происходит обмен энергиями между системами.

Пусть система *1* не изолирована от системы *2*, но обе могут быть заключены в адиабатически изолирующую оболочку. Тогда, согласно первому началу термодинамики, имеем

$$W_1 + W_2 = \text{const},$$

и если системой *1* производится работа A, то

$$\delta A_1 + d(W_1 + W_2) = 0 \text{ или } \delta A_1 = -dW_1 - dW_2. \qquad (17,3)$$

Относя все изменения к первой системе, получим

$$-dW_2 = \delta Q_1 \text{ и } dW_1 = dU_1,$$

где U_1 — внутренняя энергия первой системы, являющаяся функцией ее состояния. Из выражения (17,3) вытекает, что

$$\delta Q_1 = dU_1 + \delta A_1 \text{ или } \delta Q = dU + \delta A. \qquad (17,4)$$

Здесь dU — изменение внутренней энергии газа и поскольку U является функцией состояния системы, то dU представляет собой полный дифференциал этой функции. Этого нельзя сказать относительно δQ — количества тепла, принятого системой *1* от системы *2*, так как работа δA зависит от пути перехода [см. (17,1)].

Из формулы первого начала термодинамики (17,4) вытекает не только взаимопревращаемость различных видов энергий, но и зависимость свойств газа от способа передачи ему энергии.

По общему определению теплоемкости $\delta Q = cdT$ и, следовательно, поскольку δQ не является полным дифференциалом, теплоемкость c газов будет зависеть от условий теплообмена при нагреве газа.

Для изотермического процесса, т. е. для процесса, протекающего при полном теплообмене с окружающей средой, $T = \text{const}$ и, значит, по уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \text{const}$ имеем $dT = 0$ при $\delta Q \neq 0$ так, что теплоемкость $c = c_T = \infty$.

Поскольку для идеального газа $U_п = 0$, то при $T = \text{const}$ из уравнения первого начала термодинамики (17,2) следует

$$U = U_к + U_с = \text{const}.$$

При $dU = 0$

$$\delta Q = \delta A = pdV = RT\frac{dV}{V}. \qquad (17,5)$$

После интегрирования в пределах от V_1 до V_2 получим выражение работы при изотермическом расширении газа

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (17,6)$$

Изохорический процесс характерен постоянством объема газа, так что $dV = 0$ и, значит, $\delta A = 0$. Тогда из уравнения (17,4) следует, что $dQ = cdT = c_V dT$, или теплоемкость газа

$$c = c_V. \tag{17,7}$$

Уравнение изохоры может быть записано при этом в виде

$$pV^{k \to \infty} = \text{const}.$$

Для изобарического нагрева газа ($p = \text{const}$), согласно формуле (17,4) и уравнению Клапейрона, будем иметь

$$\delta Q = c_V dT + pdV = (c_V + R)\, dT = c_p dT, \tag{17,8}$$

и, значит, грамм-молекулярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$c_p = c_V + R. \tag{17,9}$$

Таким образом, универсальная газовая постоянная выражает собой работу расширения одной грамм-молекулы газа при изобарическом нагревании его на один градус.

Уравнение изобары, очевидно, может быть представлено в виде

$$pV^0 = \text{const}.$$

Адиабатический процесс состоит в изменении объема газа при условии термодинамической изоляции системы, так что $\delta Q = 0$, а $dT \neq 0$ и, значит, $c = c_S = 0$. В этом случае из выражения (17,4) имеем

$$0 = c_V dT + pdV \quad \text{и} \quad p = \frac{RT}{V}. \tag{17,10}$$

Отсюда $-c_V \frac{dT}{T} = R \frac{dV}{V}$ или, согласно формуле (17,9),

$$-\frac{dT}{T} = (\gamma - 1)\frac{dV}{V}, \text{ где } \gamma = \frac{c_p}{c_V}.$$

После интегрирования в границах от V_1 при T_1 до V_2 при T_2 получим

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{17,11}$$

или

$$TV^{\gamma - 1} = \text{const} \text{ — уравнение Пуассона}. \tag{17,12}$$

После подстановки в это выражение значения T, равного $T = \frac{pV}{R}$, получим уравнение адиабаты

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \tag{17,13}$$

Работа адиабатического расширения газа, совершаемая против внешних и внутренних сил, представится в виде

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV;$$

полагая $pV^{\gamma} = a' = pV \cdot V^{\gamma-1} = RTV^{\gamma-1}$, получаем

$$A = \frac{a'}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right) = \frac{R}{(\gamma-1)}(T_1 - T_2), \qquad (17,14)$$

т. е. работа определяется значением разности температур в начале и в конце процесса.

На рис. 17-1 показаны графики зависимости $p = f(V)$ для четырех рассмотренных основных процессов в газе при одинаковых исходных значениях p и V. Как видно, всю совокупность термодинамических процессов в газах можно представить единым уравнением политропы вида

$$pV^n = \text{const}, \qquad (17,15)$$

где n изменяется в пределах от 0 до ∞; $n = 1$ для изотермы, $n = \gamma = \frac{c_p}{c_V}$ для адиабаты.

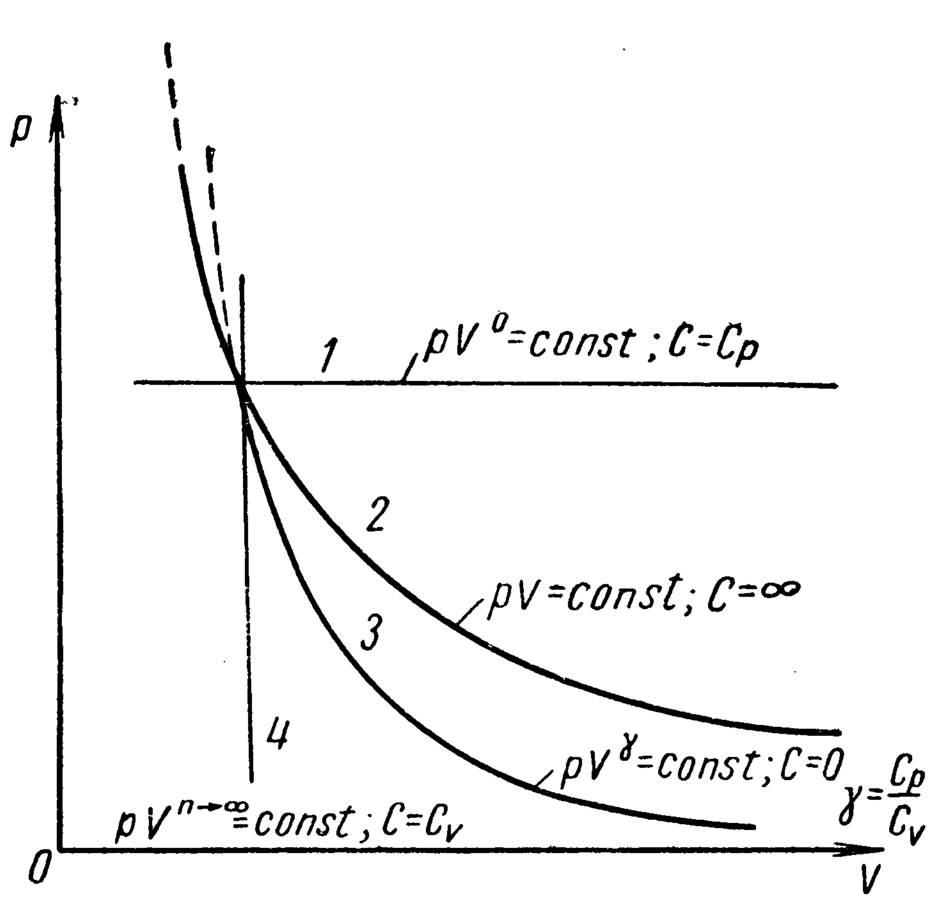


Рис. 17-1. Графики основных термодинамических процессов:
1 — изобара; *2* — изотерма; *3* — адиабата; *4* — изохора

Первое начало термодинамики определяет внутреннюю энергию газа, как некоторую термодинамическую функцию состояния системы. Если к этой внутренней энергии U присоединить (из уравнения состояния газа) энергию образования данного состояния газа, то полученная величина полного теплосодержания газа будет также функцией состояния системы и называется энтальпией I. Таким образом,

$$I = U + pV. \qquad (17,16)$$

Понятие о внутренней энергии широко используется в случаях несменяющегося рабочего газового вещества (например, водяного пара). Энтальпия рассматривается при текущем, изменяющемся состоянии рабочего вещества (горючие смеси). Например, теплота испарения некоторого количества вещества равна вызванному испарением приращению энтальпии этого же количества вещества.

Термодинамической функцией, не зависящей от пути перехода газа из одного состояния в другое, а зависящей только от начального и конечного состояния системы, является также величина, называемая энтропией S *.

Для энтропии, как и внутренней энергии, определяемой лишь в размерах своего изменения, требуется установить нулевой уровень.

Изменение этой величины задается отношением отдаваемого или принимаемого тепла к температуре передачи, т. е.

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}. \tag{17,16'}$$

Для изотермического процесса в газе, согласно формуле (17,6),

$$\Delta S = \frac{\Delta A}{T} = R \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{17,17}$$

Так как значение температуры тела пропорционально средней кинетической энергии, приходящейся на одну степень свободы беспорядочного движения газовых молекул, то, следовательно, энтропия газа при температуре T

$$S_T = \int_0^T \frac{1}{T} \delta Q + S_0 \tag{17,18}$$

показывает число «носителей» энергии (обычно на 1 *моль* газа), воспроизводящих тепло. Нулевое значение энтропии ($S_0 = 0$) соответствует такому состоянию газа, при котором отсутствует беспорядочное движение его молекул, что имеет место при температуре абсолютного нуля (третье начало термодинамики, или постулат Нернста). При высокой температуре передачи тепла δQ на одну степень свободы приходится высокое значение энергии движения молекулы, и, следовательно, малое значение изменения энтропии тела δS. Чем ниже температура источника тепла, тем больше носителей, воспроизводящих тепло (больше энтропия источника), и меньше техническая ценность имеющегося запаса тепла. Очевидно, энтропия обладает свойством аддитивности. Все естественные тепловые процессы протекают в направлении выравнивания температуры соприкасающихся тел, так что энтропия нагретого до температуры T_1 тела, отдающего тепло, и энтропия тела, имеющего температуру T_2 и воспринимающего тепло, изменяется, причем

$$\frac{\delta Q}{T_2} - \frac{\delta Q}{T_1} = \delta S_2 - \delta S_1 = S_2 - S_1 > 0,$$

поскольку $T_2 < T_1$. Таким образом, в результате теплопроводности энтропия системы тел возрастает.

---

* Греческое слово εντρεπίν — преобразовать.

При изолированных процессах, протекающих адиабатно, энтропия системы остается постоянной, так как $\delta Q = 0$ и, следовательно, при $T \neq 0$ $\delta S = 0$ ($S = \text{const}$).

Для обратимого цикла изменений состояния газа, график которого образует в координатах (pV) замкнутый контур, очевидно, что

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \qquad (17,18')$$

(В случае необратимого цикла $\oint \frac{\delta Q}{T} > 0.$)

Возрастание энтропии при всех естественно протекающих тепловых процессах выражает лишь невероятностный статистический характер этих процессов и вовсе не исключает иные результаты, однако вероятность их в пределах нашего опыта исчезающе мала.

В соответствии с уравнениями (17,4) и (17,16) первое начало термодинамики может быть записано в виде

$$T\delta S = dU + \delta A = dU + pdV + \delta W \qquad (17,18'')$$

или при $p = \text{const}$ и $T = \text{const}$

$$-dW = d(U + pV - TS) = dF. \qquad (17,19)$$

Здесь $F = U + pV - TS = I - TS$ представляет собой также характеристическую функцию состояния и называется свободной энергией системы.

Молекулярно-статистический смысл понятия энтропии вытекает из вероятностных представлений о состоянии системы.

Пусть малый объем V_1 составляет $\frac{1}{x}$ часть объема V_2, так что $\frac{V_2}{V_1} = x \gg 1$. Вероятность пребывания одной молекулы в объеме V_2 составляет $w_2 = 1$, а в объеме V_1 — только $w_1 = \frac{1}{x}$. Такое же рассуждение относительно N_0 молекул, согласно теореме об умножении вероятностей для совокупных событий, приводит к результату, что

$$w_2 = 1 \quad \text{и} \quad w_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{N_0}.$$

В таком случае вероятность обнаружения молекул в большом объеме превышает вероятность обнаружения их в малом объеме, т. е. термодинамическая вероятность состояния газа будет равна

$$w = \frac{w_2}{w_1} = x^{N_0},$$

так что

$$\ln w = N_0 \ln x = \frac{R}{k} \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (17,20)$$

Отсюда, согласно выражениям (17,17) и (17,18),

$$R \ln \frac{V_2}{V_1} = S = k \cdot \ln w. \qquad (17,21)$$

Таким образом, в молекулярно-статистическом смысле энтропия представляет собой величину, пропорциональную логарифму вероятности термодинамического состояния вещества. В соответствии с известным принципом Лешателье всякая система всегда стремится перейти в наиболее вероятное состояние, что и совпадает с ростом энтропии во всех естественных процессах.

При температуре абсолютного нуля внутренняя энергия системы распределена между частицами вещества единственно возможным образом (полностью упорядоченное состояние), так что термодинамическая вероятность этого состояния равна единице, или, согласно выражению (17,21), энтропия системы равна нулю. Для отбора конечного тепла от системы вблизи температуры абсолютного нуля требуется, чтобы в системе было недостижимо большое число носителей энергии неупорядоченного движения. Таким образом, постулат Нернста вместе с тем есть теорема о недостижимости температуры абсолютного нуля посредством какого-либо конечного реального процесса.

Лекция 18

ФИЗИЧЕСКИЕ СТАТИСТИКИ

Как было выяснено, в зависимости от способа сообщения энергии (тепла) газу, его грамм-молекулярная теплоемкость может принимать значения от нуля до ∞. Из трех основных термодинамических параметров p, V и T температура T входит в определение теплоемкости $c = \frac{dQ}{dT}$, так что изучению подлежат c_p и c_V. Связь между этими грамм-молекулярными теплоемкостями газа приведена в выражении (17,9).

Пользуясь классическим принципом равномерного распределения энергии молекулярного движения по степеням свободы и основным положением кинетической теории (14,2) газов, можно считать, что на каждую степень свободы поступательного движения молекул 1 *моля* газа приходится одна треть от $\frac{3}{2}RT$, т. е. $\frac{1}{2}RT$. При нагревании 1 *моля* газа на 1 градус прирост энергии на каждую степень свободы будет

$$\frac{1}{2}R(T+1) - \frac{1}{2}RT = \frac{1}{2}R \approx 1\ \frac{\textit{кал}}{\textit{град} \cdot \textit{моль}} = 4{,}186\,\frac{\textit{дж}}{\textit{град} \cdot \textit{моль}}. \quad (18{,}1)$$

При равномерном распределении энергии по степеням свободы и при учете не только поступательного, но и вращательного и колебательного движений атомов в молекулах (рис. 18-1), т. е. при предположении, что на молекулу газа приходится i степеней свободы движения, в общем случае многоатомных молекул получим

$$c_V = i\,\frac{\textit{кал}}{\textit{град} \cdot \textit{моль}}. \quad (18{,}2)$$

Таблица 3

Атомность молекул газа	Число степеней свободы при движении				
	поступательном	вращательном	колебательном	$c_V = i \frac{кал}{град \cdot моль}$	$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{R}{i}$
Одноатомные	3	—	—	3	5/3
Двухатомные	3	2	$2 \times 1 = 1$	от 3 до 7	$1 \div 2$
Трехатомные	3	3	$2 \times 3 = 6$	от 3 до 12	стремится к 1

В табл. 3 содержатся результаты подсчета значений c_V согласно классическому принципу распределения энергии по степеням свободы для молекул различной атомности.

Для одноатомных газов (паров металлов, инертных газов) грамм-молекулярная теплоемкость c_V, независимо от температуры газа и в полном соответствии с экспериментами, оказалась равной 3 *кал/град*. При низких температурах вращательное и колебательное движения атомов в молекулах отсутствуют у всех газов, и их теплоемкость c_V при этом также равна $3 \frac{кал}{град \cdot моль}$. Для двухатомного газа опыт в общем подтверждает результаты подсчета по классической теории. Теплоемкость у этих газов зависит от температуры и меняется от 3 *кал/град · моль* при низких температурах (только поступательное движение) до 7 *кал/град · моль* при высоких температурах, когда представлены в равной мере все виды движения атомов.

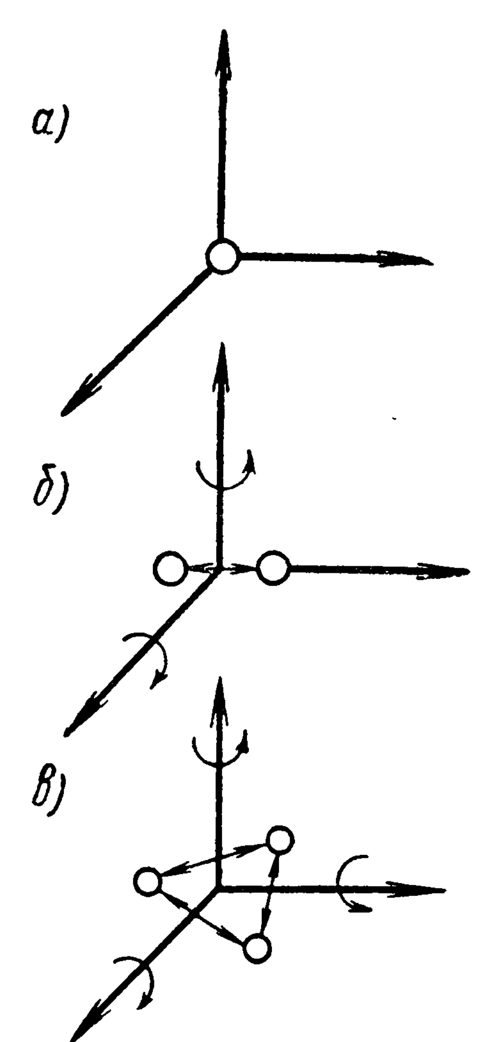


Рис. 18-1. Схематическое изображение движений атомов для молекул различной атомности:

а) одноатомная молекула (3 степени свободы); *б*) двухатомная молекула (3—7 степеней свободы); *в*) трехатомная молекула (3—12 степеней свободы)

Для высоких температур все виды движения атомов можно считать равновозможными, и c_V складывается из трех слагаемых:

$$c_V = c_{пост} + c_{вр} + c_{кол}. \qquad (18,3)$$

Температура, при которой в этом уравнении сказывается колебательное движение, составляет несколько тысяч градусов (6000° К для H_2; 2250° К для O_2). При T = 300° К

$$c_{кол} \cong 0,05 \ кал/град \cdot моль.$$

Энергия вращения при низких температурах исчезающе мала. Она начинает сказываться только при температурах в сотни градусов (86° К для H_2; 780° К для O_2).

Таблица 4

Газ	Молекулярный вес	c_V	c_p	$\frac{c_p}{c_V}$
		кал/град · моль		
He	4	3,02	5,00	1,66
H_2	2	4,89	6,90	1,41
N_2	28	4,95	6,95	1,40
O_2	32	5,02	7,00	1,40
Воздух	29	4,96	6,96	1,40
CO_2	44	6,87	8,85	1,30
NH_3	17	6,54	8,49	1,29

Примечание. Значения c приведены при $t = 18^0$ С $= 291,15^0$ К.

При подсчете степеней свободы считалось, что энергия исчезающе мала, если молекула вращается вокруг оси, проходящей через центры атомов (момент инерции $I = 0$), и что на каждое из трех возможных направлений колебаний приходится два независимых параметра (см. рис. 18-1) (энергия колебаний определяется амплитудой и частотой колебаний). Однако опытные данные показывают плавный ход изменений теплоемкости с температурой, а не ступенями (рис. 18-2), как можно было бы ожидать по классической теории теплоемкости согласно значениям, приведенным в табл. 3. Еще большее несоответствие между результатами, полученными теоретически и экспериментально, отмечается для многоатомных молекул, как это следует из данных табл. 3 и 4.

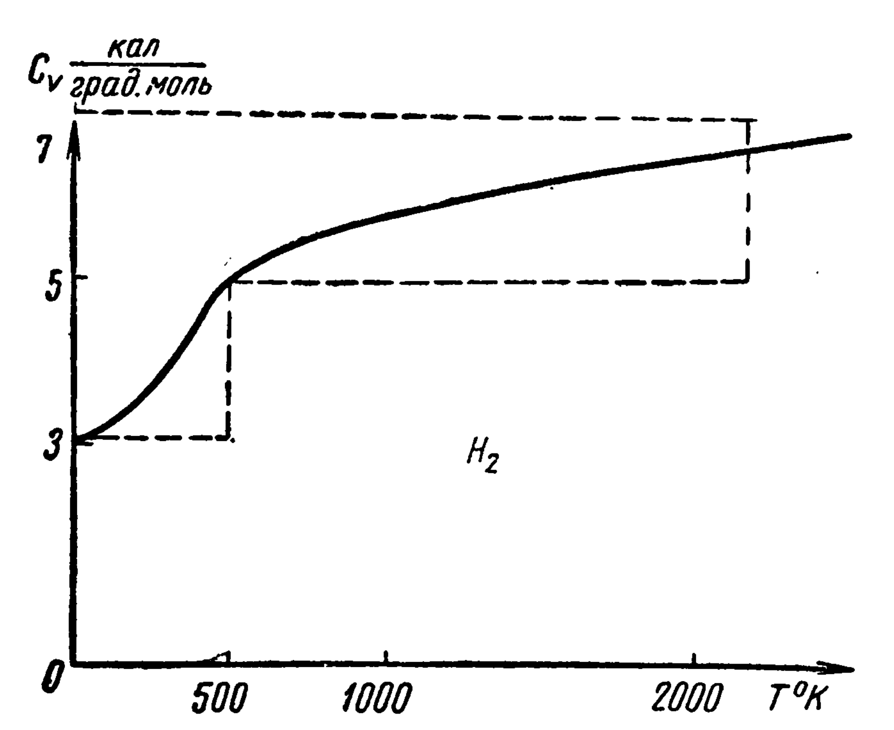


Рис. 18-2. Зависимость грамм-молекулярной теплоемкости c_V для водорода от температуры:

сплошная кривая получена при экспериментальном расчете; пунктирная — по классической статистике

Таким образом, классическая теория полностью подтверждается только для одноатомных газов при всех температурах и для всех газов, но при низких температурах. По этой теории теплоемкость газов c_V есть ступенчатая функция атомности и температуры газа (см. рис. 18-2).

Получившееся расхождение для многоатомных газов показывает, что классический принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы не может быть распространен по степени свободы периодических движений.

Выход из затруднений классической теории был найден на основе квантовых представлений об энергии периодических процессов [см. соотношение (1,7)].

Согласно классической статистике, применимой при высоких температурах ко всем газам, $\frac{1}{kT}\varepsilon = \beta\varepsilon \ll 1$.

Это заключение предполагает, что в периодических движениях, так же как и в поступательных, энергия осцилляторов * может быть в любых количествах (равна ε) и любого качества (любой частоты ν) и тогда, пользуясь выражением (14,8), получаем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{d}{d\beta} \ln \left(\frac{1}{\beta}\right) =$$
$$= \frac{1}{\beta} = kT = f(T), \qquad (18,4)$$

так что энергия на 1 степень свободы периодического движения будет равна $\bar{w}_п = \frac{1}{2} kT$.

Однако представление о квантовании энергии $\varepsilon_0 = h\nu$ периодических процессов вызывает необходимость замены интегрирования суммированием.

Действительно, принимая, что энергетические уровни гармонического осциллятора частоты $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ составляют ряд

$$\varepsilon = n \cdot h\nu = n\varepsilon_0 = n\hbar\omega, \qquad (18,5)$$

где n — целое число (квантовое число), для среднего значения энергии на одно направление периодического колебательного движения получим:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_1^\infty n\varepsilon_0 e^{-n\beta\varepsilon_0}}{\sum_1^\infty e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_1^\infty e^{-\beta n\varepsilon_0} = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} =$$
$$= \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \qquad (18,6)$$

* Под осциллятором следует понимать колеблющуюся систему.

Энергия на 1 степень свободы периодического процесса составит

$$\bar{w}_{п} = \frac{1}{2}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \varphi(T, \nu). \qquad (18,6')$$

В таком случае теплоемкость многоатомных газов, складывающаяся из энергий поступательного и периодических движений, будет функцией не только температуры, но и частоты этих периодических движений, т. е.

$$c_V = c_{пост} + c_{вр} + c_{кол} = \varphi(T, \nu).$$

При высоких температурах, когда $\beta = \frac{1}{kT} \to 0$, разложение в ряд дает результат

$$e^{\beta\varepsilon_0} = e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \beta h\nu + \beta^2 (h\nu)^2 + \ldots \cong 1 + \beta h\nu,$$

и, значит, $\bar{w}_{пост} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2}kT$, т. е. результат совпадает с классическим.

Как упоминалось, при низких температурах остается только поступательное движение молекул. Колебательное и вращательное движение молекул замедляется, поэтому их взнос в теплоемкость становится исчезающе малым. Это приводит к скачкообразному уменьшению теплоемкости.

Квантовая теория теплоемкости, устранившая расхождение между теоретическими и экспериментальными данными, показывает, что различным видам микрообъектов присуща своя характерная статистика. Молекулы, отличающиеся тем или иным параметром состояния, независимо друг от друга подчиняющиеся в движении классической механике и находящиеся в термодинамическом равновесии при постоянном общем числе частиц, характеризуются классической статистикой, в которой распределение частиц по энергиям, согласно выражению (15,7), имеет вид:

$$dn_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n \sqrt{\beta\varepsilon} \cdot e^{-\beta\varepsilon} d(\beta\varepsilon) = k_{Б-М} \sqrt{\varepsilon} f_{Б-М}(\varepsilon)\, d\varepsilon \qquad (18,7)$$

— статистика Больцмана — Максвелла, где

$$f_{Б-М} = n \cdot e^{-\beta\varepsilon},$$

$$\beta = \frac{1}{kT}.$$

Для неотличимых друг от друга микрообъектов, таких, как кванты излучений (фотоны) и электроны, необходимы иные, квантовые статистики. В изложенной теории теплоемкости использовались лишь квантовые представления об энергии периодических движений. Для удовлетворительной квантовой статистики фотонов и электронов этого недостаточно.

Как ранее отмечалось, каждой микрочастице, подчиняющейся квантовой механике, соответствует некоторая волновая функция $\psi(x, y, z, t)$. Эта функция, записанная для совокупности многих частиц, может быть симметричной, т. е. не изменять знака при перемене координат двух каких-либо неразличимых частиц (частицы с целым спином): фотонов, мезонов, либо может быть антисимметричной в указанном смысле (частицы с полуцелым спином, электроны, протоны, нейтроны). К этому отличию волновых функций необходимо прибавить еще исключение Паули, согласно которому в одинаковом квантовом состоянии (одинаковы все четыре квантовые числа) не может находиться более чем один электрон (или протон в системе протонов). Принцип Паули и условия симметрии непосредственно не вытекают из квантовой механики и вводятся в квантовую статистику как дополнительные принципы.

Таким образом, для постоянного числа частиц с целым спином и, следовательно, с симметричными волновыми функциями распределение по энергиям представляется в виде:

$$dn_\varepsilon = 4\pi n \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{\varepsilon}\, \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1}\, d\varepsilon = k_{Б-Э} \sqrt{\varepsilon} F_{Б-Э}(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad (18,8)$$

— статистика Бозе — Эйнштейна.

Величину $A = e^{-\alpha} = \frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}$ называют параметром вырождения газа, показывающим степень отклонения его статистики от классической статистики (n — объемная концентрация частиц). Для световых квантов $A = 1$; при $\alpha \gg 0$ и $A \ll 1$ (высокие температуры) выражение (18,8) переходит в классическое (18,7). Случай $\alpha < 0$ исключается, так как знаменатель в формуле (18,8) не может обратиться в нуль.

Квантовое распределение частиц по энергиям для сильно вырожденного газа ($A \gg 1$), каким является электронный газ в металле, по Ферми — Дираку с учетом исключения Паули представляется в виде:

$$dn_\varepsilon = 4\pi n \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\varepsilon}\, \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} + 1}\, d\varepsilon = k_{Ф-Д} \sqrt{\varepsilon} \varphi_{Ф-Д}(\varepsilon)\, d\varepsilon, \quad (18,9)$$

причем величина α может иметь любые значения.

Для сравнения трех физических статистик как методов рассмотрения усредненных свойств систем, состоящих из большого числа микрообъектов, подчиняющихся известным закономерностям, целесообразно воспользоваться унифицированными формами выражения для функций распределения частиц по энергиям. Различные статистические подходы связаны с разными свойствами микрообъектов, с их разным распределением по возможным состояниям и с различным числом таких возможных состояний. Основной характеристикой микросостояния, т. е. состояния группы частиц, имеющих

одну и ту же энергию ε_r, является число частиц n_r, составляющих группу. Если g_r будет общим числом возможных состояний, соответствующих энергии частиц ε_r, а $F_c(\varepsilon_r)$ — специфической функцией данной статистики, выражающей вероятность заполнения этих состояний, то число частиц, энергия которых составляет ε_r, будет равно

$$n_r = g_r \cdot F_c(\varepsilon_r). \tag{18,10}$$

Классическая статистика Больцмана — Максвелла служит методом рассмотрения изолированных систем, состоящих из большого постоянного числа различимых, независимых друг от друга частиц, подчиняющихся классической механике. Согласно условию сохранения числа частиц и закону сохранения энергии всей совокупности систем, имеем:

$$N_п = \sum_r n_r = \text{const};$$

$$W_п = \sum_r n_r \cdot \varepsilon_r = \text{const}. \tag{18,11}$$

Термодинамическое равновесие соответствует наиболее вероятному распределению частиц по энергиям, и, следовательно, термодинамическая вероятность, а по выражению (17,20) и энтропия всей совокупности частиц, должны иметь условный максимум. Теория вероятностей и метод Лагранжа, служащий для отыскания условного максимума, приводит к выражению специфической функции этой статистики в виде:

$$F_c(\varepsilon_r) = F_{Б-М}(\varepsilon) = e^{-\beta\varepsilon} = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \tag{18,12}$$

Значение g_r в условиях термодинамического равновесия составляет

$$g_r = \frac{N}{Z_r} = \frac{N}{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}},$$

где $Z_r = \sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}$ — сумма возможных состояний частиц рассматриваемой совокупности. Таким образом, по статистике Больцмана — Максвелла число частиц с энергией ε_r будет равно

$$n_r = g_r \cdot e^{-\beta\varepsilon_r} = g_r \cdot e^{-\frac{\varepsilon_r}{kT}}. \tag{18,13}$$

Квантовая статистика Бозе—Эйнштейна справедлива для частиц, не подверженных ограничительному запрету Паули. Ее исходными положениями служат неразличимость частиц и дискретность квантованных уровней их энергии. При тех же условиях ($N_п$ = const

и $W_п$ = const) и равновесном распределении, аналогично уравнению (18,12), имеем:

$$F_с(\varepsilon_r) = F_{Б-Э}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_r} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\beta\varepsilon_r} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_х}{kT}} - 1}. \quad (18,12')$$

Как было сказано, величина $A = e^{-\alpha} = e^{\frac{\varepsilon_х}{kT}}$ называется параметром вырождения совокупности частиц по сравнению с молекулами идеального газа. Энергия $\varepsilon_х$ (химический потенциал) соответствует приращению свободной энергии системы при увеличении в ней числа частиц данного типа на единицу.

В случае $A \ll 1$, например для газов в нормальных условиях (водород 300° К; нормальное давление; $A = 3 \cdot 10^{-5}$), функция статистики Б—Э переходит в классическую Б—М, поскольку $\beta\varepsilon_r > 0$, и, следовательно, $e^{\beta\varepsilon_r} \gg 1$.

Для фотонов ($\varepsilon_r = h\nu_r$) условие неизменности числа частиц не соблюдается и $\varepsilon_х = 0$; следовательно, для их совокупности имеем [см. (18,10)]:

$$F_{Б-Э}(h\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (18,12'')$$

Таким образом, по квантовой статистике Бозе — Эйнштейна для вырожденных совокупностей частиц ($A \geqslant 1$), когда сумма квантово-возможных состояний меньше числа частиц, так что частицы обладают добавочным свойством «накапливаться по состояниям», при соблюдении условия N_n = const и при равновесном распределении имеем:

$$n_r = g_r \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_r} - 1} = g_r \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_х}{kT}} - 1}. \quad (18,13')$$

Квантовая статистика Ферми — Дирака справедлива для частиц, подчиняющихся исключению Паули, по которому в определенном квантовом состоянии не может быть больше одной частицы совокупности. В этой статистике сумма квантово-возможных состояний превышает число частиц. При соблюдении тех же условий ($N_п$ = const и $W_п$ = const) и при равновесном распределении частиц имеем:

$$n_r = g_r \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_r} + 1} = g_r \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_Ф}{kT}} + 1}. \quad (18,13'')$$

Здесь $e^{\alpha} = e^{-\varepsilon_Ф/kT}$; $\varepsilon_Ф$ — энергия, соответствующая химическому потенциалу рассматриваемой совокупности частиц, или, иначе, энергия уровня Ферми.

Функции распределения, определяющие вероятность заполнения возможных состояний с заданной энергией, во всех статистиках могут быть записаны в единой форме:

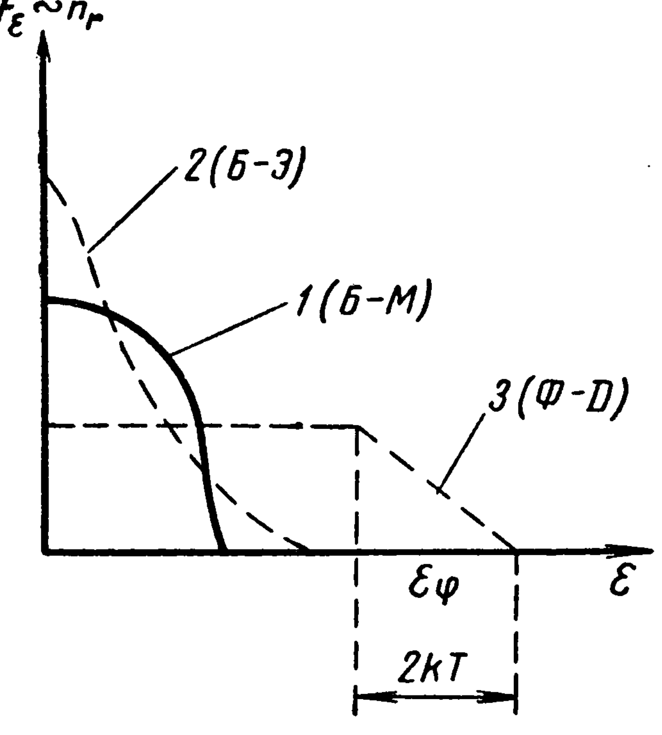


Рис. 18-3. Функции распределения F_ε частиц по энергиям: 1 — по классической молекулярной статистике Максвелла — Больцмана; 2 — по квантовой статистике бозонов, т. е. по статистике совокупности частиц с целым спином (кванты полей, мезоны и некоторые ядра); 3 — по квантовой статистике фермионов, т. е. по статистике совокупности частиц с полуцелым спином, подчиненных исключению Паули (электроны, протоны, нейтроны)

$$F_\varepsilon = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + \delta}. \qquad (18,14)$$

Для распределения М—Б
$\mu = 0$ и $\delta = 0$;
для распределения Б—Э
$\mu = \varepsilon_x$ и $\delta = -1$;
для статистики Ф—Д
$\mu = \varepsilon_Ф$ и $\delta = +1$.

На рис. 18-3 приведены графики специфических функций распределения частиц по энергиям согласно трем рассмотренным физическим статистикам (при $N_п = \text{const}$ и $W_п = \text{const}$). Как видно, распределение Ферми — Дирака характеризуется почти полностью занятыми уровнями ($\varepsilon < \varepsilon_Ф$). Зависимость n_r от значений энергий квантово-возможных уровней ($\varepsilon > \varepsilon_Ф$) сказывается только в области $\pm kT$ вблизи уровня $\varepsilon = \varepsilon_Ф$. В распределении по квантовой статистике Бозе — Эйнштейна, по сравнению с классической статистикой Больцмана — Максвелла, имеется более крутое изменение $n_r = f(\varepsilon_r)$. Частицы с малыми энергиями в распределении Б—Э встречаются чаще, а в распределении Ф—Д реже, чем в классическом.

Лекция 19

ОБРАТИМЫЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ЦИКЛ

Первое начало термодинамики представляет собой обобщенный закон сохранения и превращения энергии.

Из него вытекает, что любой вид энергии может быть выражен в одних и тех же единицах, что один вид энергии через механическую работу, тепло и излучение может преобразоваться в любой другой и что между различными единицами измерения энергии имеются определенные эквиваленты, приведенные в табл. 5.

Как было упомянуто, любой вид энергии может быть полностью преобразован в тепло, однако хаотическое движение молекул и атомов нельзя исчерпать полностью и превратить в другой вид энергии. Беспорядочное движение молекул есть естественное состояние ве-

щества, и, следовательно, тепло, воспринятое рабочим веществом, никаким процессом не может быть полностью преобразовано в механическую работу или другой какой-либо вид передачи энергии. Это положение и составляет второе начало термодинамики. Опираясь на понятие об энтропии, его можно сформулировать как утверждение, что все естественные термодинамические процессы протекают в направлении возрастания энтропии (непревратимости).

Таблица 5

	1 *эрг*	1 *кГм*	1 *дж*	1 *эв*	1 *г*	1 *кал*
1 *эрг*	1	$1{,}02 \cdot 10^{-8}$	10^{-7}	$6{,}2 \cdot 10^{11}$	$1{,}1 \cdot 10^{-21}$	$2{,}4 \cdot 10^{-8}$
1 *кГм*	$9{,}8 \cdot 10^{7}$	1	9,8	$6{,}0 \cdot 10^{19}$	$1{,}07 \cdot 10^{-13}$	2,35
1 *дж*	10^{7}	0,102	1	$6{,}2 \cdot 10^{18}$	$1{,}1 \cdot 10^{-14}$	0,24
1 *эв*	$1{,}6 \cdot 10^{-12}$	$1{,}6 \cdot 10^{-20}$	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$	1	$1{,}8 \cdot 10^{-33}$	$3{,}9 \cdot 10^{-20}$
1 *г*	$9 \cdot 10^{20}$	$0{,}92 \cdot 10^{13}$	$9 \cdot 10^{13}$	$5{,}6 \cdot 10^{32}$	1	$2{,}16 \cdot 10^{13}$
1 *кал*	$4{,}1868 \cdot 10^{7}$	0,427	4,1868	$2{,}57 \cdot 10^{19}$	$4{,}68 \cdot 10^{-14}$	1

Таким образом, свободной энергией, т. е. энергией, которая может быть преобразована в механическую работу, в системе, обладающей различными видами энергии, является только некоторая часть полной энергии.

Убедительным доказательством тому служит значение коэффициента полезного действия некоторой идеальной в отношении цикла работы (цикла Карно) тепловой машины с газообразным рабочим веществом (рис. 19-1).

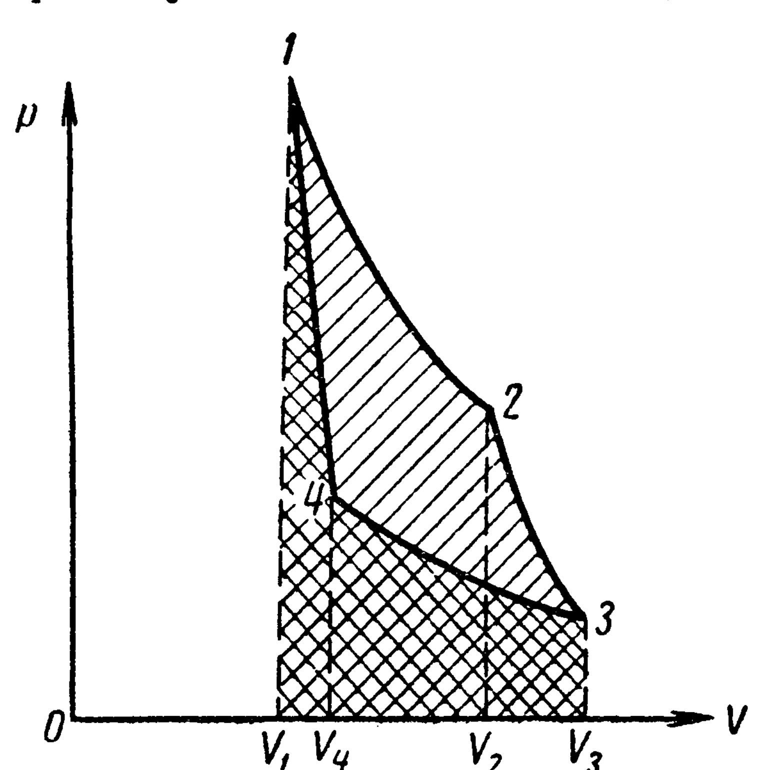


Рис. 19-1. Обратимый цикл Карно: *1—2* — изотерма (T_1 = const); *3—4*—изотерма(T_2 = const; $T_2 < T_1$); *2—3*, *4—1* — адиабаты $\left(\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}\right)$. Площадь *1 2 3 4 1*—полезная работа

Точка *1* отвечает начальным параметрам рабочего вещества при температуре T_1. Участок кривой *1—2* представляет собой график изотермического процесса, при котором газ совершает работу расширения от объема V_1 до V_2, принимая тепло δQ_1 от неограниченного резервуара тепла постоянной температуры T_1. Очевидно, для 1 грамм-моля газа работа расширения составит (см. 17,6)

$$\delta A_1 = \delta Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (19,1)$$

Энтропия рабочего вещества изменится при этом на величину

$$\delta S_1 = \frac{\delta Q_1}{T_1}. \qquad (19,2)$$

На участке *2—3* цикла газ, отделенный от источника тепла и изолированный от окружающей среды, адиабатически расширяется. Производимая им внешняя работа осуществляется за счет внутренней энергии газа, что влечет за собой понижение его температуры до $T_2 < T_1$. Согласно уравнению Пуассона (17,11), имеем

$$V_2^{\gamma-1} \cdot T_1 = V_3^{\gamma-1} \cdot T_2. \tag{19,3}$$

Энтропия рабочего вещества при этом не изменяется (адиабатический процесс есть изоэнтропийный процесс). Приведя рабочее вещество в соприкосновение с неограниченным приемником тепла (холодильником), обладающим температурой T_2, и производя работу над газом при изотермическом сжатии его до объема V_4, будем иметь

$$\delta Q_2 = \delta A_2 = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \tag{19,4}$$

Энтропия рабочего вещества при этом вновь изменится на $\delta S_2 = \frac{\delta Q_2}{T_2}$, причем, согласно (17,8),

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} - \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0.$$

Объем V_4 всегда может быть выбран так, чтобы участок *4—1* представился графиком адиабатического сжатия газа до его первоначального объема V_1. Температура газа повысится при этом как раз до T_1, если выполнится условие, что

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Получившийся замкнутый обратимый цикл Карно является идеальным; в нем отсутствуют необратимые процессы, и поэтому он наиболее эффективен относительно преобразования тепла в работу. По порядку процессов *1—2—3—4—1* цикл соответствует режиму теплового двигателя, а по *1—4—3—2—1* — режиму холодильной машины. Коэффициент полезного действия такой идеальной тепловой машины, согласно уравнениям (19,1) и (17,14), будет равен

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{\delta Q_1 - \delta Q_2}{\delta Q_1} = \frac{\delta A_{1-2} + \delta A_{2-3} - \delta A_{3-4} - \delta A_{4-1}}{\delta A_{1-2}}. \tag{19,5}$$

Однако $|\delta A_{2-3}| = |\delta A_{4-1}| = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$ и, согласно формулам (19,3) и (19,4), $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_4}{V_1}$, так что

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{\delta A_{1-2} - \delta A_{3-4}}{\delta A_{1-2}} = \frac{R \ln \frac{V_2}{V_1}(T_1 - T_2)}{R \ln \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{19,6}$$

Таким образом, коэффициент полезного действия в самом совершенном для преобразования тепловой энергии случае зависит

исключительно от разности температур источника и холодильника. Согласно выражению (19,6), полное преобразование тепла в механическую работу ($\eta = 1$) могло бы иметь место либо при бесконечно высокой температуре источника ($T_1 = \infty$), либо при температуре холодильника, равной абсолютному нулю ($T_2 = 0$). Ни то, ни другое практически недостижимо, поэтому в механическую работу может быть преобразована лишь некоторая доля тепла. Она будет определена, если левую и правую части выражения (19,6) умножить на δQ_1. При этом в левой части, очевидно, будет тепло, принятое рабочим веществом и преобразованное в механическую работу (свободная энергия), а в правой — разность между всем теплом, принятым рабочим веществом, и его непревратимой частью, т. е.

$$\delta A = \eta \cdot \delta Q_1 = \delta Q_1 - \frac{\delta Q_1}{T_1} \cdot T_2. \tag{19,7}$$

Из правой части этого равенства следует, что при заданной температуре холодильника T_2 свободная энергия будет тем больше, чем меньше величина $\frac{\delta Q_1}{T_1} = \delta S_1$, представляющая собой изменение энтропии при передаче тепла от источника к рабочему веществу.

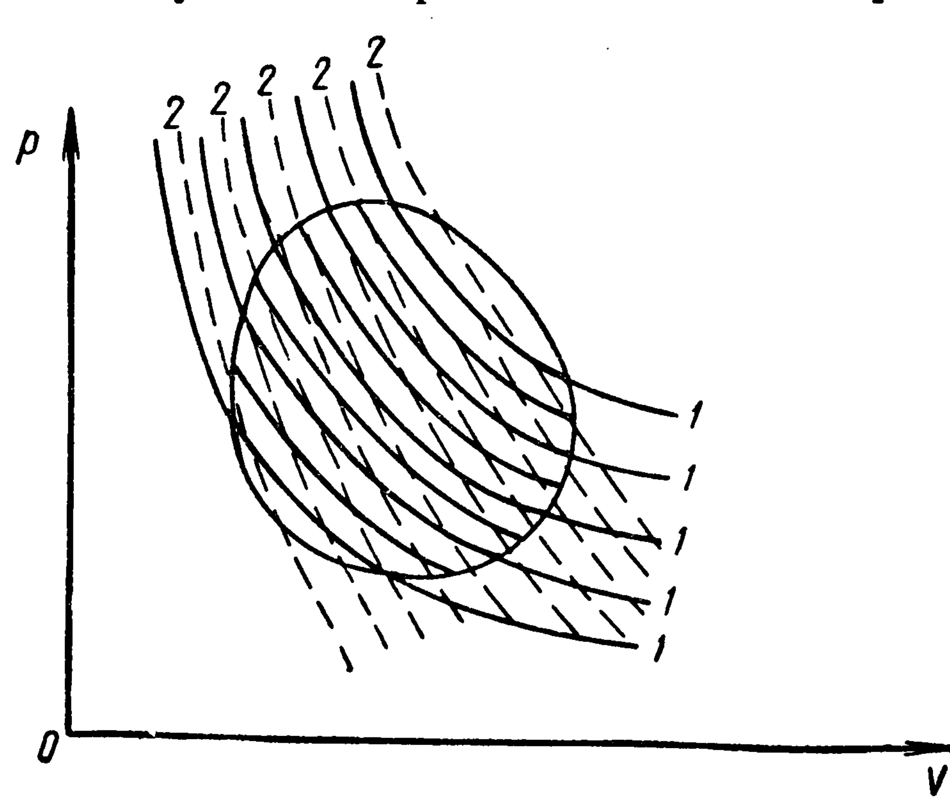


Рис. 19-2. Замкнутый контур произвольного обратимого цикла.

Сетка изотерм (сплошные линии) и адиабат (пунктирные линии) делит его площадь на элементарные циклы Карно

Таким образом, выражение (19,7) может быть записано в виде

$$\delta A = \delta Q_1 - T_2 \delta S_1. \tag{19,8}$$

Из уравнений (19,5) и (19,6) следует также, что $\frac{\delta Q_2}{\delta Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$, и значит для обратимого замкнутого цикла $\delta S_1 = \delta S_2$ (рис. 19-2) или [см. (17,18)]

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

В общем случае, когда имеются необратимые процессы, изменение энтропии

$$S_к - S_н = \oint \frac{\delta Q}{T} \geqslant 0, \tag{19,9}$$

и выражение (19,7) принимает вид

$$\delta A < \delta Q - \frac{\delta Q}{T_1} T_2. \tag{19,10}$$

На основе цикла Карно второе начало термодинамики может быть сформулировано следующим образом: «Невозможно построить такой тепловой двигатель, который бы производил механическую работу, причем единственным явлением в окружающей среде было бы охлаждение нагретого тела», иначе говоря, «для работы тепловой машины недостаточно иметь только источник тепла, но необходим и приемник тепла (холодильник)».

Из графика, представленного на рис. 19-1, вытекает, что площадь фигуры цикла в некотором масштабе выражает собой механическую работу, которую может совершить тепловой двигатель. Если $T_1 = T_2$, то эта работа равна нулю.

Объединяя первое и второе начала термодинамики, можно, согласно выражениям (17,16′) и (17,4), записать уравнение термодинамики в общем виде, связывающем изменения внутренней энергии и энтропии:

$$dU = TdS - \delta A. \qquad (19,11)$$

Из выражения (19,6) можно установить физический смысл термодинамической шкалы температур (шкалы Кельвина). За нуль этой абсолютной шкалы может быть принята температура холодильника такой идеальной тепловой машины, которая имеет коэффициент полезного действия (см. 19,6), равный единице при любом нагревателе. Разница температуры в 1 градус будет при этом той разностью температур нагревателя и холодильника, при работе с которой идеальная тепловая машина имела бы коэффициент полезного действия, равный величине, обратной температуре нагревателя по термодинамической шкале. Так как абсолютный нуль температуры недостижим, то основной температурной реперой шкалы Кельвина принята фиксированная температура тройной точки воды ($T_{т.\,т.} = 273{,}16°$ K).

Лекция 20

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Реальный газ отличается от идеального тем, что его молекулам свойственны конечные размеры и взаимодействия. Какую бы форму ни имели молекулы газа, но свободный для их движения объем всегда меньше объема V сосуда, в котором заключен газ. Это означает, что если в уравнении Клапейрона, согласно кинетической теории газов, V представляет объем, свободный для движения молекул, то в случае реальных газов этот объем будет (V—b), где b — поправка на размеры молекул. В случае реальных газов нельзя пренебрегать и силами взаимодействия между молекулами. При адиабатическом расширении в вакуум реальные газы охлаждаются. Это значит, что газом производится работа против внутренних сил сцепления между молекулами. Очевидно, эти силы будут тем больше, чем больше плотность газа. Создаваемое силами взаимодействия

внутреннее давление p_i, направленное так же, как и внешнее давление, во внутрь газа, будет пропорционально как числу притягивающих (n), так и числу притягиваемых (n) молекул в единице объема газа, т. е.

$$p_i = an^2 = \alpha \left(\frac{N_0^2}{V^2}\right) = \frac{a}{V^2}, \qquad (20,1)$$

где a — характеристический для газа коэффициент связи молекул, V — грамм-молекулярный объем газа.

В таком случае, если сохранить за p значение внешнего давления, уравнение состояния реального газа, записанное для 1 грамм-моля газа, будет иметь вид

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad (20,2)$$

— уравнение Ван-дер-Ваальса.

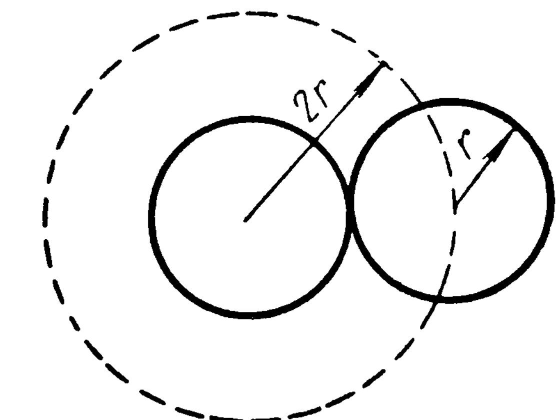


Рис. 20-1. К определению величины поправки b на размеры молекул в уравнении Клапейрона (r — радиус статистической сферической молекулы)

Многие уточняющие поправки к этому приближенному уравнению не вносят чего-либо принципиально нового и также приводят лишь к приближенным результатам.

Рассматривая «статистические» сферические молекулы радиуса r, можно приближенно оценить величину поправки b на размеры молекул (рис. 20-1).

Как видно, объем, недоступный для перемещения молекул из-за их соударений, приходящийся на каждую пару сталкивающихся молекул, составляет $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8\omega$, где ω — объем одной сферической молекулы. Следовательно, $b \approx 4\sum_{1}^{N}\omega_i$, т. е. составляет примерно учетверенный (несколько меньший с учетом несферичности молекул) объем самих молекул. Полагая $r \approx 5 \cdot 10^{-8}$ *см* или $\omega = 4 \cdot 10^{-28}$ *см*^{3}, имеем, например, для газа при нормальных условиях $b \leqslant 5 \cdot 10^{-2} V$.

Внутреннее давление $p_i = \frac{a}{V^2}$ вследствие малости характеристического параметра a при обычных плотностях газов, соответствующих внешнему давлению 1 *атм* $\cong 9{,}81 \cdot 10^4$ *н/м*^{3}, составляет около 0,01 *атм*. Таким образом, поправки к уравнению Клапейрона в применении к реальным газам практически потребуются лишь при давлениях газа, превышающих сотни атмосфер.

Уравнение Ван-дер-Ваальса (20,2) оказывается уравнением третьей степени относительно V:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0. \qquad (20,3)$$

Таким образом, при известных значениях a и b и заданных значениях p и T имеются, вообще говоря, три решения этого уравнения ($V_1 < V_2 < V_3$). Поскольку свободный член в уравнении (20,3)

вещественен, корни уравнения могут быть либо все три вещественные, либо один веществен, а два других мнимые сопряженные. Задаваясь различными значениями p и решая уравнение Ван-дер-Ваальса (20,3) для нескольких избранных, но постоянных значений температуры газа T, можно построить семейство изотерм, представленных на рис. 20-2.

Как видно, при температурах $T > T_к$ для любого значения давления p газа уравнение (20,3) имеет лишь один вещественный корень (один объем газа). В области $T < T_к$ имеется интервал давлений, в котором уравнение Ван-дер-Ваальса имеет три вещественных корня. Наибольший корень V_3 соответствует наименьшей плотности вещества и относится к газовому состоянию; наименьший корень V_1 — к наиболее плотному бесструктурному состоянию, т. е. к жидкости; средний корень V_2, приходящийся на восходящую ветвь изотермы Ван-дер-Ваальса, соответствует неустойчивому, а поэтому практически ненаблюдаемому состоянию. Действительно, любое флуктуационное изменение объема V_2 влечет за собой такое изменение давления газа, при котором точка изотермы, характеризующая его состояние, неизбежно переходит с восходящей ветви кривой на ниспадающую ветвь. В точке K на изотерме $T_к$ все три корня уравнения Ван-дер-Ваальса вещественны и равны ($V_1 = V_2 = V_3 = V_к$). Такое состояние газа называется **к р и т и ч е с к и м** и ему отвечают определенные значения $V_к$, $p_к$ и $T_к$. Так как, согласно теореме Безу $(V - V_к)^3 = 0$, то из сравнения коэффициентов при соответствующих степенях с (20,3) получим

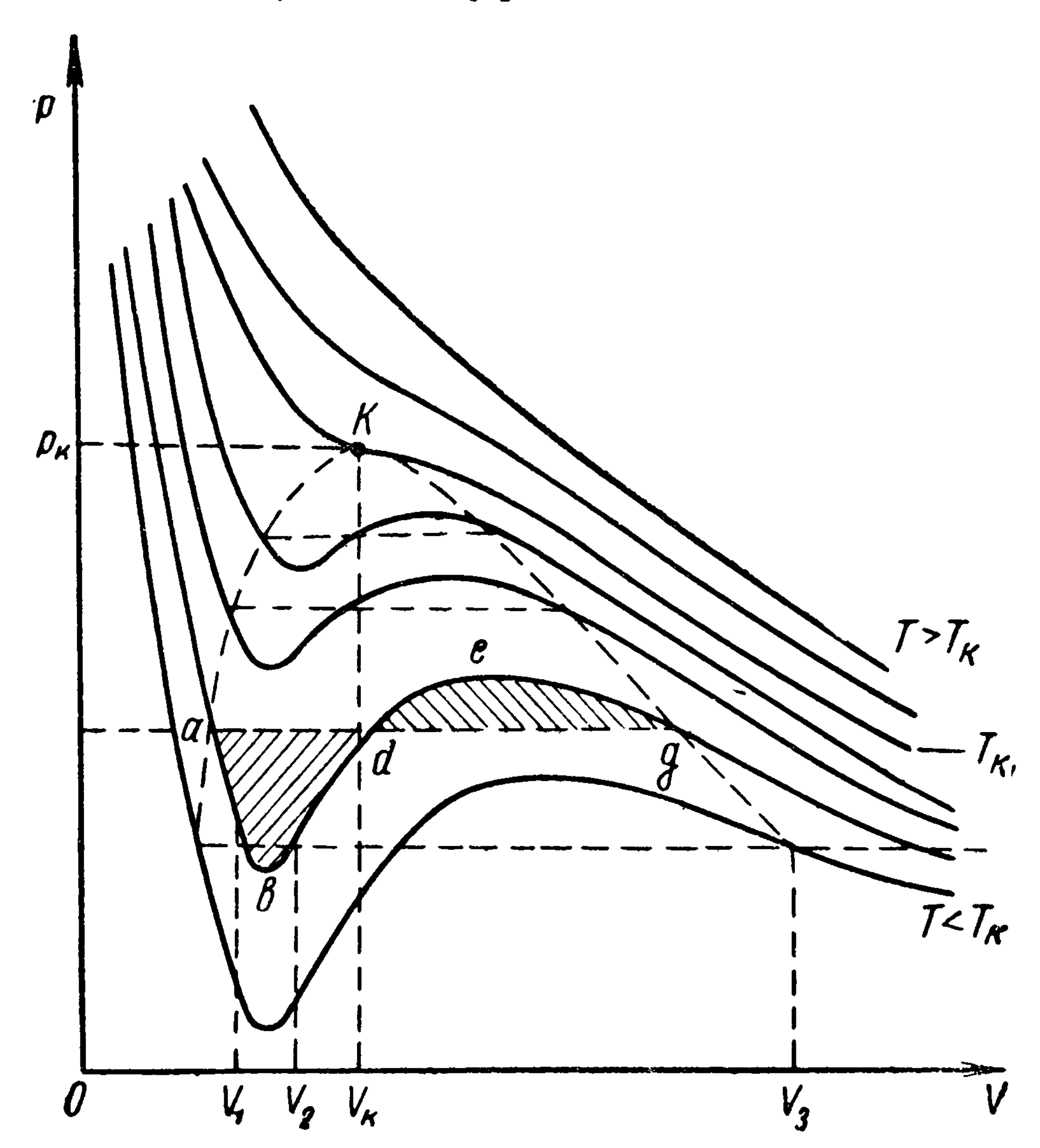


Рис. 20-2. Семейство изотерм Ван-дер-Ваальса: K — критическая точка; aKg — пограничная кривая. Площадь abd равновелика deg

$$\left.\begin{aligned} 3V_к &= b + \frac{RT_к}{p_к}, \\ 3V_к^2 &= \frac{a}{p_к}, \\ V_к^3 &= \frac{ab}{p_к}, \end{aligned}\right\} \qquad (20,4)$$

откуда

$$3b = V_к;$$

$$p_к = \frac{a}{27b^2}$$

или

$$p_к V_к = \frac{3}{8} R T_к. \qquad (20,5)$$

Таким образом, по экспериментально найденным значениям $V_к$ и $T_к$ при известной массе вещества из системы уравнений (20,5) могут быть определены параметры газа a и b и значение $p_к$ и, наоборот, по известным a, b и R — критические параметры газа ($p_к$, $T_к$ и соответствующий массе газа объем $V_к$).

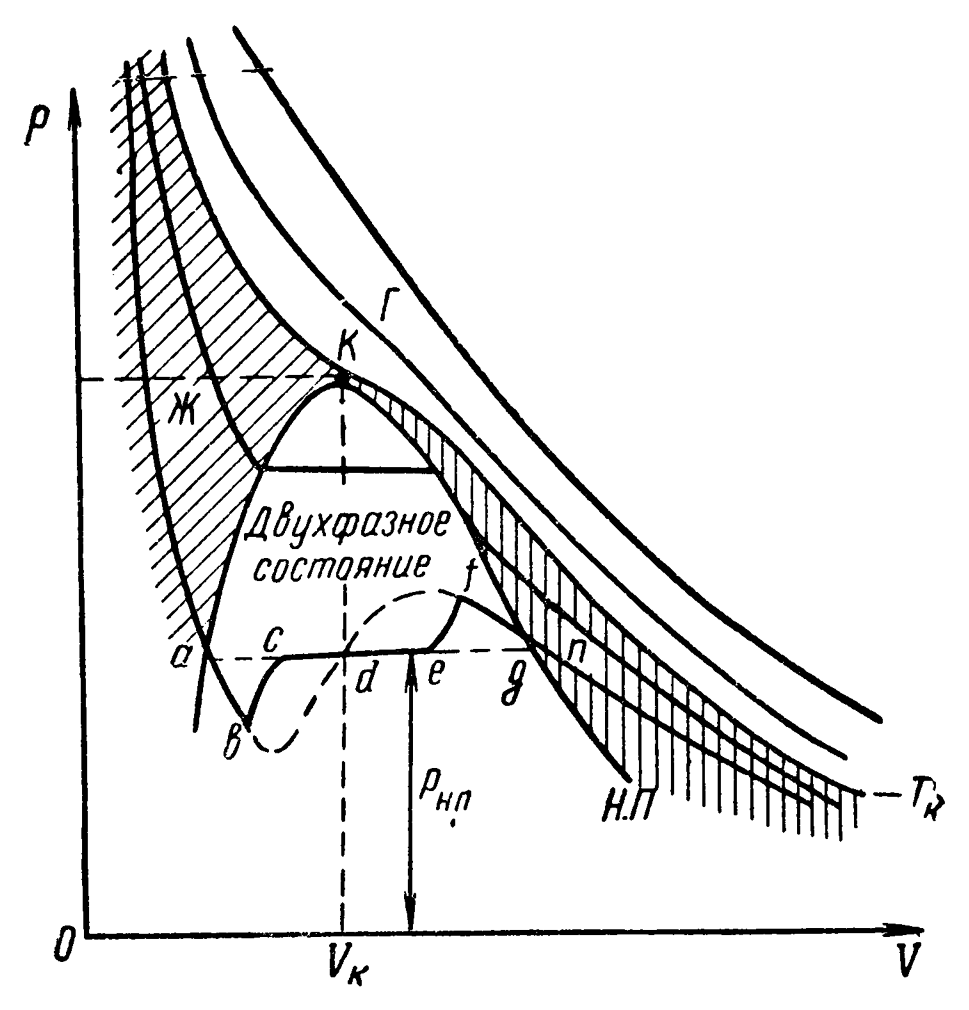


Рис. 20-3. Экспериментальные изотермы реальных газов:

K — критическое состояние; ab — растянутая жидкость; fg — пересыщенный пар; kg — линия насыщенного пара

В табл. 6 приведены значения $p_к$ и $T_к$ для некоторых жидкостей.

Как видно, критическая температура $T_к$ приблизительно в 1,5 раза превышает температуру кипения жидкости $T_{кип}$ при нормальном внешнем давлении.

Если для каждой изотермы провести горизонтали $p = \text{const}$, разделяющие перегибы изотерм на две равновеликие по площади петли, то тем самым выделится пограничная колоколообразная кривая, в вершине которой находится критическая точка (см. рис. 20-2).

Экспериментальные изотермы реальных газов естественно не имеют восходящей ветви (рис. 20-3). Вместо неустойчивого состояния наблюдается двухфазное состояние: сжиженный газ и над ним

Таблица 6

Жидкость	$p_к$ *атм*	$T_к$ ° K	$T_{кип}$ при 760 *мм рт. ст.*	Жидкость	$p_к$ *атм*	$T_к$ ° K	$T_{кип}$ при 760 *мм рт. ст.*
Вода	205	647	373	Кислород	50	150	90
Эфир	36	448	306	Азот	33	127	77
Бензол	48	562	353	Водород	13	33	21
Углекислота	73	304	195	Гелий	2,3	5,1	4,2

его насыщенные пары. Под насыщенным паром, как известно, подразумевается пар, находящийся в динамическом равновесии с жидкостью. В любой одинаковый интервал времени число испаряющихся молекул в среднем равно числу конденсирующихся.

Для одного и того же газа экспериментальные изотермы близки к соответствующим изотермам Ван-дер-Ваальса. Опыт не только позволяет достичь критического состояния, но и воспроизвести метастабильные состояния «растянутой» жидкости (участок ab — жидкость занимает объем больший, чем при двухфазном состоянии) и пересыщенного пара (участок fg — пар обладает давлением большим, чем насыщенный пар при той же температуре). Растянутая жидкость наблюдается при безотрывном от жидкости поднятии поршня в цилиндрическом сосуде. Образование под поршнем пузырька пара сразу же переводит растянутую жидкость в двухфазное состояние (участок bc). Пересыщенный пар наблюдается в отсутствии центров конденсации. Появление таких центров (пылинки, ионы) сразу же влечет за собой образование двухфазного состояния (участок fe).

Всю диаграмму семейства экспериментальных изотерм можно разделить на области различных фаз бесструктурных состояний вещества. Область *Ж* лежит ниже критической изотермы и слева от пограничной кривой и соответствует жидкому состоянию вещества. Область *П* находится ниже критической изотермы и правее пограничной кривой и соответствует ненасыщенному пару. Область внутри колоколообразной пограничной кривой включает двухфазные состояния. Она имеет вершину в точке, определяющей критическое состояние; точки правой ветви характеризуют состояние насыщенного пара, точки левой ветви — сжиженного пара. Наконец, область *Г*, находящаяся выше критической изотермы, есть область пара в состоянии, далеком от насыщения.

Согласно рис. 20-3, критическая температура является такой температурой, выше которой пар ни под каким давлением не может быть сжижен. Вместе с тем при критическом состоянии возможен переход пара в жидкость помимо двухфазного состояния. Уравнение (20,3) точно не выполняется потому, что a и b не являются постоянными величинами, но несколько убывают с ростом давления и температуры (отношение $\frac{a}{b}$ остается примерно постоянным). Уравнение Ван-дер-Ваальса совсем неприменимо к структурным веществам, таким, как кристаллы, и к бесструктурным веществам в тех случаях, когда происходит диссоциация или ассоциация молекул, т. е. изменение числа молекул.

Уравнение Ван-дер-Ваальса можно записать в ином виде, приняв в качестве единиц измерений объема, давления и температуры соответственно $V_к$, $p_к$ и $T_к$. Полагая $\frac{V}{V_к} = \omega$; $\frac{p}{p_к} = \pi$ и $\frac{T}{T_к} = \tau$ и используя равенства (20,4), (20,5), получаем уравнение соответ-

ственных состояний газа в виде

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \qquad (20,6)$$

В это уравнение уже не входят характеристические величины a и b, поэтому при неизменяющемся роде молекул и их числе оно справедливо для всех газов. Это значит, что в относительно равных условиях состояния всех газов соответственно одинаковы.

Из уравнения Ван-дер-Ваальса вытекает, что

$$pV = RT - \frac{a}{V} + b\left(p + \frac{a}{V^2}\right). \qquad (20,7)$$

Как видно, в правой части имеются два добавочных к RT слагаемых: одно отрицательное, зависящее от a, и другое положительное, зависящее от b и a. Влияние этих дополнительных слагаемых будет различным при изменении параметров газа, в частности температуры. Ту температуру, при которой эти противоположные влияния компенсируют друг друга и при которой, следовательно, реальный газ точно подчиняется закону Бойля — Мариотта, называют точкой Бойля. В соответствии с уравнением (20,7) находится и эффект Джоуля — Томсона, имеющий существенное значение для сжижения газов.

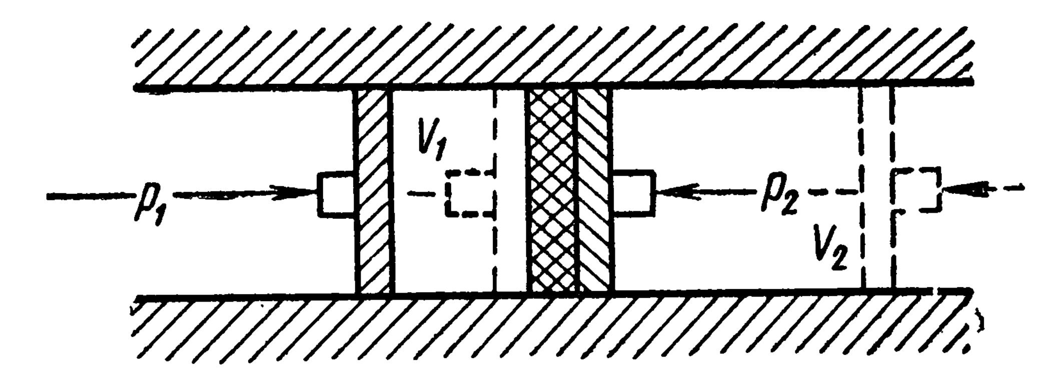


Рис. 20-4. Схема возникновения эффекта Джоуля — Томсона ($p_1 > p_2$; $V_2 > V_1$)

Схема, поясняющая этот эффект, показана на рис. 20-4. Под постоянным давлением $p_1 > p_2$ газ из левой части адиабатически изолированного цилиндрического объема V_1 проникает сквозь пористую перегородку в правый объем $V_2 > V_1$. Так как теплообмена с окружающей средой нет, а влиянием трения в пористой перегородке при медленном процессе можно пренебречь, то на основании закона сохранения энергии имеем

$$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2, \qquad (20,8)$$

где, как и ранее, U — внутренняя энергия газа (потенциальная плюс кинетическая), p_1V_1 — работа, произведенная над газом при вытеснении его из объема V_1, p_2V_2 — работа, произведенная газом при перемещении поршня в правую часть сосуда и при занятии объема V_2.

Знак эффекта Джоуля — Томсона (газ нагревается или охлаждается) определяется знаком разности внутренних энергий газа в начальном и конечном состояниях:

$$U_1 - U_2 = p_2V_2 - p_1V_1. \qquad (20,9)$$

Если, например, основное значение для состояния газа имеет поправка на размер молекул, так что для каждого мгновенного значения температуры можно принять

$$p\,(V - b) = RT$$

или

$$pV = RT + bp, \qquad (20,10)$$

то

$$p_2V_2 - p_1V_1 = b\,(p_2 - p_1) < 0,$$

т. е. работа, произведенная газом, меньше работы, произведенной над газом, и, значит,

$$U_1 - U_2 < 0.$$

Внутренняя энергия такого газа возрастет, что может произойти в нем только за счет увеличения средней кинетической энергии молекул. Другими словами, температура такого газа при его адиабатическом расширении будет возрастать (положительный эффект). Противоположный результат получится для газа, в котором основное значение имеют силы связей между молекулами. В этом случае

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)V = RT, \qquad (20,11)$$

или

$$pV = RT - \frac{a}{V},$$

так что

$$p_2V_2 - p_1V_1 = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} = U_1 - U_2 > 0,$$

поскольку $V_2 > V_1$. Уменьшение внутренней энергии газа означает, что работа, произведенная газом, больше работы, произведенной над газом, и, следовательно, газ такого типа будет при адиабатическом расширении охлаждаться.

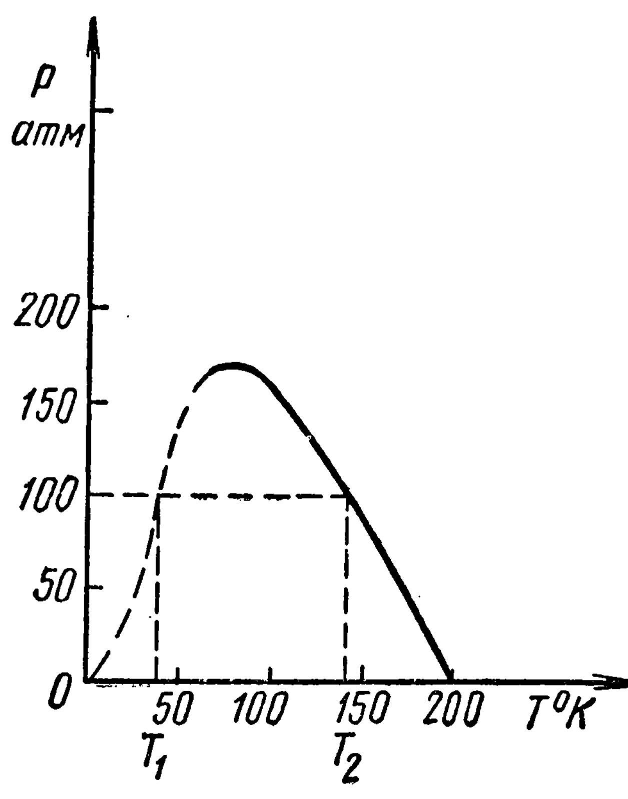


Рис. 20-5. Кривая инверсии эффекта Джоуля — Томсона для воздуха (T_1 и T_2 — температуры инверсии при $p =$ $= 100$ *атм*).

При использовании координат π и τ [см. (20,6)] кривая инверсии одинакова для всех газов

Изменяя давление и температуру, можно вызывать изменение знака эффекта Джоуля — Томсона (температура инверсии) (рис. 20-5). Следовательно, использование адиабатического расширения при сжижении газа с целью понижения температуры газа ниже критической возможно лишь после предварительного охлаждения его до температуры, при которой эффект Джоуля — Томсона имеет отрицательный знак.

Лекция 21

ЖИДКОЕ АМОРФНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА

Жидкая фаза состояния вещества характеризуется большой плотностью по сравнению с газом (примерно в тысячу раз). Такое большое количественное отличие влечет за собой новые качественные свойства.

Это прежде всего относится к внутреннему давлению, которое непосредственно не может быть измерено. По Ван-дер-Ваальсу имеем

$$p_i = \frac{a}{V^2},$$

следовательно, при $a = \text{const}$ изменение плотности в тысячу раз означает возрастание внутреннего давления в миллион раз. Таким образом, если для газообразного состояния при нормальных условиях $p_i \approx 0{,}01$ *атм* $\ll p$, то для жидкой фазы состояния $p_i = 10^4$ *атм* $\gg p$. Столь большое внутреннее давление создает, во-первых, малую сжимаемость жидкостей, и, во-вторых, особое состояние в поверхностном молекулярном слое (иная плотность, анизотропия, поверхностное натяжение).

Рис. 21-1. Сила, удерживающая молекулу в поверхностном слое жидкости. Кружком обозначены сферы действия межчастичных сил. *1—2* — поверхностный слой жидкости толщиной *d*

Из рассмотрения рис. 21-1 следует, что потенциальная энергия молекул в поверхностном слое жидкости больше, чем внутри жидкости. Это означает, что жидкость, как и любая другая система, под воздействием внутренних сил будет переходить в состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии, т. е. принимать форму с наименьшей в данных условиях поверхностью. Свободная энергия $\alpha = \frac{dW_{\text{св}}}{dS}$, отнесенная к единице площади образовавшейся поверхности жидкости, является характеристикой работы образования поверхности, т. е. мерой возникающего поверхностного натяжения. Вместе с тем допустимо рассматривать поверхностное натяжение α как силу, действующую вдоль поверхности в направлении ее сокращения, приложенную перпендикулярно к краю мысленно выделенной части поверхности жидкости на границе двух сред (рис. 21-2, *а*) или на границе трех сред (рис. 21-2, *б*) и отнесенную к единице длины контура, ограничивающего поверхность.

Очевидно, что между внутренним давлением в жидкости и поверхностным натяжением существует функциональная связь. Для ее выяснения можно провести мысленно опыт разрыва цилиндриче-

ского столба жидкости сечением в 1 *см*^{2} (рис. 21-3). Работа образования двух торцовых поверхностей будет равна

$$A = 2\alpha = p_i d, \qquad (21,1)$$

где $d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_0}}$ — среднее расстояние между центрами соседних молекул в жидкости с молекулярным весом μ и плотностью ρ. Именно на этом расстоянии будет совершаться работа против сил

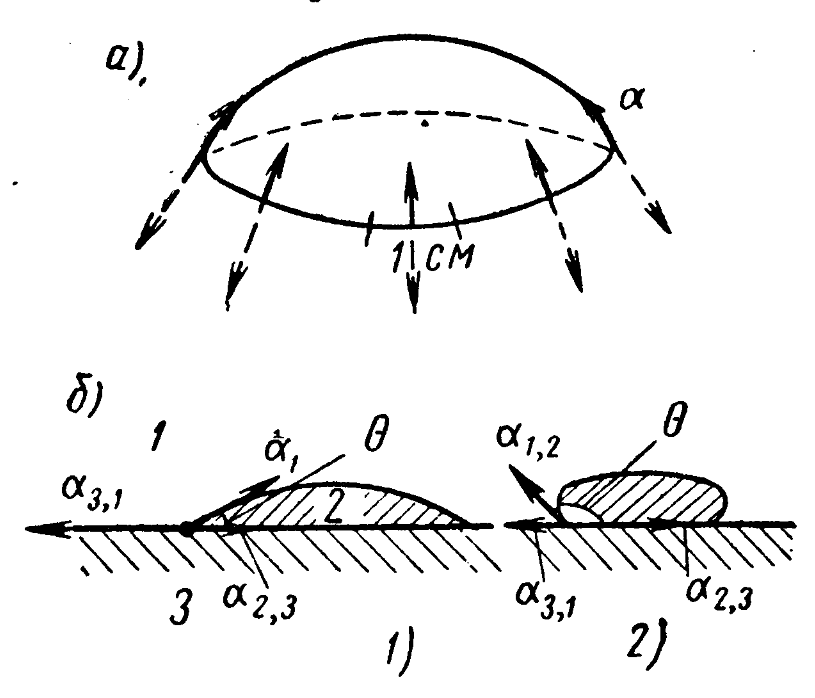


Рис. 21-2. Силы поверхностного натяжения жидкости:

а) на границе двух сред, *б*) на границе трех сред: *1*) жидкость смачивает стенку ($\alpha_{3,1} > \alpha_{1,2}\cos\theta + \alpha_{2,3}$; угол смачивания $\theta < \frac{\pi}{2}$); 2) жидкость не смачивает стенку $\left(\alpha_{3,1} < \alpha_{1,2}\cos\theta + \alpha_{2,3};\ \theta > \frac{\pi}{2}\right)$

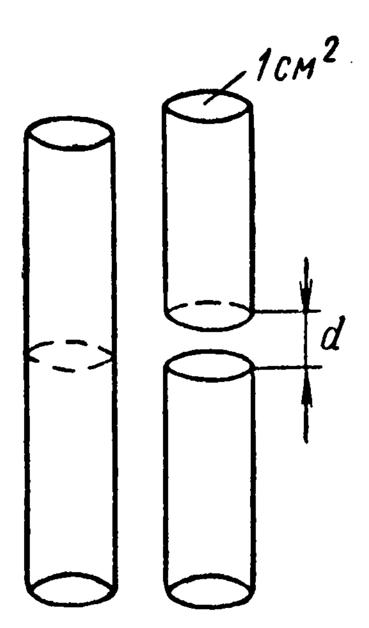


Рис. 21-3. К выводу соотношения между внутренним давлением в жидкости и поверхностным натяжением

сцепления молекул, очень быстро убывающих с расстоянием (обратно пропорционально пятой и даже более высокой степени). Из выражения (21,1) вытекает, что

$$p_i \approx \frac{2\alpha}{d}. \qquad (21,2)$$

Например, по измеренному значению $\alpha = 73$ *эрг* $\cdot$ *см*$^{-2}$ $= 0{,}073\,\frac{дж}{м^2}$ на границе соприкосновения воды с воздухом при комнатной температуре и при $d = \sqrt[3]{\frac{18}{1 \cdot 6 \cdot 10^{23}}} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-8}$ *см* получим

$$p_i \approx \frac{2 \cdot 73}{3{,}1 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-6} = 4600 \text{ } атм,$$

а для ртути при тех же условиях и значении $\alpha = 547$ *эрг* $\cdot$ *см*$^{-2}$ $= 0{,}547\frac{дж}{м^2}$

$$p_i = 38000 \text{ } атм,$$

Существуют другие косвенные способы измерений внутреннего давления: по удельной работе q испарения жидкости ($p_i = \rho q$), по коэффициенту сжимаемости $\beta(p)$ и температурному коэффициенту расширения $\alpha_т$ $\left(p_i = \frac{\alpha_т}{\beta_p} T^\circ\right)$. Все они приводят к более или менее одинаковым результатам в отношении значений p_i.

Поверхностное натяжение зависит не только от рода жидкости и среды, с которой жидкость соприкасается, но и от ее температуры. С повышением температуры поверхностное натяжение убывает и вблизи критической температуры обращается в нуль. Это заключение следует из того, что плотности жидкой фазы и насыщенного пара в критическом состоянии одинаковы и поверхность раздела между ними исчезает.

В газе над поверхностью жидкости всегда находится насыщенный пар этой жидкости. Парциональное давление насыщенного пара называют его упругостью.

Упругость насыщенного пара зависит от рода жидкости, температуры и кривизны поверхности жидкости. Пользуясь кинетической теорией строения вещества и молекулярной статистикой, можно установить связь между внутренним давлением в жидкости, теплотой или работой испарения молекул, упругостью насыщенного пара и температурой жидкости. Эта зависимость носит название уравнения Клапейрона — Клаузиуса.

Хаотическое движение молекул жидкости представляет собой нерегулярные криволинейные колебания без сохранения положения равновесия, иначе говоря, дрожание. При каждом цикле дрожания, средняя продолжительность которого $\tau = \frac{1}{\nu}$, количество движения в направлении нормали к поверхности жидкости изменяется на $2m\bar{u} = f_1\tau$. Единица поверхностного слоя жидкости содержит nd молекул, где n — объемная концентрация молекул, d — расстояние между их центрами. Таким образом, сила, удерживающая молекулы на поверхности жидкости и действующая на единицу площади внешнего слоя со стороны следующего за ним, т. е. внутреннее давление в жидкости будет равно

$$p_i = \frac{1}{3} f_i nd = \frac{2}{3} m\bar{u}n\nu d, \qquad (21,3)$$

где m — масса молекулы, $\bar{u}$ — статистическая усредненная скорость дрожания молекул, ν — средняя частота дрожаний.

Число испаряющихся за единицу времени молекул жидкости при условии, что грамм-молекулярная работа выхода их из жидкости (грамм-молекулярная теплота испарения) равна λ, согласно выражению (15,10) будет выражаться формулой

$$n_1 = \frac{1}{3} n \cdot \nu \cdot d \cdot e^{-\frac{\lambda}{RT}}. \qquad (21,4)$$

Число молекул, возвращающихся из пара в жидкость, за то же время, согласно равенству (16,7), составляет

$$n\downarrow = \frac{1}{6} n'\bar{u}, \tag{21,5}$$

где n' — объемная концентрация молекул в насыщенном паре. В соответствии с представлением о насыщенном паре $n\downarrow = n\uparrow$, или

$$\frac{1}{6} n'\bar{u} = \frac{1}{3} n \cdot \nu \cdot d \cdot e^{-\frac{\lambda}{RT}}. \tag{21,6}$$

Отсюда из формул (14,8) и (21,3) имеем

$$p_{\text{н.п}} = \frac{1}{3} n'mu^2 = \frac{2}{3} ndmu\nu e^{-\frac{\lambda}{RT}} = p_i e^{-\frac{\lambda}{RT}}. \tag{21,7}$$

Это уравнение для данной жидкости выражает искомую связь между упругостью насыщенного пара и температурой (рис. 21-4). После

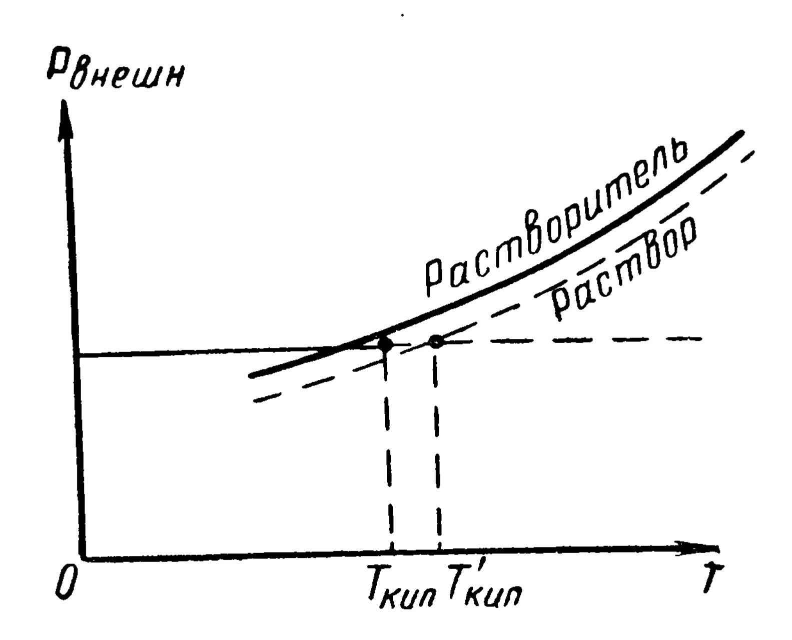


Рис. 21-4. Зависимость упругости насыщенного пара от температуры для растворителя и раствора

$T_{\text{кип}}$ — температура кипения растворителя; $T'_{\text{кип}}$ — температура кипения раствора

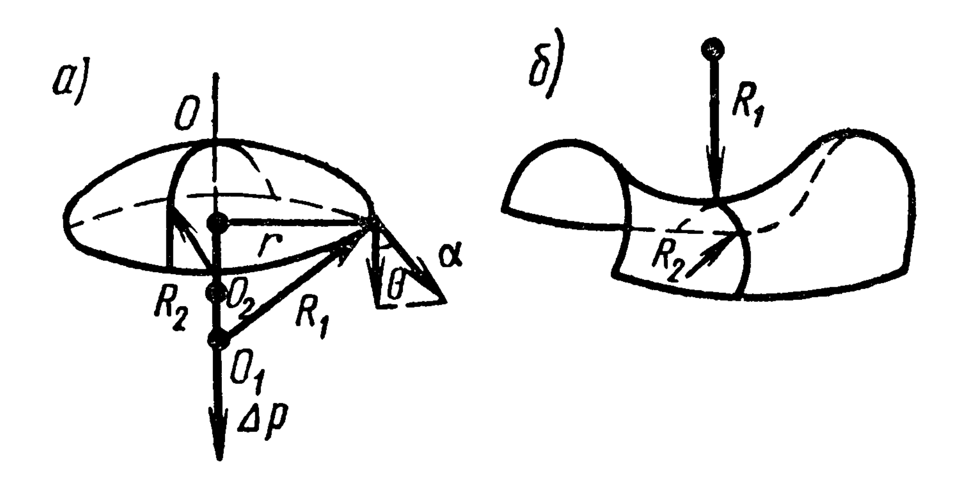


Рис. 21-5. Влияние кривизны поверхности на внутреннее давление в жидкости:

а) к выводу формулы Лапласа (элемент выпуклой поверхности; R_1 и R_2 — радиусы кривизны главных сечений поверхности в точке *O*); *б*) иллюстрация знакоразличной кривизны главных сечений поверхности

логарифмирования уравнения (21,7) с последующим дифференцированием по T получим

$$\lambda = RT^2 \frac{d \ln p_{\text{н.п}}}{dT} \tag{21,8}$$

— формула Клаузиуса — Клапейрона.

Из выражения (21,7) следует, что для данной жидкости упругость насыщенного пара будет зависеть от кривизны поверхности, причем так же, как и внутреннее давление в жидкости p_i. Пользуясь понятием о средней кривизне поверхности в данной точке (рис. 21-5) как инвариантной величине, находим

$$\sin\theta = \frac{r}{R}; \quad \Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = \pi r^2 \cdot \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{21,9}$$

или

$$\Delta p_i = \frac{\Delta F}{\pi r^2} = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \text{ — формула Лапласа} \qquad (21,10).$$

Таким образом, в общем случае кривой поверхности внутреннее давление в жидкости будет равно

$$p_i = p_{i,0} + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (21,11)$$

где $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ — средняя кривизна поверхности в рассматриваемой точке, $p_{i,0}$ — внутреннее давление при плоской поверхности. В зависимости от знака средней кривизны поверхности внутреннее давление в жидкости будет либо $p_{i,\text{вып}} > p_{i,0}$, либо $p_{i,\text{вог}} < p_{i,0}$ (рис. 21-6). В частном случае сферической поверхности радиусом R ($R_1 = R_2 = R$)

$$\Delta p_i = \frac{2\alpha}{R}. \qquad (21,12)$$

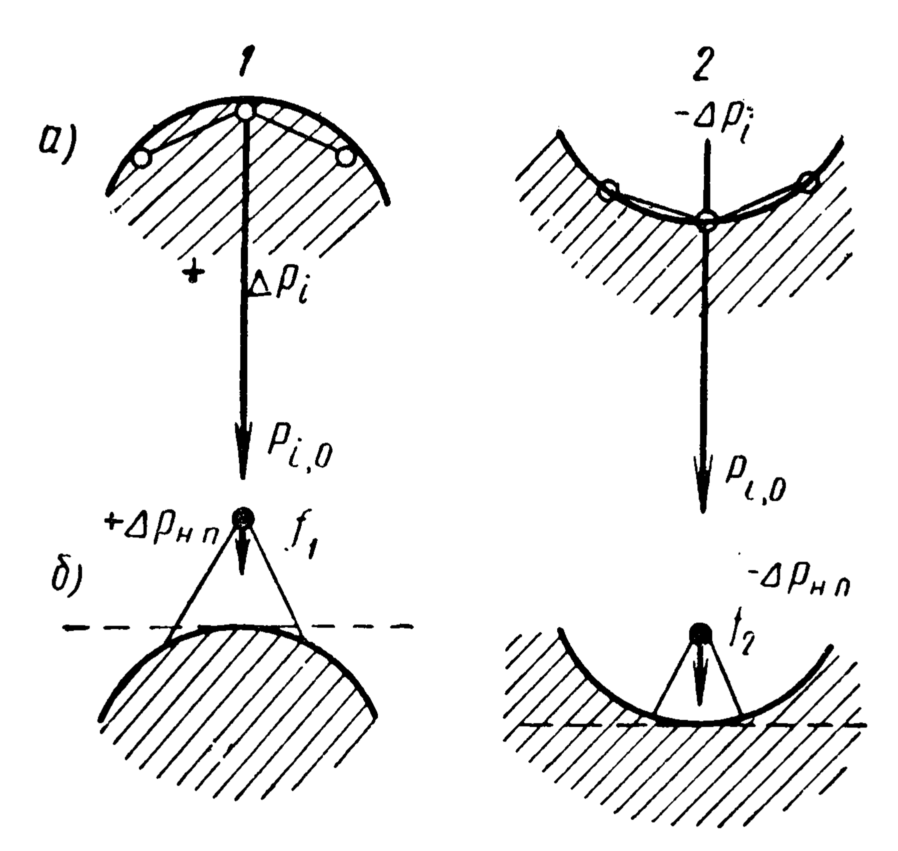


Рис. 21-6. Выпуклые и вогнутые поверхности жидкости:

а) добавочное внутреннее давление: 1) $\Delta p_i > 0$, 2) $\Delta p_i < 0$; б) добавочное давление насыщенного пара и силы притяжения молекул поверхностью жидкости $[f_1 < f_2;\ (p_{\text{н.п}})_1 > (p_{\text{н.п}})_2]$

Влиянием кривизны поверхности жидкости объясняется подъем смачивающей жидкости в капилляре (рис. 21-7,*а*). Давление на горизонтальном уровне в жидкости должно быть одинаковым. По линии *OO* оно составляет $(p + p_{i,0})$ и, следовательно, для вертикали *NN* можно записать

$$p + p_{i,0} = p + p_{i,\smile} + \rho_ж g h. \qquad (21,13)$$

Отсюда

$$p_{i,0} - p_{i,\smile} = \frac{2\alpha}{r} = \rho_ж g h \qquad (21,14)$$

или

$$h = \frac{2\alpha}{\rho_ж g} \cdot \frac{1}{r}, \qquad (21,15)$$

так что для данной жидкости и данного вещества капилляра

$$hr = \text{const}. \qquad (21,15')$$

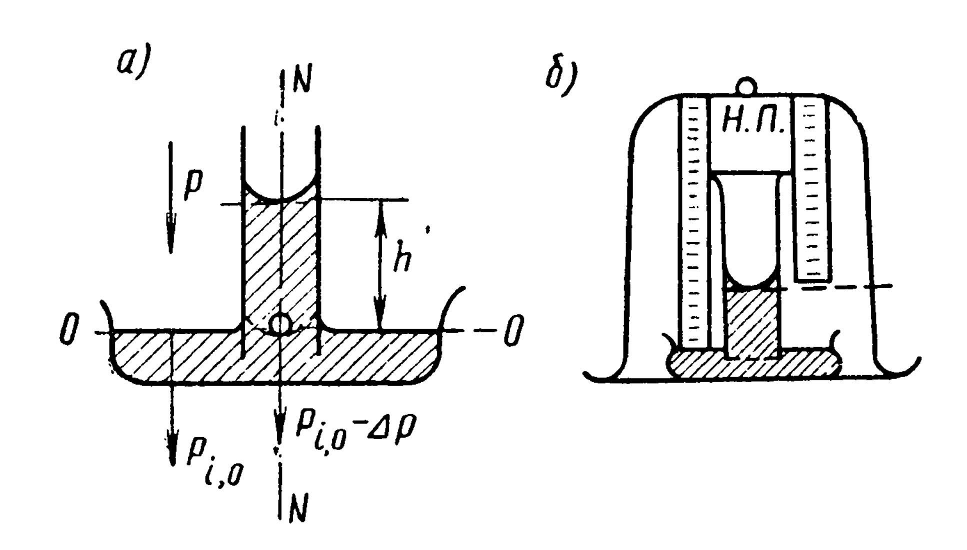


Рис. 21-7. Влияние кривизны поверхности жидкости на внутреннее давление и на упругость насыщенного пара:

а) подъем смачивающей жидкости в капилляре; б) зависимость упругости насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости

Вместе с тем из выражений (21,7) и (21,12) следует, что упругость насыщенного пара над выпуклой поверхностью больше, а над вогнутой поверхностью меньше, чем над плоской (рис. 21-6, *б*).

Рассматривая рис. 21-7, *б*, где под колоколом насоса показана жидкость и ее насыщенный пар, и используя формулу (21,15), получаем

$$(p_{н.\,п})_0 - (p_{н.\,п}) = \Delta p_{н.\,п} = \rho_{н.\,п} \cdot gh = \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_{н.\,п}}{\rho_ж} \qquad (21,16)$$

— формула Кельвина.

Процесс испарения жидкости происходит при любой температуре и представляет собой отрыв молекул от поверхности жидкости. Скорость испарения (сушка) зависит не только от температуры жидкости, но и от того, как быстро удаляют молекулы жидкости от ее поверхности. Присутствие паров воды в воздухе определяет его влажность: абсолютную, выражаемую в $г \cdot см^{-3}$ или $кг \cdot м^{-3}$, и относительную (по сравнению с насыщением), исчисляемую в процентах. Кипение представляет собой процесс образования пара внутри жидкости. Чтобы возникло кипение, необходимо настолько повысить температуру жидкости, чтобы упругость насыщенного пара, образующегося внутри жидкости, несколько превысила внешнее давление. Таким образом, температура кипения жидкости определяется не только родом жидкости (растворитель или раствор), но и внешним давлением. При очень бурном испарении (кипении) под пониженным давлением жидкость лишается наиболее энергичных молекул настолько быстро, что теплообмен с окружающей средой не может компенсировать быстрое понижение ее температуры, а жидкость может «замерзнуть». Медленным нагревом в отсутствии растворенного газа жидкость можно «перегреть», т. е. довести без кипения до температуры, несколько более высокой, чем температура кипения при данном давлении. Мелкие пузырьки пара внутри жидкости, приняв сферическую форму, вновь конденсируются в жидкость, поскольку упругость насыщенного пара над вогнутой поверхностью, согласно выражению (21,16) и рис. 21-6, меньше, чем над плоской, имевшейся при образовании пара вблизи дна нагреваемого сосуда с жидкостью.

Лекция 22

АЭРОДИСПЕРСНЫЕ СРЕДЫ

Аэродисперсными средами (аэрозолями) называют двухфазные системы, состоящие из многих жидких (туманы) или твердых (дым, пыль) частиц, взвешенных в газообразной среде.

Вследствие того, что у взвешенного размельченного вещества поверхность оказывается сильно развитой, аэрозоли обладают некоторыми специфическими свойствами, например сильным рассеянием света, сильным поглощением газов, сильным возрастанием скорости химических реакций (горение), усиленным каталитическим действием.

Среди аэрозолей особое значение имеют туманы, т. е. мелкие капли жидкости, взвешенные в газе. Туман создается либо механическим разбрызгиванием жидкости, либо путем конденсации жидкости из пересыщенного пара. Форсунки для механического разбрызгивания чаще всего действуют на принципе разбрызгивания неустойчивых струй жидкости, трения струй о воздух и ударов струи жидкости о неподвижные преграды; используются также принцип вращающихся чаш с жидкостью (разрыв жидкости на капли инерциальной центробежной силой) и принцип разбрызгивания потока жидкости быстро движущимся потоком газа.

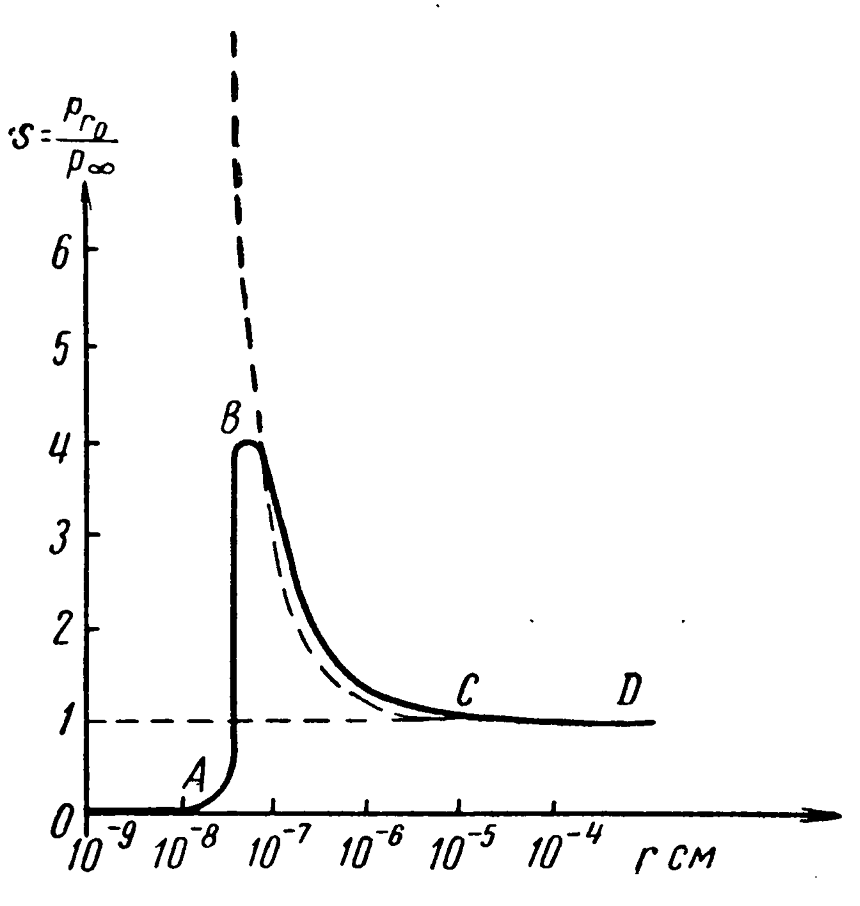


Рис. 22-1. Зависимость относительного равновесного давления насыщенного пара от радиуса капли.

Пунктирная кривая по уравнению (22,5) характерна для капель без заряда; сплошная кривая получена по уравнению (22,9) для капель с зарядом; AB — восходящий участок кривой (при возрастании радиуса капли увеличивается пересыщение); BC— неустойчивая область (рост размеров капли).

Образование тумана путем конденсации молекул жидкости связано с пересыщением пара. Для каждой меры пересыщения можно указать равновесный размер зародыша новой фазы состояния вещества. По Кельвину (см. 21,16) давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью сферической капли радиуса r составляет

$$p_r = p_0 + \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_{\text{н. п}}}{\rho_{\text{ж}}}, \qquad (22,1)$$

где α — поверхностное натяжение жидкости на границе с газовой средой. После дифференцирования по r имеем

$$dp = -\frac{2\alpha}{r^2} \cdot \frac{\rho_{\text{н. п}}}{\rho_{\text{ж}}} \cdot dr. \qquad (22,2)$$

Далее, используя уравнение Клапейрона, получаем

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2\alpha}{RT} \cdot \mu \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \cdot \frac{dr}{r^2}. \qquad (22,3)$$

После интегрирования в границах изменения радиуса капель от $r = \infty$ до $r = r_0$ и, следовательно, в границах изменения давления пара от $p = p_\infty = p_{\text{н. п}}$ до $p = p_{r_0} = p_{\text{п, п}}$, получим

$$\ln \frac{p_{r0}}{p_\infty} = \frac{2\alpha}{RT} \cdot \frac{\mu}{\rho_{\text{ж}}} \cdot \frac{1}{r_0}, \qquad (22,4)$$

откуда

$$r_0 = \frac{2\alpha\mu}{RT\rho_{\text{ж}} \ln \frac{p_{r_0}}{p_\infty}}. \qquad (22,5)$$

При величине пересыщения $s = \frac{p_{r_0}}{p_\infty} = 1$ имеем $r_0 = \infty$ и, следовательно, равновесного радиуса для зародыша нет. При возрастании пересыщения r_0 убывает, однако при очень малых размерах, меньших 10^{-7} *см*, флуктуационные изменения плотности пара делают зародыши новой фазы неустойчивыми: они либо испаряются, либо растут.

Для воды при $T = 290°$ К и $\alpha = 76 \frac{эрг}{см^2} = 76 \cdot 10^{-3} \frac{дж}{м^2}$ уравнение (22,4) можно представить в виде

$$s = \frac{p_{п.\,п}}{p_{н.\,п}} = \frac{p_{r_0}}{p_\infty} = e^{10^{-7} \cdot \frac{1}{r_0}}, \qquad (22,6)$$

следовательно, p_{r_0} всегда несколько больше p_∞. Однако необходимое пересыщение особенно быстро возрастает для $r_0 \leqslant 10^{-7}$ *см* (рис. 22-1). Капли столь малых размеров в пространстве со 100-процентной относительной влажностью будут быстро испаряться.

Табл. 7 содержит равновесные значения пересыщения $s = \frac{p_{r_0}}{p_\infty}$ для различных значений радиусов капель при $T = 290°$. При этом существенное значение имеет наличие центров конденсации (рельеф стенок, пылинки, ионы).

Обычно воздух содержит частицы пыли размерами от 10^{-4} *см* до 10^{-6} *см*. Эти размеры уже настолько велики, что конденсация на таких центрах возможна при незначительном пересыщении ($s \approx 1{,}1$).

Пересыщенность пара возникает при его охлаждении, например, при смешении газов, содержащих пары одной и той же жидкости, но имеющих разную температуру. Туман наблюдается при открывании двери теплого помещения в морозный день;он образуется также в воздухе на некотором расстоянии от сопла при выпуске из него перегретого пара, туманный след остается от пара, имеющегося в выхлопных газах, выпускаемых в воздух самолетом, туманы наблюдаются над водоемами.

Другой способ достижения пересыщенности паров состоит в осуществлении объемных химических реакций газообразных веществ, например при производстве серной кислоты контактным методом.

Третий наиболее часто осуществляемый способ получения пересыщенного пара заключается в охлаждении газа, содержащего насыщенный пар.

Вероятность w образования зародыша капли в результате спонтанной флуктуации плотности пара при температуре $T°$ определяется работой A перевода системы из метастабильного состояния пересыщенного пара без зародышей в стабильное состояние с зародышами. Согласно классической статистике Максвелла — Больцмана,

$$w = c \cdot e^{-\frac{A}{kT}}. \qquad (22,7)$$

Для сферической капли радиуса r в свободном газовом пространстве эта работа по Гиббсу составляет

$$A = A_0 = \frac{1}{3} 4\pi r^2 \alpha, \tag{22,8}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости на границе с паром. У твердой стенки $A < A_0$ при всех углах смачивания θ; таким образом, облегчается конденсация пара на поверхности жидких или твердых тел, а также на стенках сосудов. Образование капель в случаях вогнутых поверхностей у стенок капилляров возможно даже в отсутствии пересыщения, т. е. при $s = 1$.

При наличии ионов в газе конденсация пара в жидкую фазу значительно облегчается. Благодаря действию силы электростатического притяжения поляризованных молекул пара к иону и согласно закону Больцмана для распределения молекул в поле тяготения, плотность пара вблизи иона может в десятки тысяч раз превышать плотность пара вдали от него. Этот эффект возникновения тумана на ионах наблюдается в конденсационных камерах Вильсона, при образовании туманных треков от ионизирующих частиц, пролетающих сквозь пересыщенный пар.

Если считать, что каждая капля создается на одном ионе с зарядом e, то, согласно Томсону, выражение (22,4) примет вид

$$\ln \frac{p_r}{p_\infty} = \frac{\mu}{R \cdot T\rho_{ж}} \left(\frac{2\alpha}{r} - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon r^4} \right), \tag{22,9}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость пара.

Таким образом, наличие заряда уменьшает требуемое пересыщение, так как знаки слагаемых в правой части уравнения (22,9) противоположны. При уменьшении радиуса капли потенциальная энергия поверхностного слоя, равная $U_1 = 4\pi r^2 \alpha$, убывает, в то время как потенциальная энергия электростатического поля

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon r}$$

возрастает. Из формулы (22,9) вытекает, что если $\frac{2\alpha}{r} - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^4} = 0$, т. е. $p_r = p_\infty$, то равновесный радиус водяной капли составит (см. табл. 7)

$$r_0 = \left(\frac{e^2}{16\pi\varepsilon\alpha} \right)^{1/3} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \tag{22,10}$$

Для $r > r_0$ необходимо $p_r > p_\infty$, а для $r < r_0$ должно быть $p_r < p_\infty$ $(s < 1)$.

Из табл. 7 видно, что радиус капель, образующихся около ионов, очень медленно изменяется с уменьшением количества водяных паров в воздухе. При понижении содержания паров до 10^{-18} от насыщения радиус капель уменьшается только в два раза. Такие ничтожные капли всегда имеются в воздухе, но они не могут вырасти

до видимых размеров из-за недостатка молекул пара (восходящие ветви на рис. 22-2).

Таблица 7

Радиус капли r в *см*	Значение $s = \frac{p_r}{p_\infty}$ для капель		Радиус капли r в *см*	Значение $s = \frac{p_r}{p_\infty}$ для капель	
	без заряда	с зарядом e		без заряда	с зарядом e
$2 \cdot 10^{-6}$	235	10^{-18}	$1 \cdot 10^{-5}$	3,0	2,8
$4 \cdot 10^{-6}$	10,0	1,0	$1{,}6 \cdot 10^{-5}$	2,0	1,9
$5 \cdot 10^{-6}$	9,0	3,5	$2 \cdot 10^{-5}$	1,8	1,7
$6 \cdot 10^{-6}$	6,0	4,0			

Если для очень мелких капель ($r < 10^{-7}$ *см*) учитывать еще и возможную зависимость поверхностного натяжения от радиуса капли, то выражение (22,9) принимает вид

$$\ln \frac{p_r}{p_\infty} = \frac{\mu}{RT\rho_ж}\left(\frac{2\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon r^4}\right). \tag{22,11}$$

Рис. 22-2. Видоизмененные кривые, изображенные на рис. 22-1, при учете зависимости поверхностного натяжения от радиуса капли.

Сплошная кривая получена для капель без заряда; $\ln s = \frac{\mu}{RT\rho_ж}\left(\frac{2\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr}\right)$. Пунктирная кривая — для капель с зарядом; $\ln s = \frac{\mu}{RT\rho_ж}\left(\frac{2\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr} - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon r^4}\right)$

Согласно Томсону, $\alpha = 0$ при $r = 0$ и далее α, возрастая, достигает максимального значения при определенном радиусе. Кривые, представленные на рис. 22-1, преобразуются в вид, изображенный на рис. 22-2. Как видно, заряженные капли будут возникать при любом значении пересыщения $s = \frac{p_r}{p_\infty}$. Однако рост капель на участке OA невозможен для всех значений $s < s_0$. Если $s > s_0 = 8$, то обеспечивается дальнейший рост размеров капель (неустойчивые ниспадающие участки AC и $A'C'$). Относительной устойчивостью будут обладать капли, размер которых соответствует точке D участка кривой CE.

Основной характеристикой туманов служит их дисперсность, т. е. распределение капель по размерам (рис. 22-3).

Туман следует рассматривать как переходную стадию фазового преобразования. Капли тумана возникают, испаряются, растут, сливаются и выпадают. Самые мелкие капли размером 0,10 *мк* возникают на флуктуационных зародышах. Самые крупные (до 20 *мк*)

образуются поверхностной конденсацией и коагуляционным путем (путем слияния).

В табл. 8 приведены характеристические данные некоторых аэрозольных дисперсных образований.

Таблица 8

Вид дисперсного образования	Средний диаметр капель в *см*	Число капель n в 1 $см^3$	Объемная концентрация влаги в $г/см^3$	Скорость падения в $см \cdot сек^{-1}$
Молекулы H_2O	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$	—	—	—
Небольшие ионы	$1{,}3 \cdot 10^{-7}$	—	—	—
Необнаруживаемые капли	$8 \cdot 10^{-7}$	—	—	—
Предельные обнаруживаемые микроскопические капли и частицы дыма канифоли	$2 \cdot 10^{-5}$	—	$1{,}5 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-3}$
Частицы сернокислотного тумана	$2 \cdot 10^{-4}$	$10^2 \div 10^6$	$10^{-7} \div 5 \cdot 10^{-6}$	$1{,}3 \cdot 10^{-2}$
Частицы наземного тумана	$2 \cdot 10^{-3}$	$50 \div 500$	$5 \cdot 10^{-8} \div 10^{-6}$	1,3
Частицы форсуночного тумана	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^6 \div 10^8$	$10^{-2} \div 10^{-1}$	10
Предельные видимые капли				
Капли дождя	$2 \cdot 10^{-2}$	—	—	78
Крупные капли дождя	$2 \cdot 10^{-1} \div 10^0$	—	—	600—800

Между облаком и наземным туманом нет принципиального различия. Облако возникает преимущественно на высоте 5—10 *км* над поверхностью земли. Первичные капельки образуются в результате конденсации пара воды на имеющихся в объеме газа ядрах конденсации. Охлаждение воздуха с высотой происходит, главным образом, в результате его адиабатического расширения и понижения температуры и составляет примерно 1° на каждые 100 *м* высоты.

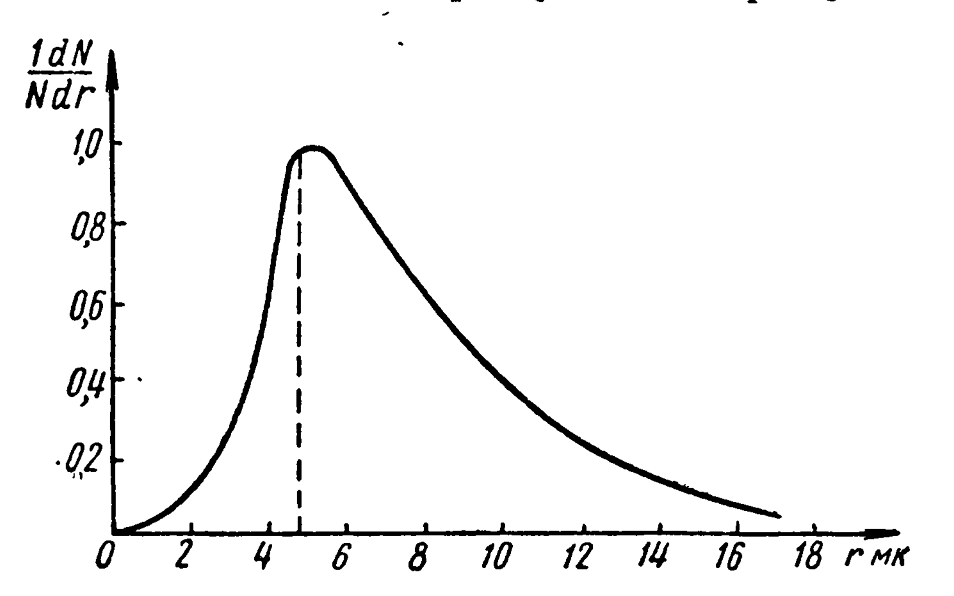


Рис. 22-3. Распределение капель в облаке по размерам

У поверхности земли охлаждение приземного слоя воздуха и образование тумана происходит вследствие радиационного охлаждения почвы (радиационные туманы), в результате смешения разнотемпературных потоков воздуха, содержащего пары воды (морские и озерные туманы) и вследствие большого количества активных ядер конденсации (городские туманы).

Облако имеет по вертикали изменяющуюся дисперсность. Например, в кучевом облаке, при вертикальной глубине его в 1 *км*,

более крупные капли расположены в верхних слоях, где упругость насыщенного пара меньше, а мелкие — в его нижней части.

При падении капель в облаке происходит их слияние, или коагуляция, а по мере увеличения скорости падения в результате трения капель о воздух — вновь раздробление на более мелкие.

В облаке, состоящем из капель разного размера, в результате изотермической перегонки наблюдается испарение мелких капель и укрупнение больших. При температуре от нуля до —30° С в облаках имеются капли переохлажденной жидкости и кристаллы льда. При более низких температурах облако вообще состоит из ледяных кристаллов различной формы. В смешанных облаках также происходит изотермическая перегонка. Переохлажденные капли воды испаряются, а кристаллы льда укрупняются, поскольку упругость насыщенного пара над кристаллом меньше, чем над переохлажденной жидкостью (рис. 22-4). Та температура, при которой упругость насыщенного пара над жидкостью и над кристаллом одинакова, т. е. температура, при которой все три фазы состояния вещества (кристалл, жидкость и насыщенный пар) находятся в устойчивом равновесии, называется температурой тройной точки $T_{т.т}$. При температуре тройной точки кристалл плавится под давлением собственных насыщенных паров.

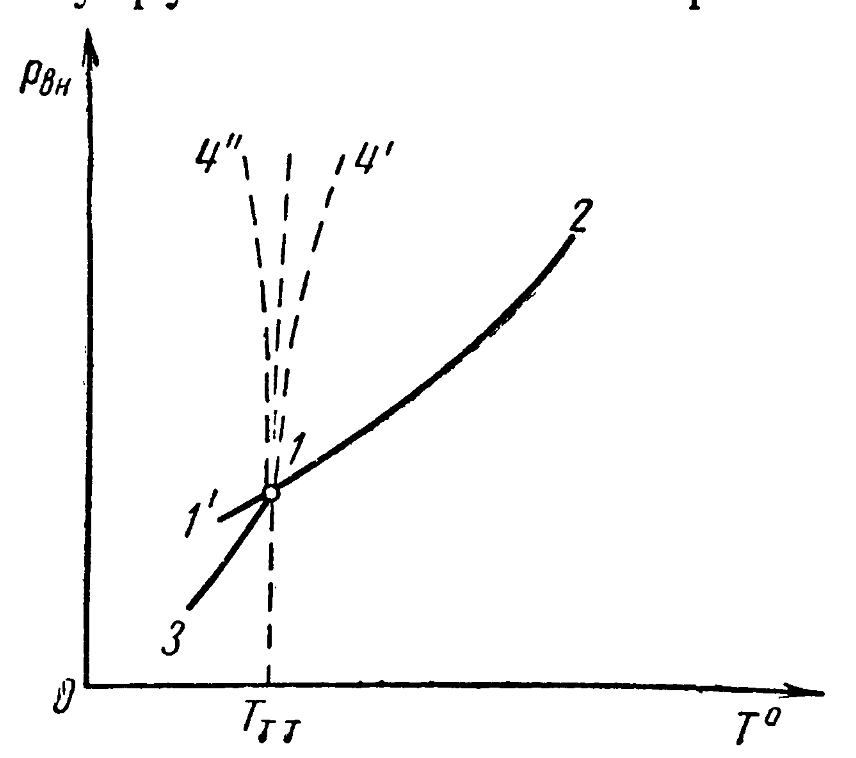


Рис. 22-4. Зависимость температуры фазовых переходов от внешнего давления:

1—2 — насыщенный пар над жидкостью; *1' — 1* — насыщенный пар над переохлажденной жидкостью; *3 — 1* — насыщенный пар над кристаллом; *4'' — 1*, *4' — 1* — изменение температуры плавления кристалла в зависимости от внешнего давления (для участка *4' — 1* $dT_{пл} > 0$ при $dp > 0$; для участка *4'' — 1* $dT_{пл} < 0$ при $dp > 0$

Другим важным видом аэрозолей являются дымы. Дым, как и туман, является переходным состоянием. Основной процесс старения дыма заключается в коагуляции, т. е. слипании частиц при их соприкосновении (в результате броуновского движения) и выражается соотношением $\omega = \omega_0 + kt$, или

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} + kt, \qquad (22,12)$$

где $\omega = \frac{1}{n}$ — объем, приходящийся на одну частицу дыма, $k = \frac{2}{3} \cdot \frac{RT}{N_0} \cdot \frac{i}{\eta}$ — постоянная коагуляции, или характеристический коэффициент слипания частиц, в котором i — отношение радиуса

сферы действия межчастичных сил к радиусу шарообразной частицы дыма, η — вязкость среды.

Коэффициент слипания частиц k и начальный частичный объем ω_0 для различных дымов имеют соответственно значения порядка 10^{-10} *см*^{3} · *сек*$^{-1}$ и 10^{-6} *см*^{3}. Постоянная коагуляции k зависит также от размеров частиц дыма, так как с размерами частиц изменяется i. Большие частицы коагулируют медленнее, чем малые. В однородных дымах по сравнению с неоднородными коагуляция частиц затруднена, так как по исследованиям Смолуховского средняя статистическая скорость коагуляции $\frac{dn}{dt}$ зависит от безразмерного фактора

$$f = (r_2 + r_1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{(r_2 + r_1)^2}{r_1 r_2}. \qquad (22,13)$$

При $\frac{r_1}{r_2} = 1$ имеем $f = 4$, а для тех случаев, когда $\frac{r_1}{r_2} \neq 1$, $f > 4$.

В табл. 9 приведено процентное содержание частиц разных размеров в первоначально изодисперсном аэрозоле, вычисленное по теории Смолуховского соответственно стадиям коагуляции, при которых общее число частиц составляло 1,0; 0,5; 0,25; 0,125 от начального числа частиц.

Таблица 9

N/N_0	Процент числа агрегатов, содержащих число частиц:		
	от 1 до 3	от 4 до 16	от 17 до 43
1,0	100	0	0
0,5	87,5	12,5	0
0,25	57,8	41,4	0,8
0,125	33,0	55,2	11,5

В тех случаях, когда основной объем смешанной двухфазной среды занимает жидкость, а размельченным веществом является газ, образованный гидрозоль называется суспензией. При смешении жидкости с нерастворимыми размельченными каплями жидкости или твердыми частицами образованная среда называется эмульсией, или взвесью (соответственно).

При очень большой вязкости жидкости эмульсия переходит в гель.

Лекция 23

ЗАТВЕРДЕВАНИЕ И КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ ВЕЩЕСТВА

Значительное число смесей органических и неорганических веществ представляют собой растворы. Под раствором подразумевают однородную смесь при различных соотношениях составляющих веществ. Растворы могут быть газообразными (например,

воздух), жидкими (водные растворы солей) и твердыми (например, раствор никеля в меди).

Бесструктурное жидкое состояние твердого раствора называют расплавом. При комнатной температуре среды основное значение в хаотическом движении молекул газа имеет поступательное непериодическое движение. В жидкостях непериодическое и периодическое движения молекул имеются в одинаковой мере, а в твердом, кристаллическом состоянии практически остается лишь колебательное движение узлов решетки. Молекулярное поступательное движение в веществе с большой плотностью затруднено вследствие взаимной ориентировки молекул, особенно при низких температурах. По мере затухания колебаний атомов в молекулах, которое происходит при охлаждении расплава, возрастает вероятность пространственной взаимоориентации молекул, или, иначе, вероятность возникновения центров упорядоченной структуры вещества — зародышей кристаллов.

Соотношение (22,5), относящееся к размерам зародышей капель тумана, справедливо и для пересыщенных растворов.

Вместе с тем при охлаждении жидкости уменьшаются импульсы поступательного перемещения молекул, а значит, и скорость роста кристаллических зародышей. В результате совокупного влияния обоих факторов при различных скоростях изменения температуры возможно либо бесструктурное застывание расплава в виде аморфного твердого тела (гели, стекла, смолы, пластмассы), либо кристаллизация расплава (монокристаллы и поликристаллические агрегаты).

Неорганические стекла представляют собой безводные силикаты. Чаще всего это переохлажденные расплавы кремнезема SiO_2 с различными примесями окислов типа M_2O, MO и M_2O_3. Стекла сложного состава A_mB_nO, где B — стеклообразующий ион, A — ионы примеси, обычно имеют $n < 0{,}3$.

Энергия связи атомов кислорода с атомами Si, A или B в стеклах не одинакова для различных соединений. Поэтому при нагревании стекол происходит их постепенное размягчение, приходящееся на некоторый интервал температуры перехода в жидкий расплав. Соединения, обладающие свойством стеклообразования при охлаждении, характеризуются в расплаве малой подвижностью ионов, но значительным межионным электрическим полем.

Органические стекла образуют группы литых смол, не содержащих наполнителя. Они являются продуктами полимеризации эфиров акриловой и метакриловой кислот.

К смолам относятся также парафины, воски, клеи, битумы, канифоли и фенолформальдегидные соединения.

Пластические материалы, такие, как чистые аминопласты, известны как твердые прозрачные для света среды плотностью в два раза меньшей, чем плотность силикатных стекол.

Большинство технических материалов (среди них металлы и цементобетоны) являются мелкокристаллическими агрегатами, об-

ладающими по всем направлениям как однородностью, так и изотропностью в макроскопическом смысле.

Если пересыщение в расплаве невелико, то при медленном охлаждении скорость роста кристалла играет решающую роль. Она связана с диффузией молекул и приводит к образованию монокристалла правильной формы.

При быстром охлаждении процесс кристаллизации определяется конвекцией зародышей, которая приводит к образованию поликристаллического твердого агрегата. Монокристаллы обладают свойствами, резко отличными от того же вещества (по химическому составу), затвердевшего в поликристаллической форме, в частности, монокристаллы анизотропны.

Различные вещества кристаллизуются в разных модификациях, зависящих от условий кристаллизации. Упорядоченное расположение структурных элементов вещества (атомов, ионов) в узлах пространственного образования правильной формы называют кристаллической решеткой. Внешние формы монокристаллов отражают их внутреннюю структуру.

Механические, термодинамические, электрические и оптические свойства кристаллического вещества зависят от его структуры. Анизотропией монокристаллов объясняются такие явления в них, как механический гистерезис, пьезоэлектрический эффект, оптическая активность. Температура перехода чистого вещества в кристаллическое состояние при наличии в расплаве структурных зародышей называется температурой затвердевания.

Увеличение давления и температуры кристаллизации изменяют структуру кристаллической решетки в сторону увеличения плотности и энергии связи. Например, при давлениях порядка нескольких сотен тысяч атмосфер и температурах порядка нескольких тысяч градусов углерод преобразуется в алмаз, а нитрид-бора — в твердое вещество, сравнимое по твердости с алмазом. Наряду с изменением механических свойств изменяются и электрические, так как высокие давления вызывают деформации электронных оболочек атомов. Типичные диэлектрики приобретают при этом свойства полупроводников (арсенит калия) и даже металлических состояний (теллур, иод, твердый водород).

Свойства поликристаллов зависят как от свойств кристаллической решетки отдельных зерен, так и от размеров и распределения зерен различных ингредиентов вещества. При затвердевании поликристаллических веществ из-за неправильности формы и расположения зерен в материале могут образоваться каналы, доступные для молекулярного проникновения в них газов и жидкостей, т. е. материал может оказаться в той или иной мере пористым. К технически важным пористым твердым телам принадлежат спрессованные порошки, пемзы, огнеупоры, кирпич, пенопласты, древесина и почвенный грунт. Свойства таких материалов в значительной

мере зависят не только от свойств твердого остова, но и от рода вещества, заполняющего поры.

Температура, при которой в результате чрезмерных смещений (колебаний) узлов решетки происходит ее разрушение, называется температурой плавления. Аморфные твердые тела, естественно, не имеют определенной температуры плавления, но им свойственна некоторая область температур размягчения. Температура плавления зависит не только от рода вещества, но и от внешнего давления (рис. 23-1). Увеличение давления меняет температуру плавления, причем всегда так, что способствует образованию более плотной фазы вещества. По Клаузиусу — Клапейрону

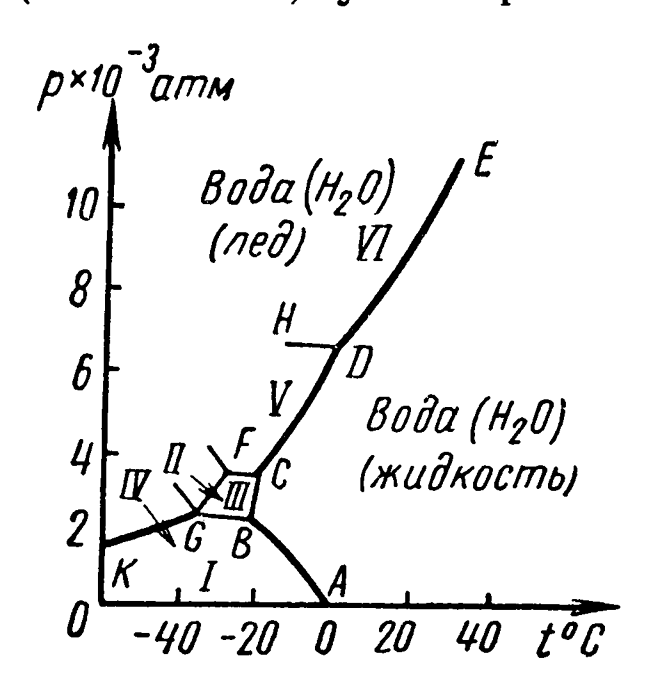


Рис. 23-1. Изменение температуры плавления различных модификаций льда при возрастании внешнего давления:

AB — для обычного льда 1 ($V_{кр} > V_{распл}$); BC — для льда III ($V_{кр} < V_{распл}$); CD — для льда V ($\rho_V > \rho_{III}$); DE — для льда VI ($\rho_{IV} > \rho_V$); лед в состояниях II и IV неустойчив

$$\frac{dT_{затв}}{T_{затв}} = -\frac{V_{кр} - V_{распл}}{q_{пл}}\,dp, \qquad (23,1)$$

где $q_{пл}$ — молярная теплота плавления. Обычно молярный объем $V_{кр} < V_{распл}$ и тогда по выражению (23,1) положительному изменению давления ($dp > 0$) отвечает положительное приращение температуры затвердевания $dT_{затв}$ (см. рис. 22-4). Исключение составляют вода и висмут, у которых $V_{кр} > V_{распл}$. Однако в зависимости от внешних условий вода кристаллизуется в разных модификациях, в том числе и таких, для которых $V_{кр} < V_{распл}$ (донный лед; см. рис. 23-1).

Как уже отмечалось, под давлением собственных насыщенных паров кристалл плавится при температуре тройной точки (см. рис. 22-4).

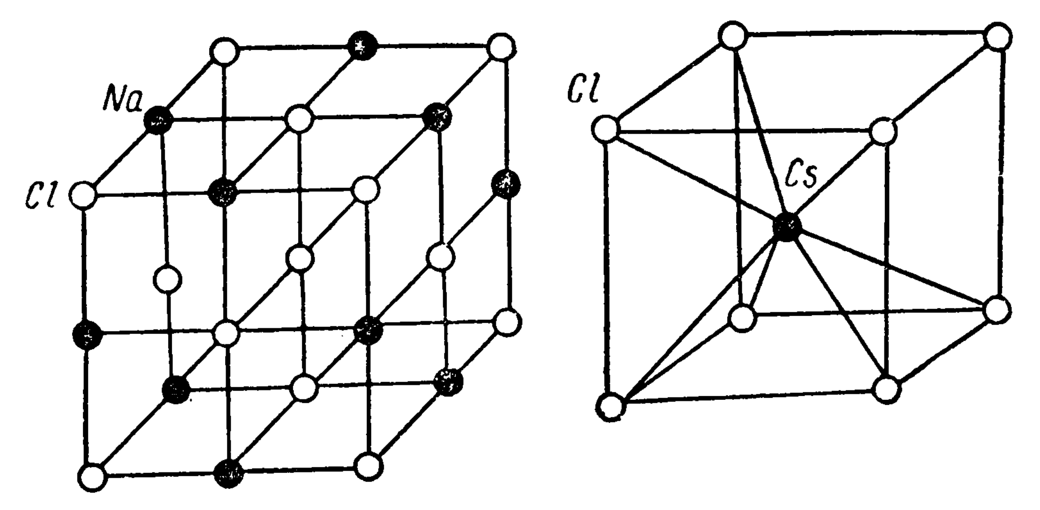


Рис. 23-2. Гранецентрированная (NaCl) и объемноцентрированная (CsCl) кубические решетки кристаллов

Кроме кристаллографических признаков, важным классификационным критерием для кристаллов является род связей, действующих между элементами кристаллической решетки. Классификация типов кристаллов по признаку связей приведена в табл. 10.

Структуры кубической решетки двух наиболее характерных ионных кристаллов — гранецентрированной (хлористого натрия) и объемноцентрированной (хлористого цезия) показаны на рис. 23-2,

а зависимость энергии взаимодействия ионов в решетке кристалла от расстояния между ионами — на рис. 23-3. Решающую роль во взаимодействии играют электростатические взаимодействия как электронных оболочек, так и разноименных и одноименных зарядов ионов.

Таблица 10

Тип кристалла	Тип и энергия связи на 1 молекулу	Характерные свойства	Характер взаимодействия между узлами решетки
Гетерополярные NaCl, LiF	Ионная; $8 \div 15$ *эв*	Диэлектрики. Ионная проводимость при высоких температурах	Электростатические
Гомополярные C, Cr, Si	Ковалентная; $6 \div 15$ *эв*	Полупроводники. Электронно-дырочная проводимость	Электронно-обменные
Металлические Fe, Cu, Ni	Ионно-электронная; $1 \div 5$ *эв*	Проводники. Электронная проводимость	Электрические
Молекулярные Ar, CH_4	Молекулярная; 0,1 *эв*	Легкоплавкость. Низкая точка плавления. Большая сжимаемость	Ван-дер-Ваальсовы
Водородные H_2O (лед)	Водородно-ионная; 0,2 *эв*. (1 *эв/молекула* $= 23 \frac{к \cdot кал}{моль}$)	Свойства льда. Сегнетоэлектрические свойства. Соединительные функции	—

Если R будет расстоянием от центра иона, обладающего сферической симметрией, то потенциальная энергия кулоновского притяжения ионов может быть представлена в виде

$$\varphi' = -\alpha \frac{e^2}{R}, \qquad (23,2)$$

где α — так называемая постоянная Маделунга, учитывающая тот факт, что в решетке типа NaCl каждый ион окружен шестью соседними противоположно заряженными ионами и двенадцатью следующими одноименно заряженными.

Потенциальная энергия кулоновского отталкивания электронных оболочек при том же отсчете расстояний выразится более крутой зависимостью (см. рис. 23-3) вида

$$\varphi'' = \frac{\beta}{R^n}, \qquad (23,3)$$

где β — характеристический коэффициент, $n \gg 1$. Таким образом, потенциальная энергия взаимодействия узлов ионной решетки будет

$$\varphi(R) = \varphi' + \varphi'' = \frac{\beta}{R^n} - \alpha\frac{e^2}{R}. \tag{23,4}$$

Приравниваем нулю первую производную от потенциала $\varphi(R)$ по расстоянию R

$$\frac{d\varphi}{dR} = -n\frac{\beta}{R_0^{n+1}} + \alpha\frac{e^2}{R_0^2} = 0; \tag{23,5}$$

получим

$$\beta = \frac{\alpha e^2}{n}R_0^{n-1}, \tag{23,6}$$

где R_0 — расстояние, соответствующее минимуму $\varphi(R)$. Отсюда

$$\varphi(R) = -\alpha\frac{e^2}{R_0}\left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n-1}\right];$$

$$U = N\varphi = -N\alpha\frac{e^2}{R_0}\left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n-1}\right], \tag{23,7}$$

где R_0 — равновесное расстояние между соседними ионами, N — общее число рассматриваемых ионов. Постоянная Маделунга вычисляется для различных типов ионных решеток и расстояний между соседними ионами в решетке. Некоторые типичные значения α приведены в табл. 11.

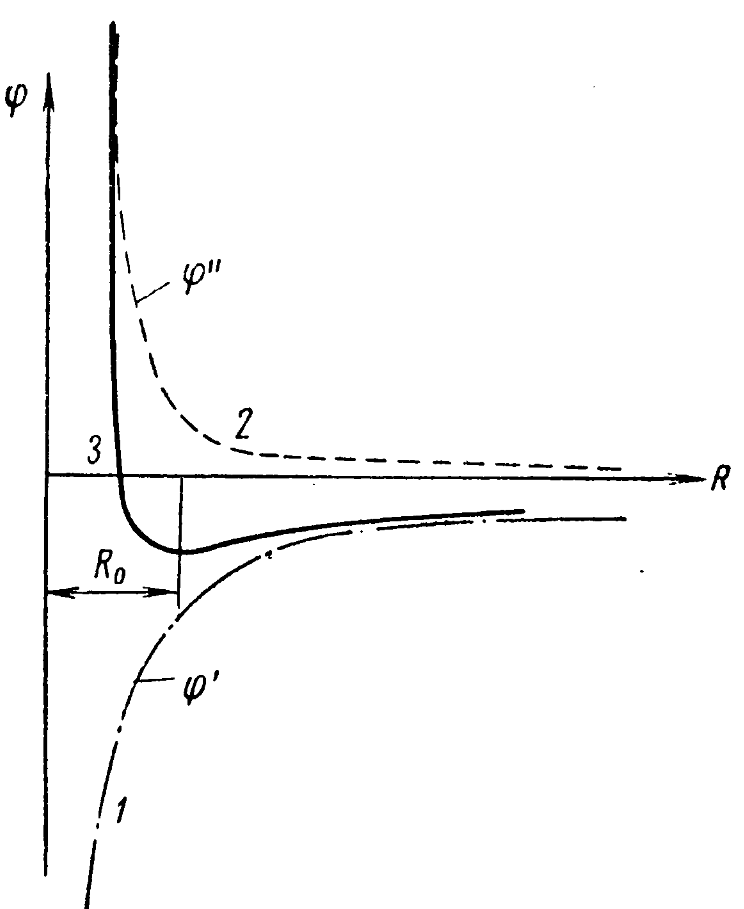


Рис. 23-3. Зависимость энергии взаимодействия ионов в решетке кристаллов от расстояния между ионами (R_0 — равновесное расстояние):

1 — потенциальная энергия кулоновского притяжения ионов $\left(\sim\frac{1}{R}\right)$; *2* — потенциальная энергия отталкивания электронных оболочек $\left(\sim\frac{1}{R^n},\ \text{где}\ n > 1\right)$; *3* — суммарная потенциальная энергия взаимодействия узлов ионной решетки.

Значение показателя $n \gg 1$ может быть выяснено при измерениях коэффициента объемного сжатия кристалла, равного

$$\gamma = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}. \tag{23,8}$$

Действительно, согласно первому началу термодинамики, при пренебрежении теплообменом имеем

$$dU = -pdV,$$

и, значит, $\frac{dp}{dV} = -\frac{d^2U}{dV^2}$, так что при $T = 0°$ K

$$\frac{1}{\gamma} = V\frac{d^2U}{dV^2}. \tag{23,9}$$

Для решетки Na^+Cl^-

$$V = 2NR_0^3, \tag{23,10}$$

где N — полное число молекул, R — расстояние между ионами, в решетке и, значит,

$$\frac{dU}{dV}=\frac{dU}{dR}\cdot\frac{dR}{dV}$$

и

$$\frac{d^2U}{dV^2}=\frac{dU}{dR}\cdot\frac{d^2R}{dV^2}+\frac{d^2U}{dR^2}\left(\frac{dR}{dV}\right)^2.$$

Для равновесного расстояния $R=R_0$; $\frac{dU}{dR}=0$; следовательно, по формулам (23,8) и (23,9)

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{18NR_0}\left(\frac{d^2U}{dR^2}\right)_{R=R_0}, \qquad (23,11)$$

так что по выражению (23,7)

$$\left(\frac{d^2U}{dR^2}\right)_{R=R_0}=\frac{N(n-1)\alpha e^2}{R_0^3} \qquad (23,12)$$

и, значит,

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{(n-1)\alpha e^2}{18R_0^4}. \qquad (23,13)$$

При известных значениях γ, R_0 и α (табл. 11) из уравнения (23,13) может быть найдено n. Например, для хлористого натрия, $\gamma=3,3\cdot10^{-12}$ *см*^{2} *дин*$^{-1}$; $R_0=2,8\cdot10^{-8}$ *см* $=2,8\cdot10^{-10}$ *м*, и, следовательно, $n\approx9,5\approx10$.

Таблица 11

Структура	α	Структура	α
Хлористый натрий	1,7476	Цинковая обманка	1,6381
Хлористый цезий	1,7627	Вюрцит	1,6410

Таким образом, для 1 грамм-моля $U_0=N_0\varphi=-\alpha\frac{N_0e^2}{R_0}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, что при $R_0=\sqrt[3]{\frac{\mu}{2\rho N_0}}$ дает результат

$$U_0=545\sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu}}\,\frac{\text{ккал}}{\text{моль}}=2,28\cdot10^6\sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu}}\,\frac{\text{дж}}{\text{моль}}.$$

Лекция 24

УПРУГОСТНЫЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Для твердых тел характерны три основных типа деформации: одностороннее сжатие, или растяжение, происходящее под действием силы, направленной по нормали к поперечному сечению образца; объемное сжатие при всестороннем давлении на твердое тело; сдвиг, происходящий под действием касательной силы. При

малых деформациях тел справедлив закон Гука, по которому относительная деформация тела прямо пропорциональна силе, отнесенной к единице площади ее действия. Для растяжения

$$\frac{\Delta l}{l} = e \cdot \frac{\Delta F}{S} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\Delta F}{S}, \tag{24,1}$$

где E — так называемый модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения образца.

Предельное значение создаваемого напряжения $\frac{F}{S}$, до которого еще соблюдается закон Гука, называют пределом пропорциональности. До предела пропорциональности материал является упругим, т. е. полностью восстанавливающим свою форму. При объемном сжатии

$$\Delta V = -\gamma V \Delta p$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} = -\gamma \frac{\Delta F}{S}, \tag{24,2}$$

а при сдвиге (см. рис. 8-1)

$$\frac{b}{h} = \operatorname{tg} \varphi = f \frac{F}{S}. \tag{24,3}$$

Все другие виды деформаций (изгиб, кручение и поперечное сжатие) являются комбинациями этих трех основных видов. Упругие свойства твердых тел определяют скорость, с которой деформация распространяется в упругом стержне. Относительная деформация (см. рис. 11-2) по закону Гука пропорциональна действующей силе, так что, согласно уравнению (24,1),

$$\frac{F}{S} = E \cdot f(x) = E \frac{\partial y}{\partial x},$$

где E — модуль упругости материала. Если Δx — рассматриваемый участок стержня сечением S, то сила, действующая на него, будет равна

$$S \cdot E\,[f(x + \Delta x) - f(x)] = SE\,\frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \Delta x = SE\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x = \Delta m \cdot a. \tag{24,4}$$

Так как $\Delta m = \rho \cdot S \cdot \Delta x$ и $a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, то после подстановки этих значений в выражение (24,4) получаем уравнение волны деформации в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{24,5}$$

откуда, согласно (11,3),

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{24,6}$$

Колебания и их распространение в веществе определяют термодинамические свойства твердых тел. Согласно классической кине-

тической теории вещества, грамм-молекулярная теплоемкость системы с шестью колебательными степенями свободы движения составляет 6 *кал/град · моль* $\approx 25 \frac{дж}{град \cdot моль}$.

Согласно (14,2), имеем

$$U = 6N \cdot \frac{1}{2} kT = 3NkT = 3RT \qquad (24,7)$$

и

$$c_V = \left(\frac{dU}{\partial T}\right)_V = 3Nk = 3R \approx 6 \frac{кал}{град \cdot моль}. \qquad (24,8)$$

Однако опыт показывает, что при низких температурах теплоемкость твердых тел обращается в нуль. Квантовая теория теплоемкости, согласно которой энергия на каждую степень свободы периодического движения зависит не только от температуры, но и от частоты колебаний, объясняет этот факт. На основании выражения (18,6′) запишем:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (24,9)$$

при $T \to 0$ $\bar{\varepsilon} \to 0$, так что $c_V \to 0$, а при температурах достаточно больших, превышающих некоторую температуру $\Theta°$, которая соответствует условию $h\nu_{макс} = k\Theta°$, $\bar{\varepsilon} \to \frac{1}{2} kT$ или $U \to 3RT$ и, значит, $c_V \to 6 \frac{кал}{град \cdot моль} \approx 25 \frac{дж}{град \cdot моль}$. Здесь $h\nu_{макс}$ — максимальная частота колебаний, воспринимаемая структурой твердого тела. В области температур $T \ll \Theta$ справедлив дебаевский закон изменения теплоемкости

$$c_V = c_D \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3, \qquad (24,10)$$

по которому c_V меняется от 0 при $T = 0$ до $6 \frac{кал}{град \cdot моль}$ при $T \geqslant \Theta = T_Д$.

Этот закон основывается на том, что макроскопический характер распространения волн (24,5) справедлив лишь в случаях, когда длина волны значительно превышает расстояние между частицами. При коротких длинах волн наступает ограничение в распространении волн. Максимальная частота колебаний, которые могут распространяться в решетке, определяется условием

$$\omega_m = 2\pi\nu_m = v_0 \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\bar{\nu} v_0 = \frac{2\pi}{h} k\Theta = \frac{\pi}{a} v_0, \qquad (24,11)$$

где $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ — волновое число, $a = \frac{1}{2}\lambda$ — расстояние между частицами. Справедливость выражения (24,10) подтверждена опытом до температур $T° \leqslant \frac{1}{50}\Theta$.

Таблица 12

Вещество	$T_Д = \Theta$ ° K	$T_Д \cdot A^{1/2}$	Вещество	$T_Д = \Theta$ ° K	$T_Д \cdot A^{1/2}$
NaCl	308	2400	Fe	420	3100
Ag	237	2600	Be	1000	3000
C (алмаз)	860	3000	KCl	230	2000
			Zn	308	2500

Ход изменения теплоемкости твердого тела по Дебаю показан на рис. 24-1. Значения температурного параметра Дебая $T_Д = \Theta \sim A^{-1/2}$ для некоторых веществ атомного веса A приведен в табл. 12.

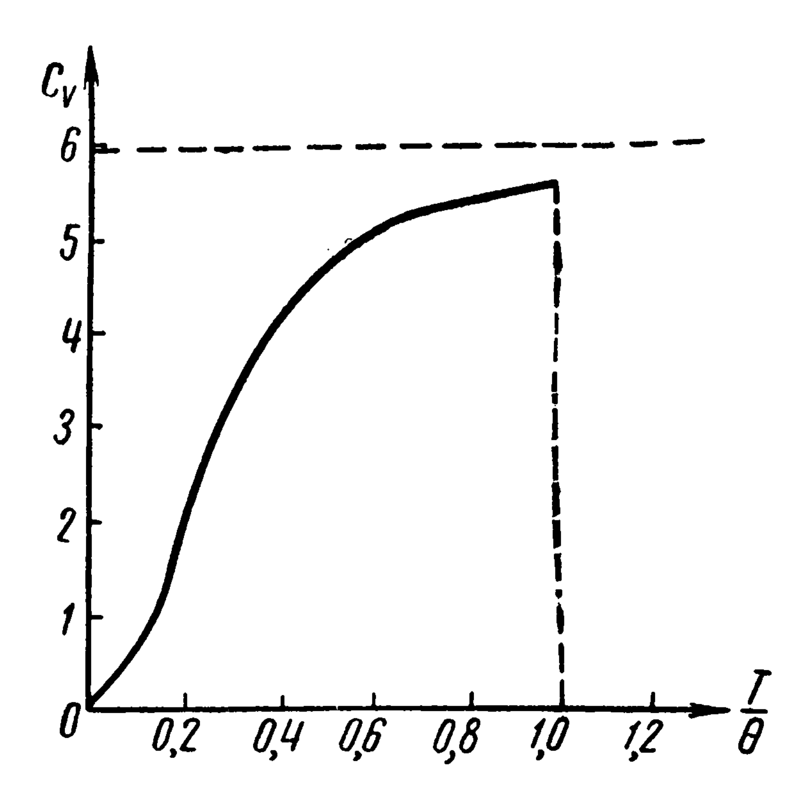


Рис. 24-1. Зависимость теплоемкости твердого тела от температуры (Θ — температурный параметр Дебая)

Основываясь на предположениях теории Дебая об ограничении частот колебаний, воспринимаемых структурой твердого вещества, можно записать уравнение состояния твердых тел в виде

$$p = -\frac{\partial U_0}{\partial V} + \gamma \frac{U_D}{V}. \quad (24,12)$$

Здесь $U_0(V)$ — внутренняя энергия тела при 0° K; U_D — внутренняя энергия, обусловленная колебаниями решетки в дебаевском приближении, безразмерный коэффициент $\gamma = -\frac{d \ln \Theta°}{d \ln V}$ определяется собственными частотами колебаний элементов решетки твердого тела с учетом среднего значения расстояния между частицами. Выражение (24,12) вытекает из термодинамического соотношения (17,4), по которому

$$\delta A = -dU + \delta Q$$

или

$$p\partial V = -\partial U_0 + \gamma \frac{U_D}{V}. \quad (24,13)$$

Дифференцируя уравнение (24,12), получим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \gamma \frac{c_V}{V}, \quad (24,14)$$

однако для твердого тела при линейном коэффициенте расширения α имеем

$$3\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}. \quad (24,15)$$

Так как $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\beta V}$, где β — объемный коэффициент сжатия, то из выражения (24,15) следует, что

$$\alpha = \frac{\beta\gamma c_V}{V} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta}\frac{V}{c_V}. \tag{24,16}$$

Значения постоянной γ, вычисленные по формуле (24,16) для ряда металлов, приведены в табл. 13.

Таблица 13

Металл	γ	Металл	γ
Fe	1,60	Ag	2,40
Co	1,87	W	1,62
Cu	1,96	Pt	2,54

Диффузия в твердом теле может осуществляться тремя путями, показанными на рис. 24-2.

Для таких металлов, как железо, никель, медь, цинк, олово и вольфрам, наибольшее значение имеет процесс замещения вакантного узла соседним атомом (рис. 24-2, *в*). Энергия активации при

а)
A B B A
B B A B
A B A B
B A B B

б)
A B B A
B B A B
B
A A B
B A B B

в)
A B B A
B B A B
A B B
B A B B

Рис. 24-2. Виды диффузии в твердом теле:
а) поворот молекул; *б*) выход атома в междуузлие; *в*) переход на вакантный узел

самодиффузии, расходуемая на образование вакантного узла (1,8 *эв*) и на перемещение вакантного узла (1,0 *эв*), составляет 2 ÷ 3 *эв*.

Обмен местами соседних атомов (рис. 24-2, *а*) характеризуется работой в 11 *эв*, а перемещение атомов в междуузлии (рис. 24-2, *б*) — работой перехода атома в междуузлие (9,5 *эв*) и работой его миграции (0,5 *эв*).

Теплопроводность твердых тел определяется фононами, или квантами энергии механических волн, а также свободными электронами. Для теплопроводности диэлектриков существенное значение имеет теплопередача фононами.

По аналогии с понятием длины свободного пробега молекулы в формуле коэффициента теплопроводности (см. 16,10)

$$K = \frac{1}{3} c v \lambda, \tag{24,17}$$

где c — объемная теплоемкость твердого вещества, v — средняя скорость звука в материале, рассматривается длина пробега фонона λ. Основные значения длины свободного пробега фононов приведены в табл. 14 и на рис. 24-3.

Таблица 14

Кристалл	t °С	$c\ \frac{кал}{см^3 \cdot град}$	K в $кал \cdot см^{-1} \cdot град^{-1} \times \times сек^{-1}$ (в скобках—в $\frac{вт}{см \cdot град}$)	$\lambda \cdot 10^8$ $см$
Кварц параллельной оси	0	0,48	0,03 (0,125)	40
То же	—190	0,13	0,12 (0,50)	540
Плавленный кварц	20	—	—	8
Хлористый натрий	0	0,45	0,017 (0,71)	21
То же	—190	0,24	0,064 (0,268)	150

Подставив значение K в уравнение теплопроводности (16,5), получим для количества тепла Q, проникающего через единицу площади за единицу времени, выражение

$$Q = \frac{1}{3} c (T_1 - T_2) v \frac{\lambda}{L}, \qquad (24,18)$$

где L — длина, на которой происходит перепад температуры $(T_1 - T_2)$.

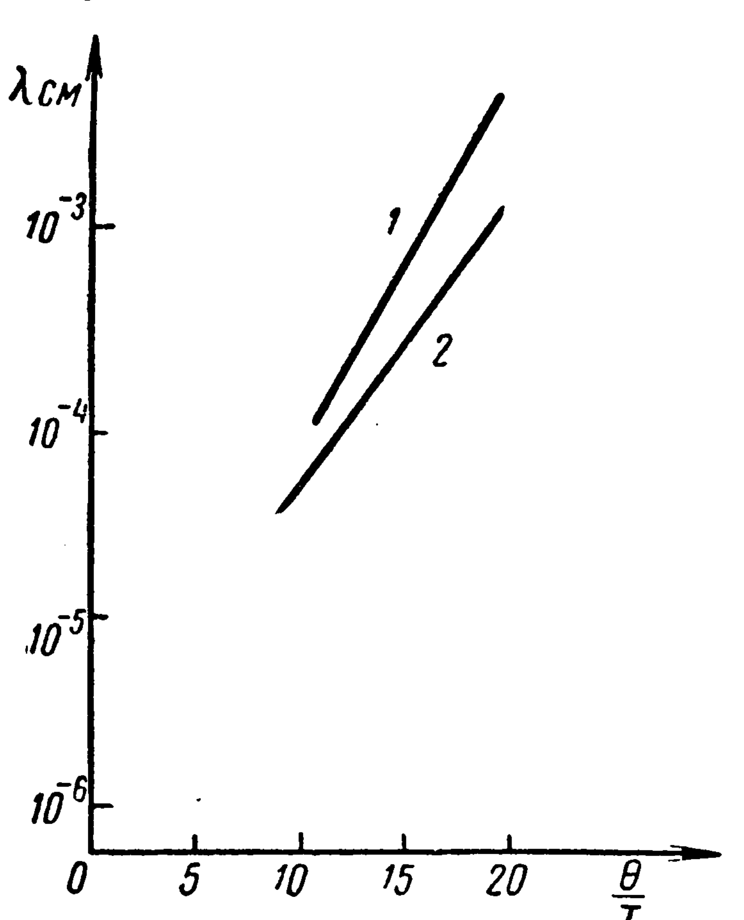


Рис. 24-3. Зависимости длины свободного пробега фонона от $\frac{\theta}{T}$:

1 — для синтетического сапфира ($\theta° = 980°$ К); 2 — для алмаза ($\theta° = 1840°$ К)

Длина свободного пробега фонона зависит не только от рода кристалла и его температуры $\left(\lambda \approx \frac{1}{T}\right)$, но и от размеров и формы образца изделия, а также от наличия дефектов в решетке кристалла. Теплопроводность аморфных сред, таких, например, как стекло, убывает с понижением температуры. У некоторых сортов стекол коэффициент теплопроводности вообще имеет очень малое значение ($K = 5 \cdot 10^{-4}$ $вт \cdot см^{-1} \cdot град^{-1}$). В то же время сапфир (Al_2O_3) обладает необычайно большой теплопроводностью ($K = 60$ $вт \cdot см^{-1} \cdot град^{-1}$), превышающей теплопроводность меди ($K = 50$ $вт \cdot см^{-1} \cdot град^{-1}$). Металлы обладают теплопроводностью, превышающей теплопроводность диэлектриков в десятки раз $\left(\frac{K_м}{K_д} = 30\right)$; при этом в металлах преобладающее значение имеет механизм электронной теплопроводности. Принимая приближенно, что число фононов и

электронов в металле одинаково, для упорядоченной структуры при $T = 300^\circ\,C > 0^\circ$, согласно выражению (24,17), получим:

$$\frac{K_э}{K_ф} \approx \frac{c_э\, u\lambda_э}{c_ф\, v\lambda_ф} \approx 3 \cdot 10^3.$$

Для неупорядоченной решетки сплавов роль электронного и фононного механизма теплопроводности примерно одинакова $\left(\frac{K_э}{K_ф} \approx \frac{c_э u}{c_ф v} = 3\right)$, так что $\lambda_э \approx \lambda_ф$.

Бинарный сплав называется структурно упорядоченным, если атомы A и B распределены по узлам решетки так, что каждый атом B имеет ближайшими соседями только атомы A, и наоборот, (рис. 24-4). Полное упорядочение структуры достигается при температуре абсолютного нуля. Оно нарушается при возрастании температуры. Если сплав быстро охладить (закалить), то можно «заморозить» неравновесную разупорядоченность. Нарушение упорядоченной структуры возникает также под действием облучения тяжелыми ядерными частицами (барионами).

а)

```
A   A   A   A
  B   B   B
A   A   A   A
  B   B   B
A   A   A   A
```

б)

```
A   B   B   A
  A   B   A
A   B   A   B
  B   A   A
A   A   B   B
```

Рис. 24-4. Упорядоченное (*а*) и неупорядоченное (*б*) расположения ионов A и B в сплаве AB

Неоднородность в структуре кристаллов вызывается фононами, т. е. квантами энергии колебаний решетки, взаимодействующими с электронами и дефектами решетки; электронами и «дырками» валентных связей с их рекомбинациями; экситонами, т. е. перемещающимися возбужденными состояниями атомов в решетке; вакантными узлами и атомами в междуузлии; примесными атомами и дислокациями, или микросмещениями сдвига.

Лекция 25

РАДИАЦИОННЫЕ ДЕФЕКТЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Излучение (корпускулярное или квантовое) при проникновении в твердые тела производит в нем то или иное действие, которое приводит к образованию «точечных» дефектов. Такими дефектами в кристалле являются свободные вакансии в узлах кристаллической решетки; смещенные атомы, внедренные в междуузлие; атомы примесей, образованные за счет замещений в узлах решетки и за счет ядерных превращений, а также температурные клинья, образующиеся вдоль пробегов частиц в веществе.

По свойствам и характеру взаимодействия частиц с веществом проникающие излучения могут быть подразделены на три вида. 1. Заряженные частицы больших энергий: ионизированные атомы, выбитые из узлов решетки, ядра-осколки, образующиеся при деле-

нии тяжелых ядер (например, ядер урана), протоны (ядра легкого изотопа водорода), дейтероны (ядра тяжелого изотопа водорода — дейтерия), альфа-частицы (ядра изотопа гелия) и электроны (бета-частицы). 2. Незаряженные, т. е. нейтральные в электрическом отношении, частицы — нейтроны (они подразделяются на тепловые, если их кинетическая энергия E соответствует средней кинетической энергии молекул вещества (0,03 *эв*) при комнатной температуре ($t = 20°$ С), на медленные, если 0,1 *эв* $< E <$ 1 *кэв*, на промежуточные, если 1 *кэв* $< E <$ 0,5 *Мэв*, и быстрые при $E >$ 0,5 *Мэв*). 3. Кванты электромагнитного излучения с энергией $\varepsilon_\nu = h\nu >$ 10 *кэв* (рентгеновское и гамма-излучения).

Во всех случаях взаимодействия первичными эффектами оказываются ионизация атомов, смещение атомов из узлов решетки, возбуждение атомов без их смещения и, наконец, ядерные превращения. Движущаяся заряженная частица большой энергии $E \approx$ 1 *Мэв*, как и первично выбитый атом, взаимодействует прежде всего с электронами вещества. Производя при столкновениях ионизацию атомов, они сами теряют электроны, орбитальная скорость которых меньше поступательной скорости частицы. Например, ядра-осколки в начале своего проникновения приобретают положительный заряд в 20 e. Однако после затормаживания они вновь захватывают электроны. Таким образом, движение первично выбитого из узла решетки атома представляется как движение заряженной частицы. Взаимодействие движущегося атома с атомом вещества, при учете экранирующего действия электронной оболочки, обусловлено кулоновским взаимодействием зарядов ядер. При больших энергиях движущейся частицы ($E \approx 1 \div 2$ *Мэв*) столкновения атомов происходят преимущественно как неупругие (электронное возбуждение, ионизация). При замедлении, когда $E < A$ *кэв*, где A — атомный вес, наоборот, преобладают упругие столкновения. Переход от одного типа взаимодействия к другому при изменении начальной энергии частицы происходит постепенно. Так как электронное возбуждение наблюдается всякий раз, когда скорость движущейся частицы (радиационной, или выбитого атома) больше орбитальной скорости электрона вещества мишени, то для каждого сорта движущегося атома можно указать такую его энергию E_i (энергия ионизации атомов вещества), меньше которой ионизационный эффект взаимодействия перестает иметь значение. Независимо от вещества, в котором движется атом, этот энергетический порог составляет примерно столько килоэлектронвольт, каков атомный вес A движущегося атома. Согласно полуэмпирической формуле Зейтца, $E_i \approx 0{,}1 \left(\frac{M}{m_э}\right)\bar{\varepsilon}$, где M — масса движущегося атома, $\bar{\varepsilon} \approx 5$ *эв* — среднее значение энергии электронного возбуждения атомов в изоляторах или энергии Ферми в металлах. Таким образом,

$$E_i \approx \frac{M}{2m_э} = \frac{1840 m_э}{2m_э} A(эв) \approx A кэв. \qquad (25,1)$$

Наиболее важным первичным эффектом является смещение атомов решетки. Оно происходит в результате упругих столкновений, когда переданная атому решетки энергия превышает некоторую пороговую величину $E_d \approx 25$ *эв*.

В рассматриваемой области энергий частиц в большинстве случаев допустимо пользоваться классической механикой (исключение составляют релятивистские электроны), так что потенциальная энергия взаимодействия зарядов ядер Z_1 и Z_2 для всех значений $r < a$ согласно Бору составит

$$U(r) = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{r} \cdot e^{-r/a}, \tag{25,2}$$

где a — радиус экранирования заряда ядра электронным облаком (13,10).

В тех случаях, когда осуществляется наибольшее сближение частиц (13,13), т. е. $b \ll a$, происходит резерфордовское рассеяние частиц [см.(13,19)]; при $b \gg a$ рассеяние становится подобным упругому взаимодействию твердых тел. Максимальная механическая энергия, передаваемая тяжелой частицей атому, определяется соотношением [см. (13,19)]

$$\Delta E_m = \frac{4M_1M_2}{(M_1 + M_2)^2} E.$$

В случае электронов больших энергий релятивистское соотношение для передаваемой энергии примет вид

$$\Delta E_m = 2E \frac{E + m_0c^2}{Mc^2}. \tag{25,3}$$

В табл. 15 приведены значения кинетических энергий движущихся частиц [см. (13,20) и (25,3)], при которых происходят смещения атомов решетки.

Таблица 15

Атомный вес неподвижных атомов решетки	Энергия (в *эв*) частиц			
	нейтроны и протоны	α-частицы	электроны от γ-излучения	осколки деления с массовым числом 100
10	76	31	10^5	76
50	325	91	$4 \cdot 10^5$	28
100	638	169	$6{,}8 \cdot 10^5$	25
200	1263	325	$1{,}1 \cdot 10^6$	28

Вероятность смещения атома, определяемая так называемым «сечением процесса», в области энергий $E > E_d = 25$ *эв* линейно возрастает с увеличением энергии движущейся частицы, достигая некоторого постоянного значения при $E = E_i$ (рис. 25-1).

Быстрые нейтроны сообщают механический импульс ядрам атомов. Передаваемая при этом нейтронами (2 *Мэв*) энергия, согласно выражению (13,6), в среднем составляет

$$\bar{E} = \frac{1}{2} E_m \approx \frac{4}{A}\left(1 + \frac{1}{A}\right)^{-2} \text{ Мэв},$$

где A — атомный вес вещества мишени. Получающиеся значения переданной энергии $\bar{E}$ значительно превышают среднюю энергию атомов, выбитых заряженными частицами. В некоторых случаях, соответствующих резонансному захвату тепловых нейтронов с вылетом заряженных частиц высоких энергий, большое значение приобретают ядерные реакции. Примером может служить превращение золота в ртуть под действием тепловых нейтронов.

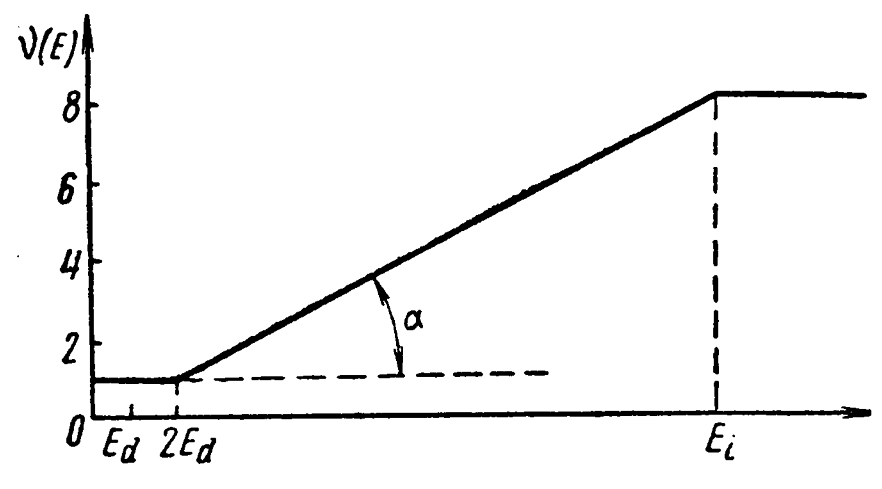


Рис. 25-1. Зависимость среднего числа смещенных атомов, приходящихся на один первично выбитый атом с энергией E (для области $2E_d < E < E_i$ имеем $\nu(E) \approx 0{,}56\left(1 + \frac{E}{E_d}\right)$; $\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{E}{2E_d}$)

В реакторах, где поток тепловых нейтронов примерно в пять раз превышает поток быстрых нейтронов, на каждые два смещенных атома приходится примерно одно ядерное превращение. При этом учитывается, что в золоте, например, каждый выбитый быстрым нейтроном атом производит около 140 вторичных смещений.

Теория смещений исходит из допущения, что все столкновения являются бинарными, т. е. происходят между двумя атомами, из которых обычно один движется относительно решетки. Движущийся атом растрачивает энергию путем ионизации до тех пор, пока его энергия не сделается меньше предельной энергии ионизации $E_i = A$ *кэв*. Все выбитые в междуузлие атомы с кинетической энергией, меньшей E_i, растрачивают ее путем упругих столкновений по типу удара упругих шаров. Атомы смещаются из положения равновесия, если при столкновении им сообщается энергия больше пороговой $E_d = 25$ *эв*. Увеличение числа смещенных атомов будет только в тех случаях, когда ударяющий и смещаемый атомы после взаимодействия будут обладать энергиями E'_1 и E'_2, превышающими пороговые значения E_d. При этих допущениях число смещений в единице объема вещества мишени будет равно

$$N_d = n_p \nu = \varphi t n_0 \sigma_d \bar{\nu}, \qquad (25,4)$$

где n_p — число первично выбитых атомов в единице объема вещества, ν — среднее число смещений, образуемых выбитым атомом, φ — плотность потока частиц излучения, t — время облучения, n_0 — число атомов вещества в единице объема, σ_d — сечение смещения, отнесенное к одному атому.

Среднее число смещений, приходящихся на один выбитый атом в области значений энергии налетающего атома $2E_d < E < E_i$ (см. рис. 25-1), по теоретическим расчетам равно

$$\bar{\nu}(E) = \frac{E}{2E_d}. \qquad (25,5)$$

Это значит, что в среднем половина энергии движущегося атома расходуется на смещения, а другая половина затрачивается на столкновения в области ниже пороговой энергии смещения («тепловые клинья»). В табл. 16, согласно формуле (25,5), приведено число смещенных атомов $\bar{\nu}$, приходящихся на один первично выбитый атом мишени, при облучении нейтронами с энергией $1 \div 2$ *Мэв*.

Таблица 16

Вещество	Атомный вес A	$E_i \cdot 10^3$, *эв*	Передаваемая энергия $\Delta E \cdot 10^4$, *эв*	Расход энергии на упругие столкновения $G \cdot 10^3$, *эв*	$\nu = \frac{E}{2E_d}$
Бериллий	9	9	18,0	22	440
Графит	12	12	14,2	45	900
Железо	56	56	3,5	34,5	390
Медь	64	64	—	—	380
Германий	93	93	—	—	290
Золото	197	197	—	—	140

Если переданная движущимся атомом энергия превышает пороговую энергию смещения E_d, но оставшаяся энергия меньше E_d, то происходит замещение выбитого атома налетевшим. Тем самым осуществляется перемещение атомов в решетке многоатомных веществ (разупорядочение структуры сплавов).

Однако для замещения атомов в решетке не обязательно, чтобы налетевший атом передал полностью энергию смещения E_d, поскольку при этом не требуется производить работу внесения атома в междуузлие. Таким образом, можно указать еще одно значение пороговой энергии — энергетический порог замещения $E_r < E_d$.

Теория, развитая на основе таких предпосылок, приводит к сложному функциональному соотношению для числа замещений μ в зависимости от энергии E движущегося атома, но дает достаточно точную аппроксимацию этой функции в виде

$$\mu(E) = 1{,}6 \ln \frac{E}{2E_r} + 1 \quad \text{при} \quad 2E_r < E < 2E_d, \qquad (25,6)$$

$$\mu(E) = \frac{E}{2E_d}\left(1{,}6 \ln \frac{E_d}{E_r} + 1\right) \quad \text{при} \quad E \geqslant 2E_d.$$

Сравнивая это выражение с формулой (25,5), имеем

$$\frac{\mu(E)}{\nu(E)} = 1{,}6 \ln \frac{E_d}{E_r} + 1. \qquad (25,7)$$

Так как можно считать, что $\frac{E_d}{E_r} \approx 10$, то, значит, число замещений на каждый выбитый атом превышает число смещений в $4{,}7 \approx 5$ раз. Рис. 25-2 иллюстрирует основные положения и выводы теории смещений и замещений.

При передаче энергии $\Delta E = E'_r < E_r$ атом решетки остается на месте, но при этом происходит увеличение амплитуды его колебаний, т. е. передача энергии решетке кристалла. При облучении вещества легкими ядрами с энергиями в несколько мегаэлектронвольт передача малых порций энергий $\Delta E < E_r$ будет происходить локально, а в легких средах еще и на значительных расстояниях друг от друга (большие расстояния между местами упругих столкновений).

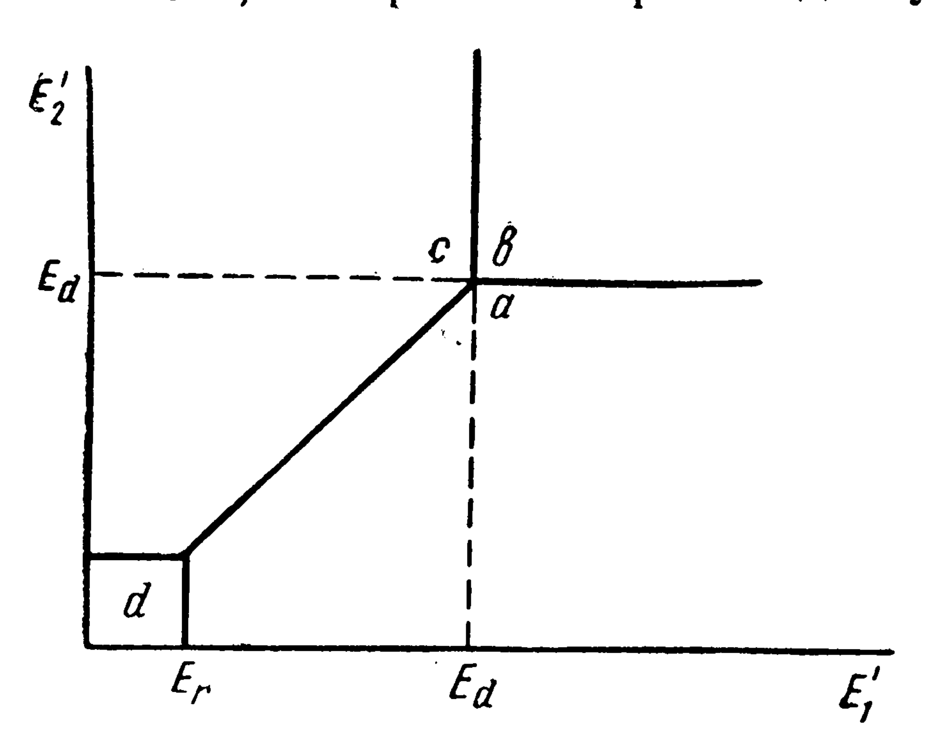


Рис. 25-2. Диаграмма, поясняющая теорию смещений и замещений:

E'_1 и E'_2 — энергии ударяющего (*1*) и ударяемого (*2*) атомов непосредственно после взаимодействия

В области *a* при $E'_2 > E_r$ возможен выход атома из узла решетки; при $E'_2 < E_d$ дополнительных смещений не происходит; при $E'_2 < E_d$ замещения не происходит.

В области *b* при $E'_2 > E_d$ происходит смещение и возможны дополнительные смещения, если $E'_2 > 2E_d$; при $E'_1 < E_d$ замещения не происходит.

В области *c* при $E'_2 > E_r$ возможен выход атома из узла решетки; при $E'_2 < E_d$ происходят дополнительные смещения; при $E'_1 < E_d$ происходит замещение.

В области *d* при $E'_2 < E_r$ выхода атома из узла решетки не происходит; при $E'_1 < E_r$ замещения нет. Решетке передается энергия $E = E'_2 + E'_1 < 2E_r$

Выбитые атомы обладают энергией в несколько сотен электронвольт. Их пробеги в веществе лежат в пределах от 10 до 100 Å и на таком пути они передают эту энергию колебаниям решетки (сферический температурный клин).

Если для примера рассмотреть случай радиационных дефектов в меди, то при энергии в 300 *Мэв* на пути 30 Å локальный нагрев за время, примерно, в $5 \cdot 10^{-12}$ *сек* (30 периодов колебаний атома решетки), достигает температуры плавления меди 1086° С. Область такого температурного клина содержит 1100 атомов вещества. Распределение температуры в клине для различных моментов времени от возникновения до полного охлаждения показано на рис. 25-3. Образующиеся при нейтронном облучении тяжелых материалов атомы, выбитые с большой энергией, имеют близко расположенные места столкновений и образуют за время порядка 10^{-12} *сек* цилиндрические клинья длиной до 1000 Å диаметром 25 Å при средней температуре нагрева до 1000° С. Локальный высокотемпературный нагрев приводит к внутренним напряжениям в материале. Напряжение сжатия в радиальном направлении внутри температурного

клина радиуса $r_{кл}$ составит при $r < r_{кл}$

$$p_0 = \frac{4}{3}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\cdot\mu\frac{\Delta l}{l}, \qquad (25,8)$$

где σ — так называемый коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, а при $r > r_{кл}$

$$p_0' = p_0\left(\frac{r_{кл}}{r}\right)^3.$$

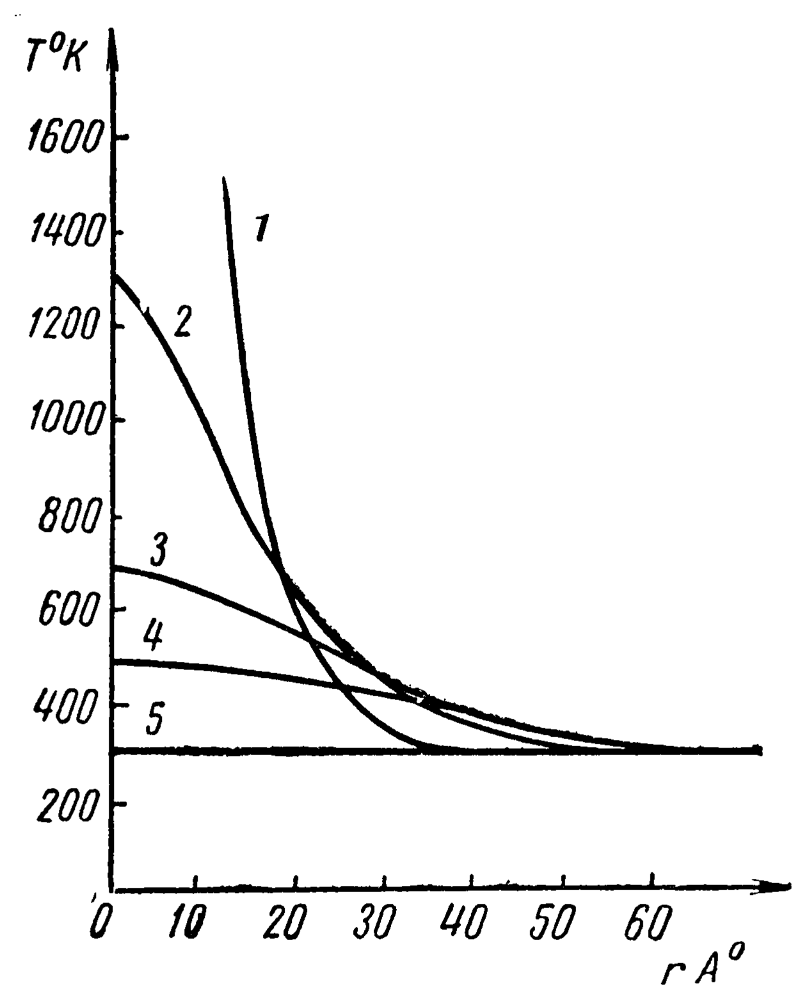


Рис. 25-3. Распределение температуры $T°K = f(r)$ в типовом температурном клине в различные моменты времени: *1*) спустя $t = 5\cdot 10^{-12}$ *сек* после возникновения; *2*) $t = 10^{-11}$ *сек*; 3) $t = 2\cdot 10^{-11}$ *сек*; *4*) $t = 3\cdot 10^{-11}$ *сек*; 5) $t > 10^{-10}$ *сек*

Принимая для рассматриваемого случая (т. е. для сферического клина радиуса 15 Å в меди) $\frac{\Delta l}{l} = 5\cdot 10^{-2}$, $\mu = 10^{12}$ *дин* · *см*$^{-2}$ и $\sigma = 1/4$, получим $p_0 = 10$ *дин·см*$^{-2}$. Такое напряжение в материале соответствует пластической деформации бездефектных кристаллов.

Дислокации, или атомные сдвиги в решетке (рис. 25-4), в хорошо отожженных веществах находятся на расстоянии порядка $10^4 \div 10^5$ Å и, следовательно, температурный клин может привести к пластическому сдвигу только тогда, когда дислокации будут создаваться внутри самого клина и при этом в областях высоких механических напряжений. Так как энергия, приходящаяся на 1 Å длины дислокации, составляет несколько десятых долей электронвольта, то при энергии температурного клина сотни электронвольт, возникающие петлеобразные дислокации не могут быть слишком обширными. Полагая, что в дислокационные дефекты решетки преобразуется несколько процентов всей энергии клина, для диаметра дислокационной петли получаем значение в несколько десятков ангстрем. По мере охлаждения внутренние напряжения снимаются, и дислокационные петли сжимаются. Однако остаются при этом те или другие пластические деформации, которые приводят к разупорядочению структуры в сплавах. При относительно небольших энергиях первично выбитых атомов порядка $(10^2 \div 10^3)$ *эв* среднее расстояние между вторичными смещениями в меди становится

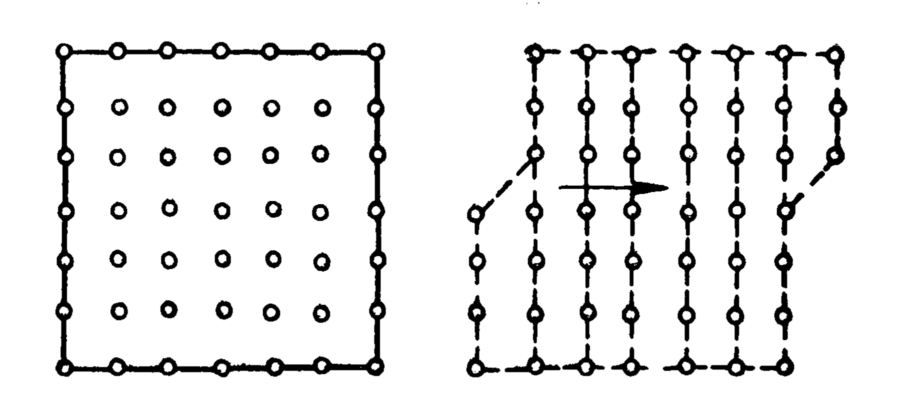


Рис. 25-4. Схема движения дислокации при сдвиге верхней части кристалла вправо

меньше одного межатомного расстояния. В более тяжелых элементах вообще преобладает плотное расположение взаимосвязанных вторичных смещений, так что десятки тысяч атомов в цилиндрической области вдоль пути пробега первично выбитого атома быстро переходят в расплавленное состояние с турбулентным перемешиванием и быстрым затвердеванием (рис. 25-5). Вследствие связей возникшего клина смещений с окружающей первоначальной решеткой вещества значительная часть дефектов в виде вакансий и внедренных атомов будет при этом отожжена, однако некоторое количество дефектов, небольших разориентированных областей и дислокаций сохранится.

Облучение потоками γ-квантов и квантов рентгеновского излучения характеризуется прежде всего ионизацией, производимой

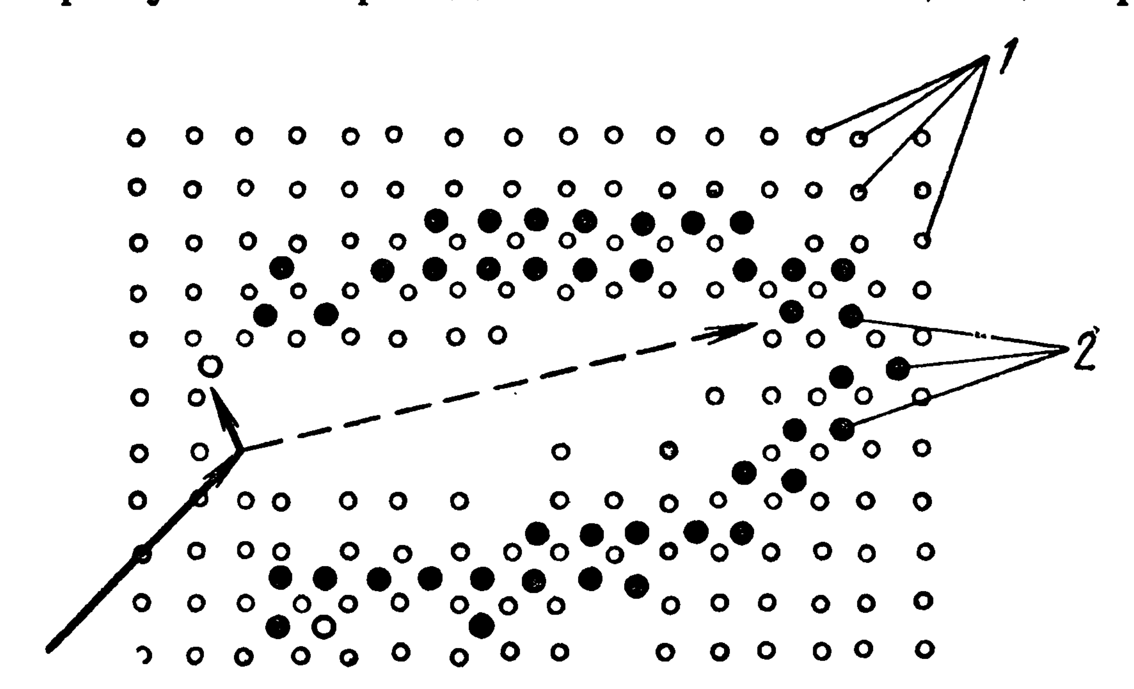


Рис. 25-5. Клин смещения в неустойчивом состоянии

Обозначения: сплошная жирная линия — путь первичной частицы, пунктирная—путь первичного выбитого атома, *1* — атом решетки; *2* — атом, внедренный в междуузлие

в веществе первично вырванными электронами. В веществе каскадно образуется полиэнергетический поток электронов, которые при больших энергиях и вызывают смещение атомов.

На рис. 25-6 показаны области основных видов фотоэлектрического взаимодействия γ-квантов излучения с электронами атомных оболочек и полей ядер атомов различных порядковых номеров.

Ионизация в металлах компенсируется свободными электронами и к структурным последствиям не приводит.

В изоляторах вторичными эффектами могут быть химические реакции, в том числе и такие, которые другими способами не могут быть вызваны. Под действием γ-квантов возможны смещения атомов решетки, но эффективность таких взаимодействий мала. Основное значение имеет внутреннее облучение электронами отдачи (область *C* на рис. 25-6).

Поперечные сечения смещения атомов, происходящего в результате фотоэлектрического столкновения, приведены в табл. 17.

Как видно, эффективность смещений от γ-квантов на два порядка ниже эффективности смещения от быстрых нейтронов тех же энергий, поскольку в последнем случае в меди каскадно возникает 400 смещений на каждый выбитый атом (табл. 16). Большое практическое значение имеет действие гамма-излучений, происходящее в большом объеме вещества.

Таблица 17

Элемент	Энергия γ-квантов в *Мэв*	Эффективное поперечное сечение смещения атомов, 10^{-24} *см*^{2}
Углерод	0,5 1,0 2,0	0,02 0,14 0,43
Медь	0,5 1,0 2,0	— 0,046 1,40
Золото	0,5 1,0	— —

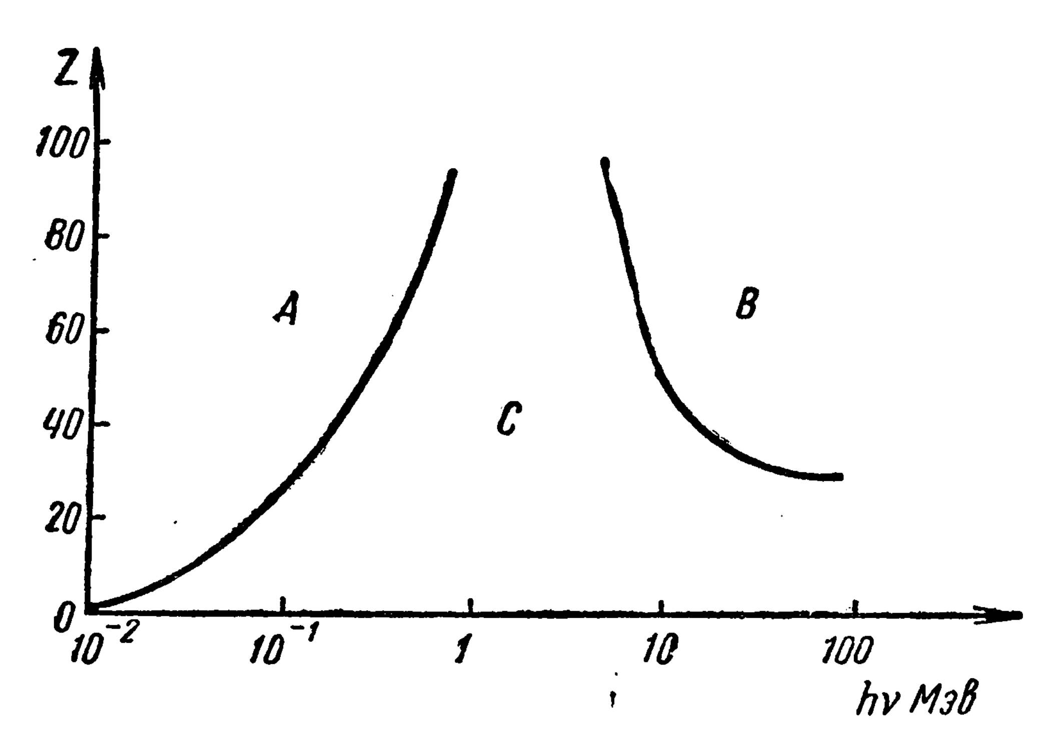


Рис. 25-6. Области различных взаимодействий γ-квантов с зарядами атомов вещества: *A* — фотоэлектрическое выравнивание электронов из атомов; *B* — превращение кванта излучения в пару частиц электрон—позитрон (антиэлектрон); *C*—фотоэлектрическое столкновение (Комптон-эффект) — область, наиболее эффективная в отношении «смещений»

Ионизацию от гамма-излучений в воздухе, при которой образуется $2 \cdot 10^9$ пар ионов в 1 *см*^{3} (1СГС$_q$), принимают за единицу экспозиционной дозы излучения и называют рентгеном. В активной зоне ядерных реакторов разных типов мощность экспозиционной дозы гамма-излучений достигает 10^{10} рентген в час ($3 \cdot 10^6$ *р* · *сек*$^{-1}$), что соответствует плотности потока γ-квантов в $5{,}7 \cdot 10^{15}$ *см*^{2}*сек*$^{-1}$ при $h\nu = 1$ *Мэв*.

Имеются и другие механизмы образования смещений под действием γ-квантов. Они наблюдаются в изоляторах с многоатомными молекулами. Образованные локальные очаги электронно-возбужденных состояний (экситоны) мигрируют в кристалле до встреч со структурными нарушениями решетки, например с неровностями в линиях дислокаций. В таких местах экситоны передают энергию решетке с образованием горячих локальных областей, в которых происходит выкипание вакансий и их рекомбинация с электронами. При поглощении экситонов осуществляется миграция точечных дефектов от места их образования (окраска ионных кристаллов).

Другой механизм, возможный только в ионных кристаллах, является следствием ионизации отрицательных ионов решетки.

Такие ионы с измененным знаком заряда оказываются в неравновесном состоянии, так как окружены ионами такого же знака. Они переходят в междуузлие (оказываются внедренными частицами), где вновь приобретают электроны, после чего диффундируют в веществе до встречи с дефектами решетки (вакансиями), которыми будут захвачены (окраска щелочных галогенидов). Освобождаемые вакансии могут быть заняты также электронами с образованием центров люминесценции (высвечивания).

Лекция 26

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ЗАРЯДОВ

В результате изучения явления электролиза Фарадеем была установлена величина заряда одновалентного иона

$$e = q = \frac{N_Ф}{N_0} = \frac{96540 \cdot 3 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^{23}} = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\,(\text{а. э. е.}) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\kappa.$$

Величина элементарного заряда свободного электричества была определена электростатическим методом измерений в опытах Милликена (рис. 26-1).

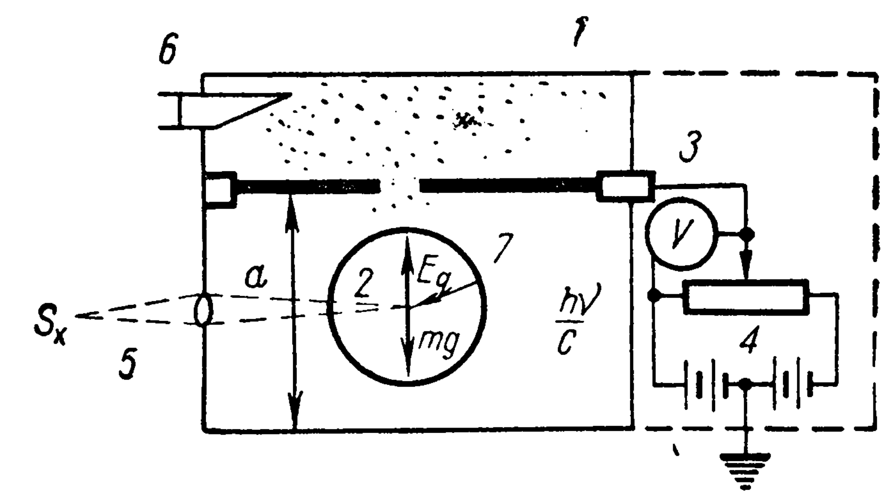


Рис. 26-1. Схема опыта Милликена по определению заряда электрона:

1 — металлическая решетка; *2* — поле зрения микроскопа; *3* — электрод управления электрическим полем; *4* — потенциометр; *5* — осветитель капли; *6* — пульверизатор; *7* — ультрафиолетовые лучи, воздействующие на заряды капель

Капли разбрызгиваемого масла несут некоторые различные заряды $\pm q_i$. Если с помощью микроскопа следить за какой-либо одной микрокаплей (например, k-й), взвешенной в однородном электрическом поле плоского конденсатора, так что $q_k E_0 = m'_k g$, где $m'_k = (\rho_м - \rho_в) V_k$ — откорректированная, согласно закону Архимеда, масса капли, то вскоре поле зрения микроскопа очистится от всех остальных капель, кроме избранной. Капли, заряженные противоположным, чем q_k, зарядом, выпадут вниз, а капли, имеющие другую массу или другой по величине заряд ($q \lessgtr q_k$), также выйдут из поля зрения либо вверх, либо вниз. Меняя направленность электрического поля, можно переводить избранную k-ю каплю из нижнего положения в верхнее. Предоставляя возможность капле падать в воздухе из верхнего положения в нижнее, при различных значениях напряженности поля $E \gtrless E_0$ можно найти ее заряд путем измерения скорости v равномерного падения капли.

Используя формулу Стокса, относящуюся к движению сферического тела в вязкой среде, из n наблюдений получаем значение заряда для избранной капли

$$\bar{q}_k = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} q_{k,\,i}, \quad \text{где} \quad q_{k,\,i} = \frac{m'_k}{E_i}g - \frac{6\pi r_k \eta_в}{E_i}v_i. \qquad (26,1)$$

Здесь E_i, r_k, v_i и $\eta_в$ — соответственно напряженность электрического поля при падении капли, радиус капли, постоянная скорость ее падения и вязкость воздуха. Радиусы масляных микрокапель r_k определялись путем осаждения капель на несмачиваемую поверхность по конусу рассеяния каплями видимого света и в специальных экспериментах. При воздействии ультрафиолетовыми лучами заряд избранной капли изменялся (фотоэлектрический эффект), и, таким образом, для каждой из них находился ряд ее зарядов: $q_{k,\,1}$, $q_{k,\,2}$, $q_{k,\,3}, \ldots, q_{k,\,z}$. Подобным образом измерялся ряд зарядов другой капли и так далее. Из очень большого числа вычисленных значений зарядов капель масляного тумана и их возможных изменений были получены принципиально важные результаты:

1) в природе не наблюдаются заряды, по величине меньшие, чем заряд электронов

$$e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ (\text{а. э. е.}) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,к; \qquad (26,2)$$

2) во всех случаях обнаруженных зарядов капель

$$q_k = ke,$$

где $k = 0,\ 1,\ 2$;

3) электрон представляет собой элементарный устойчивый отрицательный и всегда одинаковый заряд.

В настоящее время известен антиэлектрон (позитрон), т. е. заряд, имеющий такую же величину, как и заряд электрона, но противоположный ему по знаку. Однако время существования позитрона очень мало (10^{-6} *сек*). При воссоединении позитрона с одним из имеющихся многочисленных стабильных электронов происходит их превращение (часто называемое аннигилляцией) в два кванта электромагнитного излучения.

Электрический заряд и присущее ему электрическое поле — неотделимые друг от друга понятия. Действие электрического заряда проявляется вне места локализации массы покоя этой частицы. Связь между зарядом q и электрическим состоянием среды, окружающей этот заряд, выражается законом Кулона. Вектор напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r, будет равен *

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \frac{q}{\varepsilon_c r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \qquad (26,3)$$

* Во всех электростатических соотношениях, приводимых в тексте, используется абсолютная электростатическая система единиц.

где ε_c — скалярная величина, называемая абсолютной диэлектрической проницаемостью среды. Числовое значение диэлектрической проницаемости, так же как и размерность этой величины, зависит от выбора системы единиц измерений. В Международной системе единиц (СИ) электрическая постоянная вакуума имеет значение

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{10^{-9}}{9} \frac{a \cdot сек^2}{н \cdot м^2},$$

поэтому абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, содержащей вещество, будет равна $\varepsilon_c = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon$, где ε — относительная диэлектрическая проницаемость, приводимая в таблицах. В абсолютной электростатической системе единиц (а. э. с. е.), опирающейся на закон Кулона, ε принимается величиной безразмерной $\varepsilon = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}$, для вакуума равной единице ($\varepsilon_c = \varepsilon_0$). Введя понятие напряженности электрического поля $E = \frac{F}{q}$ как силы взаимодействия, отнесенной к единице заряда, одновременно можно установить и энергетическую характеристику поля. Скалярным потенциалом в данной точке поля φ называют энергию единичного положительного заряда, помещенного в эту точку поля, так что

$$d\varphi = -\vec{E}\, d\vec{r}. \qquad (26,4)$$

Таким образом, напряженность электрического поля и его потенциал связаны определенным соотношением, по которому напряженность поля равна градиенту потенциала с обратным знаком, т. е.

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -\operatorname{grad} \varphi. \qquad (26,5)$$

Умножив обе части выражения (26,3) на ε_c, получим

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (26,6)$$

Образованный таким образом вектор диэлектрического смещения $\vec{D}$ зависит исключительно от заряда, создающего поле, и от расстояния от него до избранной точки поля. В изотропной среде направление вектора $\vec{D}$ совпадает с направлением вектора $\vec{E}$. Для вакуума в системе (а. э. е.) имеем $\vec{E}_0 = \vec{D}_0$. Поток вектора $\vec{D}$, или, иначе, поток диэлектрического смещения $\vec{N}$, созданный суммарным электрическим зарядом, и величина этого заряда q по смыслу этих понятий должны быть прямо пропорциональны друг другу.

Элементарный поток смещения сквозь элемент dS произвольной замкнутой поверхности, внутри которой заключен точечный заряд, выражается формулой (рис. 26-2):

$$dN = D_n dS = D \cos\varphi\, dS = \frac{q}{r^2} dS_n = q d\Omega. \qquad (26,7)$$

Полный поток диэлектрического смещения по всему внутреннему телесному углу $\Omega = 4\pi$, на который опирается всякая замкнутая поверхность, будет равен

$$N = \oint_S D_n dS = \int_0^{4\pi} q d\Omega = 4\pi q^*. \qquad (26,8)$$

Выражение (26,8) представляет собой интегральную форму записи теоремы Остроградского — Гаусса.

Если считать, что знак диэлектрического смещения совпадает со знаком заряда, то в общем случае получим

$$N = 4\pi \sum_1^z q_i, \quad \text{или} \quad \int_V \nabla\vec{D}\cdot dV = \int_V \rho dV, \qquad (26,8')$$

где $\sum_1^z q_i$ и $\int_V \rho dV$ — соответственно алгебраическая сумма z зарядов и полный пространственный заряд плотностью ρ, находящийся внутри замкнутого объема V. Символ ∇, как обычно, обозначает дифференциальный оператор

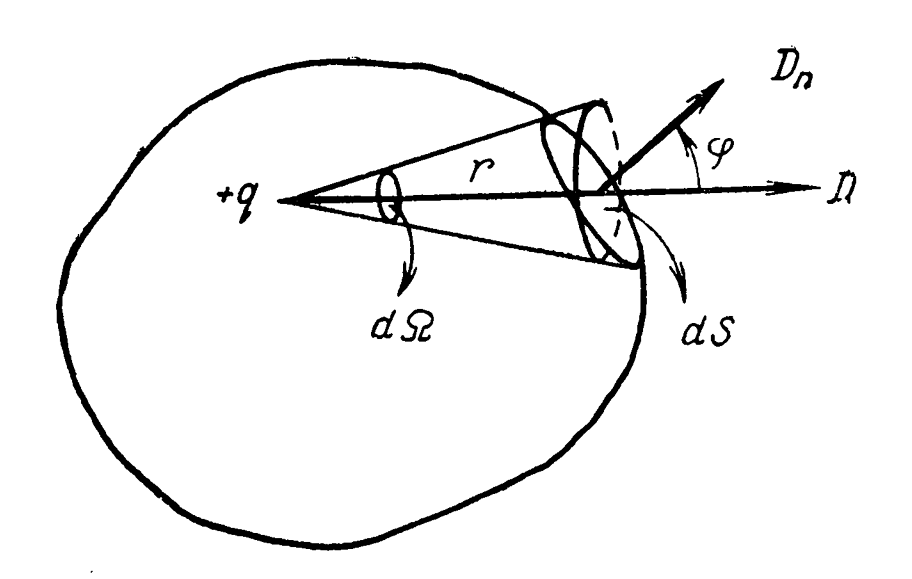


Рис. 26-2. К доказательству теоремы Остроградского — Гаусса

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Так как оба интеграла (26,8) распространены на один и тот же объем поля, то, очевидно,

$$\nabla \vec{D} = \rho,$$

что является дифференциальной формой теоремы Остроградского—Гаусса. Согласно теореме Остроградского—Гаусса (26,8′), записанной в абсолютной электростатической системе единиц, поток диэлектрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность всегда равен полному телесному углу 4π, умноженному на алгебраическую сумму зарядов, заключенных внутри этой поверхности. Если считать, что поверхностная плотность линий диэлектрического смещения (линий силового электрического поля) равна модулю вектора диэлектрического смещения, то теорема Остроградского — Гаусса (26,8) определяет общее число линий поля, связанных с суммарным зарядом. Из выражения (26,7) при этом следует, что

$$D_n = \frac{dN}{dS} = 4\pi \frac{dq}{dS} = 4\pi\sigma, \qquad (26,9)$$

---

* Если в законе Кулона вместо ε писать $4\pi\varepsilon$, то все формулы, содержащие ε и, значит, D, будут видоизменены (так называемая рационализованная система записи). Например, формула (26,8) примет вид $N = q$. Уравнения, не содержащие ε, D или μ, H (магнитное поле), останутся без изменений. Рационализованная запись формул электромагнитного поля широко применяется в электротехнике.

где σ — эквивалентная поверхностная плотность электростатических зарядов.

Проводники содержат свободные заряды (электроны) в количестве, превышающем число атомов. Участвуя в беспорядочном движении, эти свободные заряды создают свои микрополя, замыкающиеся внутри проводника на ионах решетки, так что макроскопически проводник оказывается электрически нейтральным. В результате контактного взаимодействия с внешней средой проводник лишается части свободных электронов или приобретает их в избытке. При этом электростатическое равновесие внутри проводника нарушается, и поверхностный слой проводника обнаруживает свойства электростатически заряженного тела. Таким образом, электростатическое макрополе внутри проводника отсутствует из-за перераспределения в нем свободных зарядов. Чтобы микроскопическое значение напряженности электростатического поля внутри проводника было равно нулю, необходимо определенное распределение поверхностной плотности электрических зарядов.

В случае сферической поверхности заряженного проводника электростатическое равновесие достигается при постоянной поверхностной плотности зарядов, равной

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi r^2}; \qquad (26,10)$$

где q — общее количество электростатического электричества, r — радиус сферической поверхности. Изменение конфигурации сферической поверхности связано с местным изменением радиуса кривизны r; после дифференцирования (26,10) имеем $\frac{d\sigma}{dr} = -\frac{q}{2\pi r^3}$ или с учетом (26,10)

$$d\sigma = -\frac{2\sigma}{r}dr. \qquad (26,10')$$

Таким образом, при возрастании кривизны на выпуклых частях поверхности проводника $\left(\frac{\Delta r}{r} < 0\right)$, для которых плотность поверхностных зарядов возрастает и, следовательно, увеличивается напряженность поля [см. (26,9)], или градиент потенциала поля вблизи поверхности [см. (26,5)].

Так как потенциал определяется работой, совершаемой против сил поля, и напряженность электростатического поля внутри заряженного проводника всегда равна нулю, то поверхность любого проводника в электростатическом поле является поверхностью равного потенциала, или эквипотенциальной поверхностью.

При установлении значения потенциала в какой-либо точке поля необходимо выбрать его нулевой уровень. В качестве абсолютного нуля потенциала естественно принять потенциал на беско-

нечно большом удалении от заряда, поле которого рассматривается. Это означает, что потенциальная энергия отталкивания будет всегда положительной, а притяжения — отрицательной (рис. 26-3).

Потенциал в поле точечного заряда q на расстоянии r при таком способе отсчета будет равен

$$\varphi = -\int_{\infty}^{r} E dr = -q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{\varepsilon r^2} = \frac{q}{\varepsilon r}, \qquad (26,11)$$

т. е. φ определяется не только зарядом, но и средой, в которой расположен заряд. Измеряется всегда разность потенциалов. Для удобства за условный нулевой уровень потенциала часто принимают потенциал Земли.

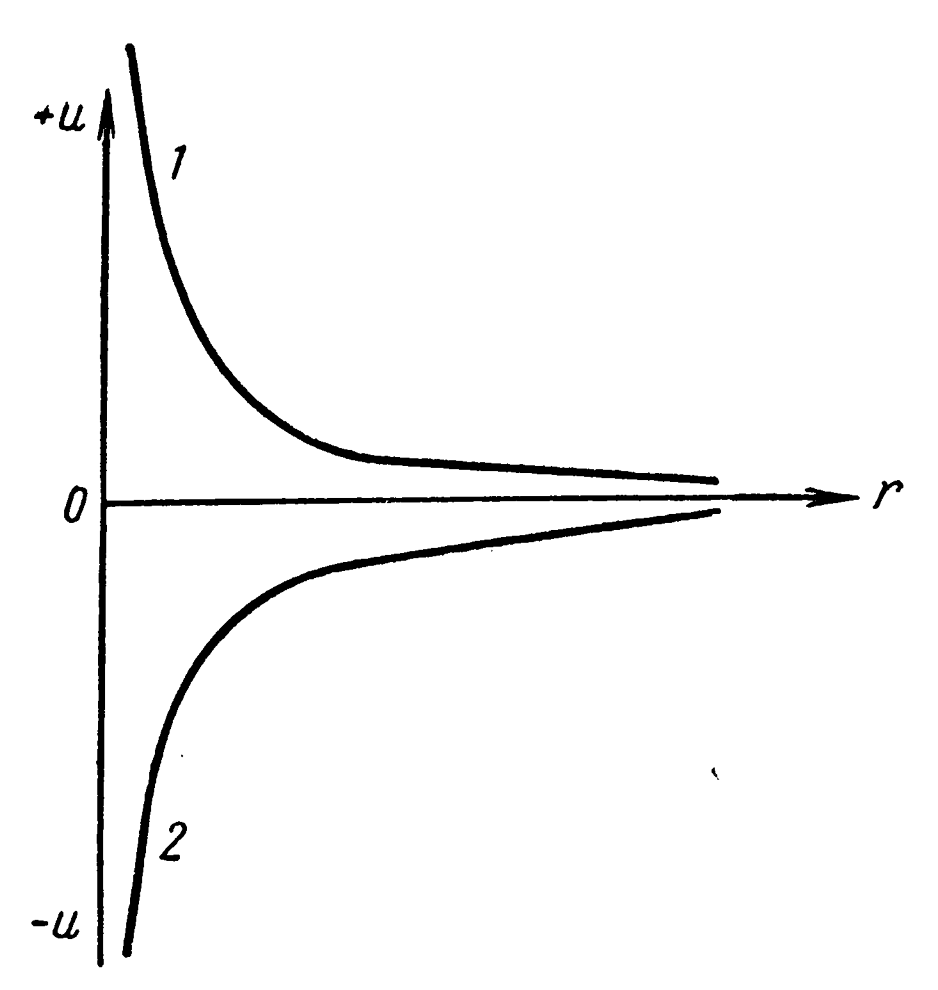


Рис. 26-3. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия зарядов от расстояния ($U = 0$ при $r = \infty$):

1 — отталкивание одноименных зарядов; 2 — притяжение разноименных зарядов

Так как вдоль эквипотенциальных поверхностей тангенциальная составляющая напряженности поля равна нулю, то линии диэлектрического смещения, а в изотропной среде и силовые линии поля, ортогональны по отношению к этим поверхностям. Потенциальное электрическое поле, согласно выражению (26,11), характеризуется тем, что криволинейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру (циркуляция вектора напряженности поля) всегда должен быть равен нулю, поскольку для избранной среды потенциал в данной точке поля зависит только от величины заряда и расстояния от заряда, т. е.

$$\oint_l E_t dl = \oint_l E \cos\alpha \, dl = 0. \qquad (26,12)$$

Среди различных совокупностей зарядов важную роль играет электрический диполь, т. е. два равных по величине и противоположных по знаку заряда, находящихся на расстоянии, малом по сравнению с рассматриваемым расстоянием до центра диполя (поляризованные молекулы, группы молекул).

Напряженность поля такой совокупности определяется векторным сложением напряженности полей каждого из зарядов, составляющих диполь (рис. 26-4). Для точки A, расположенной на

расстоянии $R \gg a$ по перпендикуляру к оси диполя, имеем

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{q}{\varepsilon\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{R^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{qa}{\varepsilon\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \approx \frac{qa}{\varepsilon R^3} \\ \text{и} \qquad & \\ \varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (26,13)$$

В общем случае в направлении под углом $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ к оси диполя эти выражения при $R \gg a$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{qa}{\varepsilon R^3}(2\cos\theta + \sin\theta) \\ \text{и} \qquad & \\ \varphi &= \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{qa}{\varepsilon R^2}\cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (26,14)$$

поскольку $r_1 \cdot r_2 \approx R^2$ и $r_2 - r_1 \approx a\cos\theta$.

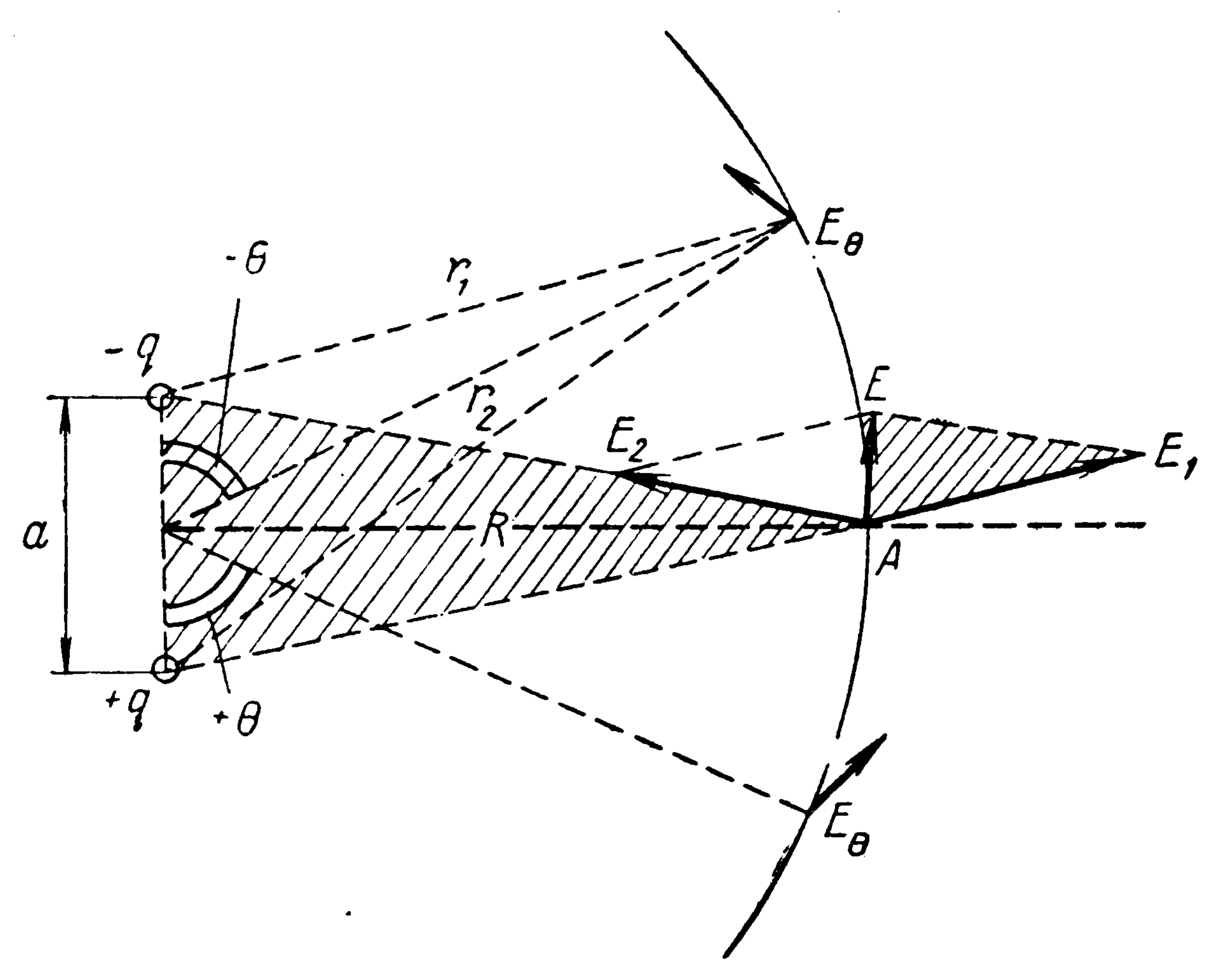


Рис. 26-4. Электрическое поле двухполюсника (диполя)

Процесс электризации вещества заключается в частичном разделении положительных и отрицательных зарядов, имеющихся в одинаковом количестве во всяком электрически нейтральном макротеле. Такое разделение происходит путем непосредственного механического воздействия на тело, например, при трении друг о друга двух разных веществ, или при раздроблении тел, или при давлении на кристаллы (трибоэлектрический и пьезоэлектрический эффекты).

Электростатические генераторы в виде ленточных машин трения, заряжающие шары (генератор Ван-де-Граафа), или машин, работающих на принципе трения в сжатом газе (фреон CCl_2F_2), позволяют достигать разности потенциалов до 10 *Мв*, аэрозольные генераторы — до нескольких мегавольт. Пьезоэлектрический эффект в кристаллах кварца, сегнетовой соли или титана бария (рис. 26-5) используется в многочисленных механочувствительных датчиках. Заряд Q_x, возникающий на плоскости, нормальной к электрической оси кристалла, равен при продольном пьезоэлектрическом эффекте

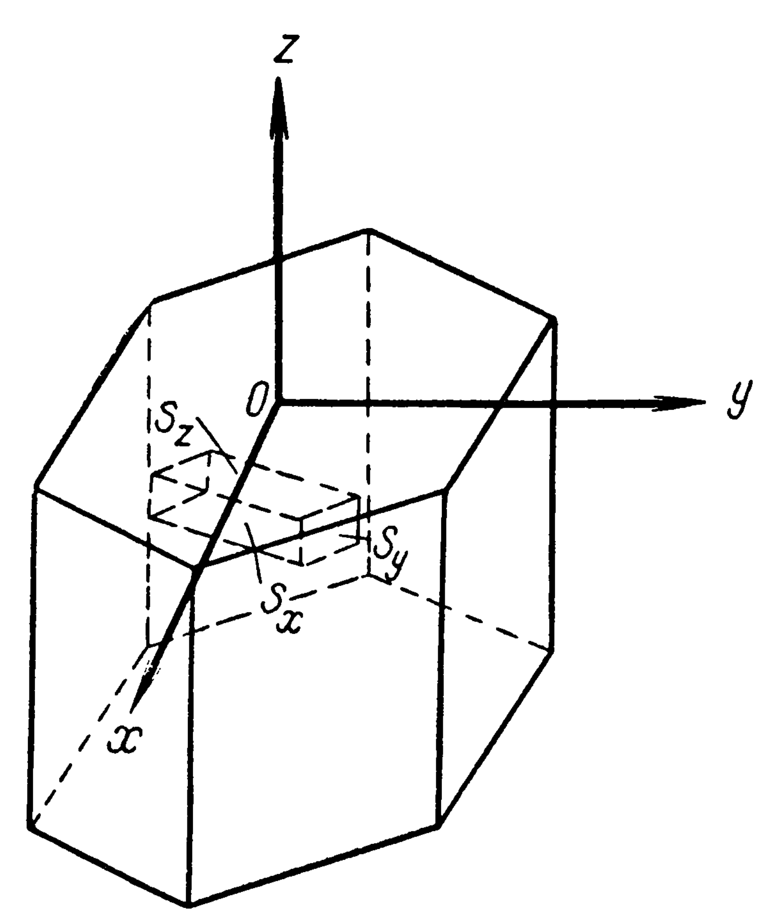


Рис. 26-5. Расположение осей в кристалле пьезокварца:

Oz — оптическая ось; *Oy* — нейтральная ось; *Ox* — электрическая ось; S_x, S_y, S_z — площади граней кварцевой пластины.

$$Q_x = bF_x, \qquad (26,15)$$

при поперечном

$$Q_x = -b\frac{S_x}{S_y}\cdot F_y, \qquad (26,15')$$

где F_x — усилие вдоль электрической оси x, F_y — усилие вдоль нейтральной оси y кристалла, b — пьезоэлектрический модуль используемого кристалла. Для кварца $b = 2{,}1\cdot 10^{-4}\,\frac{к}{кГ} = 2{,}14\cdot 10^{-5}\,\frac{к}{н}$.

Лекция 27

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАРЯДОВ

Электростатические заряды на практике оказываются распределенными на поверхностях различных проводников (линейные, плоскостные заряды) или в некотором объеме пространства (пространственные заряды).

Линейный заряд практически представляется длинной равномерно заряженной проволокой радиусом $r \ll L$. Поверхность с зарядом обратного знака, связанным с зарядом проволоки, в этом случае предполагается как цилиндрическая поверхность радиуса $R = \infty$. Используя теорему Остроградского — Гаусса и обозначая через τ линейную плотность зарядов проволоки, при $\varepsilon_c = 1$ для вакуума получаем (рис. 27-1, *а*)

$$N = \oint_S D\cdot dS_n = D_rS_r = D_r\cdot 2\pi r\cdot L = 4\pi\tau L, \qquad (27,1)$$

откуда

$$D_r = \varepsilon_c E_r = \frac{2\tau}{r}. \qquad (27,2)$$

Проводя такие же рассуждения для плоскостного заряда (рис. 27-1,*б*) с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{dq}{dS} = \mathrm{const}$, имеем

$$N = \oint\limits_S D \cdot dS_n = D_r \cdot 2S = 4\pi q, \tag{27,3}$$

откуда

$$D = \varepsilon_c E = 2\pi\sigma. \tag{27,4}$$

Таким образом, поле плоскостного заряда, не ограниченного краевыми эффектами, есть поле однородное, в котором напряжен-

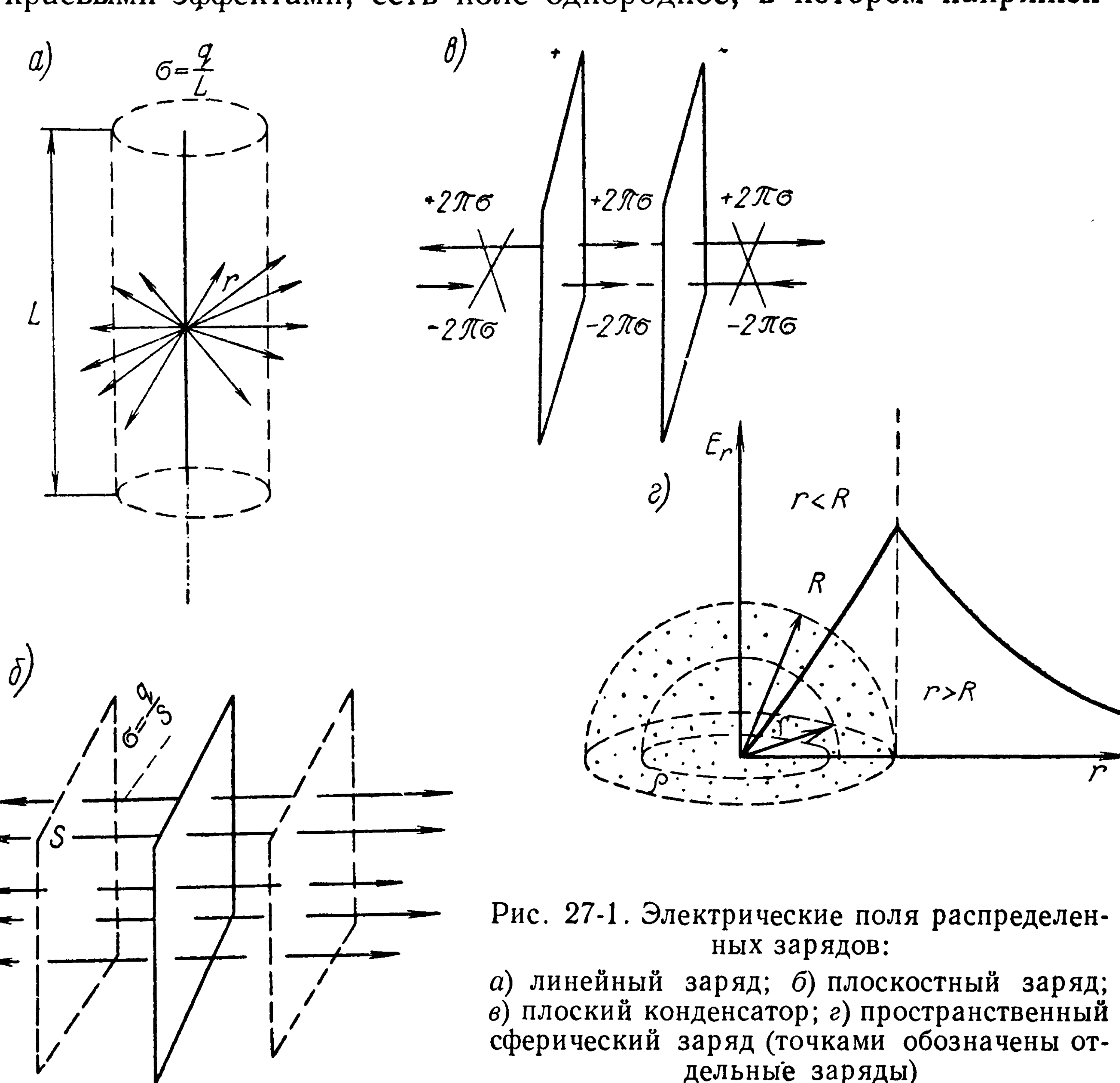


Рис. 27-1. Электрические поля распределенных зарядов:

а) линейный заряд; *б*) плоскостный заряд; *в*) плоский конденсатор; *г*) пространственный сферический заряд (точками обозначены отдельные заряды)

ность не зависит от расстояния до заряда. Если рассмотреть плоскостный диполь (плоский конденсатор, рис. 27-1, *в*), то, пренебрегая краевыми эффектами, при наложении полей плоскостных зарядов получаем нулевую напряженность во всем пространстве, за исключением объема между пластинами, где

$$D = \varepsilon_c E = 4\pi\sigma. \tag{27,4'}$$

В случае сферического (радиуса R) пространственного заряда с объемной плотностью ρ (рис. 27-1, *г*), согласно теореме Остроградского — Гаусса, для всей области $r \leqslant R$ имеем

$$N_r = 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{и} \quad S_r = 4\pi r^2,$$

так что

$$D_{r\leqslant R} = \varepsilon_c E_{r\leqslant R} = \frac{N_r}{S_r} = \frac{4}{3}\pi\rho r. \qquad (27,5)$$

Таким образом, в сфере пространственного заряда диэлектрическое смещение и напряженность поля растут по мере удаления от центра и достигают наибольшего значения на границе пространственного заряда (см. рис. 27-1, *г*). Очевидно, в отдалении от центра пространственного заряда, т. е. при $r \gg R$, объемный заряд будет представлять собой точечный заряд $q = \frac{4}{3}\pi R^2\rho$, и, следовательно, диэлектрическое смещение будет убывать с расстоянием по закону $\sim r^{-2}$.

Для пространственных зарядов справедливы дифференциальные уравнения электростатического поля — уравнения в частных производных Пуассона и Лапласа.

Выбирая прямоугольную систему координат и используя теорему Остроградского — Гаусса (26,8) для точки (x, y, z) пространственного заряда переменной плотности ρ_x, можем записать

$$\partial D_x = 4\pi\rho_x \cdot \partial x = \varepsilon_c \cdot \partial E_x \qquad (27,6)$$

и аналогичные выражения для двух других осей. Складывая их, получаем

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \nabla D = 4\pi(\rho_x + \rho_y + \rho_z) = 4\pi\rho. \qquad (27,7)$$

Так как, согласно формуле (26,4), $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, то

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z} = -4\pi\frac{\rho}{\varepsilon_c}, \qquad (27,8)$$

что составляет уравнение Пуассона для области пространственных зарядов. Для той части поля, в которой $\rho = 0$, это уравнение переходит в условие $\nabla^2\varphi = 0$, т. е. в уравнение Лапласа.

В общем случае в пространстве могут оказаться не только объемные распределенные заряды, но и отдельные сосредоточенные заряды Q_i или заряженные проводники (τ, σ, ρ). Общее решение уравнений Пуассона и Лапласа относительно величины потенциала φ имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon_c}\left\{\sum_1^z \frac{Q_i}{r_i} + \int\limits_V \rho\frac{dV}{r} + \int\limits_S \frac{\sigma\,dS}{r} + \int\limits_l \frac{\tau\,dl}{r}\right\}. \qquad (27,9)$$

Однако во многих случаях электрическое поле оказывается сосредоточенным в пространстве между проводниками (плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы).

Заряд Q, сосредоточенный на каждой из двух обкладок конденсатора, и разность потенциалов U между ними находятся в прямой пропорциональности, вытекающей из теоремы Остроградского—Гаусса и понятия о разности потенциалов, т. е.

$$Q = CU. \tag{27,10}$$

Коэффициент пропорциональности C называют электроемкостью рассматриваемой системы проводников, или просто емкостью конденсатора. Например, для плоского конденсатора с толщиной диэлектрического слоя a имеем

$$N = DS = \varepsilon_c \frac{U}{a} S = 4\pi Q,$$

откуда по (27,10)

$$C = \frac{\varepsilon_c S}{4\pi a}. \tag{27,11}$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 27-2, *а*) очевидно, что

$$U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n,$$
$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n,$$

и, значит,

$$C = \sum_1^n C_i. \tag{27,12}$$

При таком соединении всегда $C > C_{i\,макс}$.

Рис. 27-2. Параллельное (*а*) и последовательное (*б*) соединения конденсаторов

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 27-2, *б*)

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n, \quad \text{но} \quad N_1 = N_2 = \ldots = N_n = N,$$

и, значит, $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n$, т. е.

$$\frac{1}{C} = \sum_1^n \frac{1}{C_i}. \tag{27,13}$$

В этом случае всегда $C < C_{i\,мин}$.

Пользуясь последним выражением, можно определить емкости систем с неодинаковыми поверхностными плотностями связанных зарядов. В частности, для цилиндрического конденсатора (к этому виду приводятся многие системы изолированных проводников, например, подземные кабели, радиотехнические конденсаторы, проходные изоляторы, провода линий передач над землей, высоковольтные конденсаторы в рентгеновских установках и на электрических станциях), если применить к цилиндрическому слою изоля-

тора между двумя цилиндрическими эквипотенциальными поверхностями радиусов x и $x + \Delta x$ формулу плоского конденсатора, получим

$$C_x = \frac{\varepsilon_c 2\pi x \cdot L}{4\pi \cdot \Delta x} = \frac{\varepsilon_c L \cdot x}{2 \cdot \Delta x}.$$

Так как выделенные слои в изоляторе конденсатора (рис. 27-3) оказываются соединенными последовательно, то, согласно (27,13),

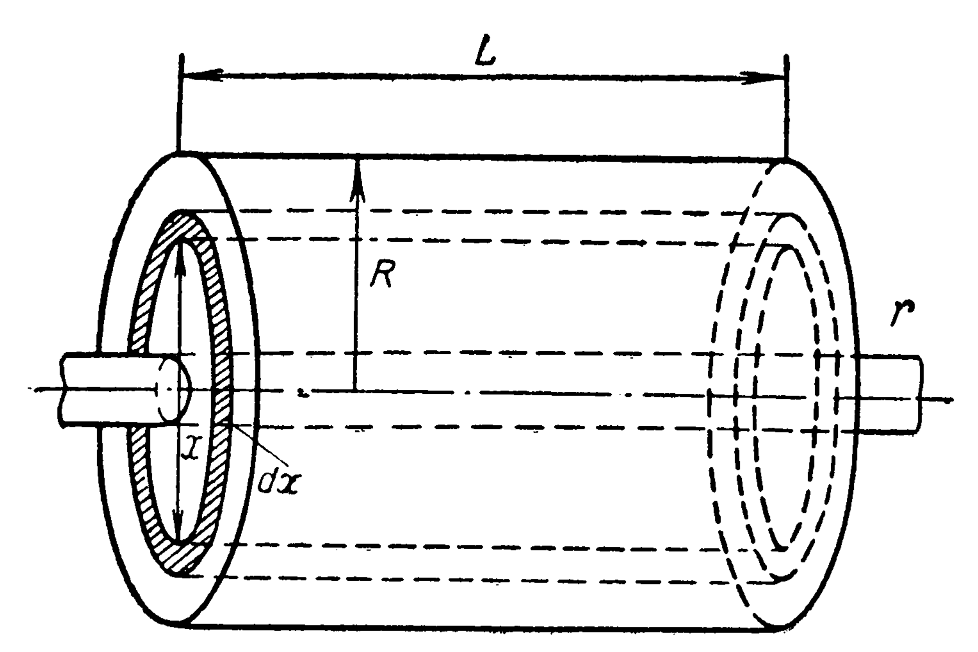


Рис. 27-3. Цилиндрический конденсатор (r — радиус внутренней обкладки, R — радиус внешней обкладки)

$$d\left(\frac{1}{C_x}\right) = \frac{2}{\varepsilon_c L} \cdot \frac{dx}{x},$$

или после интегрирования

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{\varepsilon_c L} \int_r^R \frac{dx}{x} = \frac{2 \ln \frac{R}{r}}{\varepsilon_c L}, \text{ т. е.}$$

$$C = \frac{\varepsilon_c L}{2 \ln \frac{R}{r}}. \quad (27,14)$$

Какую бы форму и конфигурацию ни имел конденсатор в электрическом поле, между его обкладками заключена энергия, равная работе, произведенной при разделении зарядов, сосредоточенных на обкладках. Так как

$$dA = Q \cdot dU = dW, \quad (27,15)$$

то, согласно выражению (27,10), $dW = CUdU$, или после интегрирования в пределах от $U = 0$ до $U = U_0$ получим

$$W_э = \frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (27,16)$$

Этот результат применим для любого конденсатора известной емкости. Используя уравнение (27,11) и учитывая, что $\left|\frac{dU}{dl}\right| = \left|\frac{U}{a}\right| = |E|$, для объемной плотности энергии электрического поля, или дозы электрической энергии в диэлектрике, имеем

$$\omega_э = \frac{W_э}{V} = \frac{\varepsilon_c}{8\pi} E^2 = \frac{DE}{8\pi}. \quad (27,17)$$

Соотношения (27,16) позволяют получить значение элементарного электрического заряда — электрона, выраженное через его массу покоя. Приняв для этого природного образования сферическую форму, т. е. полагая, что в вакууме $C = r$ и что энергия по-

коя электрона — это энергия электрического поля заряженной сферы, имеем

$$W_э = m_0c^2 = \frac{e^2}{2r_э},$$

откуда

$$r_э = \frac{e^2}{2m_0c^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ см. \qquad (27{,}18)$$

Взаимодействие разноименных зарядов, сосредоточенных на обкладках конденсатора, проявляется в их механическом притяжении. Силу электромагнитного происхождения, вызывающую механические перемещения тел, называют пондеромоторной. В случае притяжения обкладок плоского конденсатора, согласно (27,16), эта сила будет равна

$$F = \frac{W_c}{a} = \frac{\varepsilon_c S U^2}{8\pi a^2}, \qquad (27{,}19)$$

т. е. она пропорциональна квадрату разности потенциалов и, следовательно, не зависит от знака этой разности. Электростатические киловольтметры используются на переменном напряжении в том случае, когда инерция механической системы такого прибора допускает ее перемещение при частоте перемен измеряемого напряжения.

Постоянное по направлению электрическое поле, создаваемое между электродами, по мере их сближения или при повышении разности потенциалов может привести к отрыву электронов с катода (автоэмиссия).

Для преодоления сил, удерживающих электрон в металле, необходимо, чтобы электрическое поле у поверхности катода имело очень большую напряженность порядка $E = 10^6$ *в/см* $= 10^8$ *в/м*.

Лекция 28

ВЕЩЕСТВО В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Реакцией вещества на внесение его в электрическое поле является поляризация, возникающая в нем (рис. 28-1). Перераспределение зарядов вызывает изменение напряженности поля вне и внутри внесенного диэлектрика. Если в отсутствие вещества диэлектрика напряженность электрического поля была E, то вследствие поляризации вещества диэлектрика электрическое поле до и после внесения диэлектрика усилится за счет поляризационных поверхностных зарядов; напряженность этого поля

$$E_0 = D = E\varepsilon_c = E + 4\pi\sigma_n = E + 4\pi P = E + 4\pi n\alpha E. \qquad (28{,}1)$$

Здесь σ_n — поверхностная плотность поляризационных зарядов, численно равная значению вектора поляризации $\vec{P}$ единицы объема вещества ($\sigma_n = P$), т. е. произведению концентрации диполей $n\,[см^{-3}]$,

возникших в единице объема вещества, на электрический момент каждого из них αE (здесь α [$см^3$] — поляризуемость атома).

Таким образом, диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon_с = \frac{D}{E} = 1 + 4\pi\frac{P}{E} = 1 + 4\pi n\alpha = 1 + 4\pi\varkappa, \qquad (28,2)$$

где $\varkappa = n\alpha$ — диэлектрическая восприимчивость вещества, зависящая от его плотности n и поляризуемости α, которая имеет различную природу.

Электронная часть поляризуемости $\alpha_э$ возникает в результате деформации электронной оболочки атомов в любом веществе; она пропорциональна плотности среды и не зависит от ее температуры, как и от частоты изменений электрического поля. Значение электронной поляризуемости $\alpha_э$ находят поэтому из оптических измерений ($\alpha_э = 10^{-24}$ $см^3$).

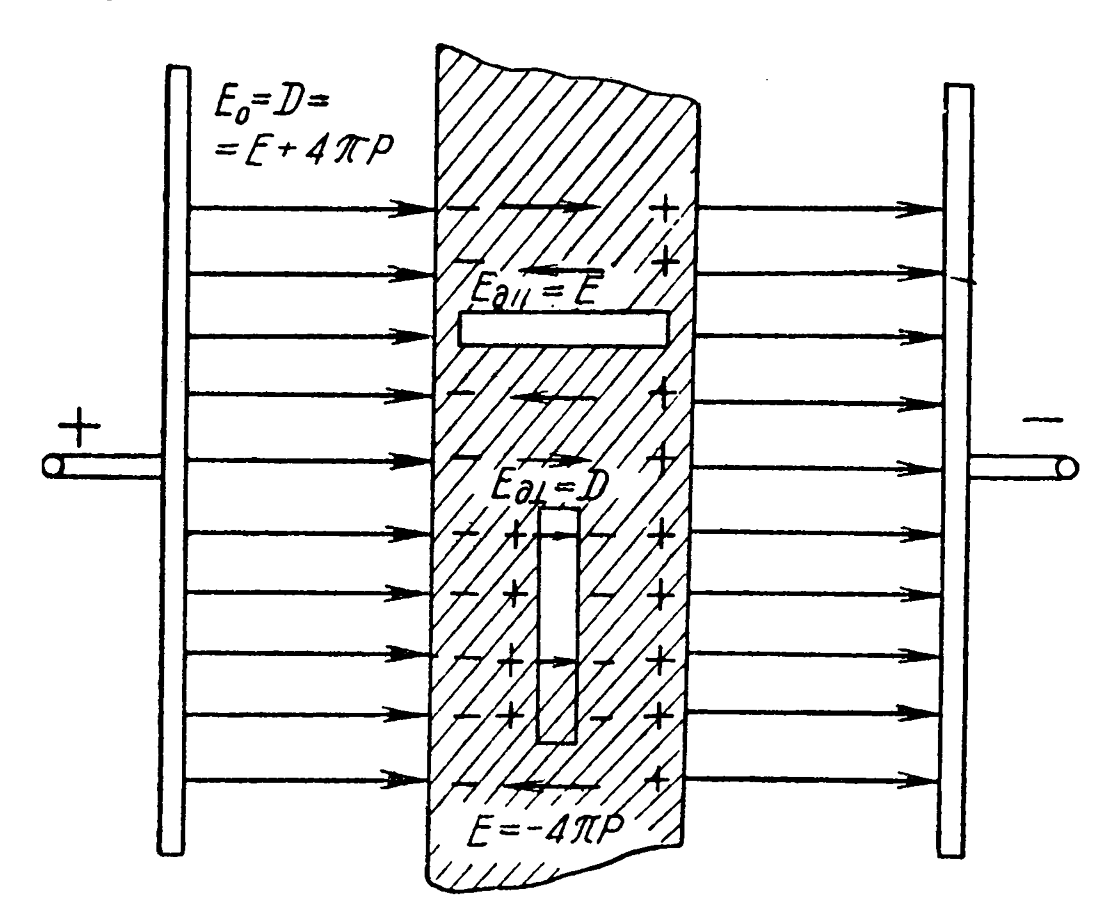


Рис. 28-1. Поляризация диэлектрика, внесенного в постоянное электрическое поле

Ионная часть поляризуемости $\alpha_и$ связана со смещением ионов в веществах с гетерополярными молекулами и зависит от частоты изменений поля. Так, например, диэлектрическая проницаемость кристалла NaCl при высоких (оптических) частотах изменения поля составляет $\varepsilon' = 2{,}25$, а в постоянном поле $\varepsilon = 5{,}65$. Разница $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon' = 3{,}40$ возникает благодаря влиянию ионной поляризуемости, возникающей при измерениях в постоянном поле.

Дипольная часть поляризуемости (ориентационная) $\alpha_д$ характерна для веществ с дипольными молекулами; она заключается в ориентации молекулярных диполей вдоль линий электрического поля. Этот вид поляризуемости, очевидно, зависит от температуры вещества T и частоты ν изменений поля. Например, для воды по оптическим измерениям $\varepsilon' = 2{,}5$, в то время как измерения в электрическом постоянном поле приводят к значению $\varepsilon = 81$ за счет дипольной ориентации молекул.

При наличии в диэлектрике областей самопроизвольной взаимной ориентации дипольных молекул (домен) под действием внешнего поля возникает спонтанная часть поляризуемости вещества $\alpha_с$. Внешнее поле увеличивает частичную ориентированность дипольных молекул в доменах, объем домен и их направленность, так что

диэлектрическая проницаемость таких веществ (сегнетоэлектриков), помимо указанных ранее факторов, зависит еще от напряженности внешнего поля E. Примерами сегнетоэлектриков могут служить кристаллы сегнетовой соли — двойной натрокалиевой соли виннокаменной кислоты $NaK(C_4H_4O_6) \cdot 4H_2O$ в области температур $255° \div 295°$ К и кристаллы титаната бария $BaTiO_3$ при температуре $T < 390°$ К.

В общем случае при наличии всех видов поляризуемости

$$\alpha = \alpha_э + \alpha_и + \alpha_д + \alpha_с = \alpha_{пол} + \alpha_{ориент} \tag{28,3}$$

и

$$\varepsilon_с = f(\rho,\ \nu,\ T \text{ и } E).$$

Напряженность макроскопического поля в диэлектрике $E_д$ складывается (см. рис. 28-1) из следующих составляющих:

$E_0 = E + 4\pi P$ — напряженности поля в вакууме до и после внесения диэлектрика

$E_1 = -4\pi P$ — напряженности деполяризующего поля поляризационных зарядов,

$E_2 = \frac{4}{3} n\alpha' E_д$ — напряженности поля молекулярных диполей (по Лорентцу), где $\alpha' = \alpha_э + \alpha_и$,

E_3 — напряженности поля спонтанных доменов (сегнетоэлектрики).

Таким образом,

$$\vec{E}_д = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3, \tag{28,4}$$

причем

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \vec{E}.$$

При отсутствии дипольных молекул и доменов напряженность поля для продольной «пещерки» (см. рис. 28-1), мысленно выделенной внутри диэлектрика, составит

$$E_{д\parallel} = E_0 - 4\pi P = E,$$

а для поперечной

$$E_{д\perp} = D = \varepsilon_с E.$$

Учитывая только вынужденные поляризацию и ориентацию молекул, можно рассмотреть связь между диэлектрической проницаемостью вещества и его молекулярными параметрами.

Для газов и жидкостей с гомополярными молекулами $E_2 = E_3 = 0$ и $\alpha_д = \alpha_с = 0$, так что $\varepsilon_с = \frac{D}{E} = 1 + 4\pi n\alpha_э$, или по формуле (28,2)

$$\frac{\varepsilon_с - 1}{4\pi} = \frac{P_э}{E} = n\alpha_э. \tag{28,5}$$

Для гетерополярных молекул вещества $E_2 \neq 0$, поэтому необходимо учитывать влияние полей самих молекул вещества. Полагая $\alpha' = \alpha_э + \alpha_и$, имеем $E_д = E + \frac{4}{3}\pi n\alpha' E_д$, или

$$E = E_д\left(1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha'\right). \tag{28,6}$$

В таком случае

$$\frac{\varepsilon_c - 1}{4\pi} = \frac{P_д}{E} = \frac{n\alpha'}{1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha'}, \tag{28,7}$$

или

$$\varepsilon_c + 2 = \frac{3}{1 - \frac{4}{3}\pi n\alpha'},$$

откуда вытекает формула Клаузиуса — Мосотти для поляризуемости жидких диэлектриков в виде

$$\frac{\varepsilon_c - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi n\alpha'. \tag{28,8}$$

После умножения на грамм-молекулярный объем $\frac{\mu}{\rho}$ она принимает вид

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\varepsilon_c - 1}{\varepsilon_c + 2} = \frac{4}{3}\pi N_0\alpha' = \Pi. \tag{28,8'}$$

Если ионная поляризуемость $\alpha_и \ll \alpha_э$, то при радиусе сферического атома, равного a, имеем $\alpha' \approx \alpha_э = a^3$ и, следовательно, $\frac{4}{3}\pi\alpha'$ составляет объем атома. Таким образом, молярная поляризуемость π представляет собой собственный объем атомов одного грамм-атома вещества. Дебаем была введена поправка, учитывающая ориентацию дипольных молекул с моментом P_m и равная

$$\alpha = \alpha' + \alpha_0 = \alpha' + \frac{P_m^2}{3kT}, \tag{28,9}$$

где $3kT = 6\left(\frac{kT}{2}\right)$ — энергия, приходящаяся по классической теории теплоемкости на все шесть степеней свободы колебательного движения дипольной молекулы. С дополнением Дебая выражение для молярной поляризуемости принимает вид

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\varepsilon_c - 1}{\varepsilon_c + 2} = \frac{4}{3}\pi N_0\left(\alpha' + \frac{P_m^2}{3kT}\right) = \varphi(T). \tag{28,10}$$

Зависимость поляризуемости, а значит, и диэлектрической проницаемости от частоты изменений поля связано с явлением резонанса. С возрастанием частоты поляризуемость α и, следовательно, ε_c убывают (при $\alpha \to 0$ $\varepsilon_c \to 1$), претерпевая при этом селективные максимумы (рис. 28-2).

На оптических частотах изменения поля справедливо уравнение Максвелла, по которому

$$\varepsilon_\nu = n_\nu^2,$$

где ε_ν и n_ν — соответственно диэлектрическая проницаемость и показатель преломления вещества при частоте изменений поля ν. Формула Клаузиуса — Мосотти переходит при этом в формулу Лоренц-Лорентца

$$\frac{n_\nu^2 - 1}{n_\nu^2 + 2} = \frac{4}{3}\pi n \alpha_э. \qquad (28,11)$$

Релаксация, или постепенное ослабление состояния ориентационной поляризации вещества, связана с преобразованием энергии электрического поля в форму беспорядочного движения молекул. Для ее учета в формулу вводится комплексная поляризуемость

$$\alpha_к = \alpha_0 \frac{1}{1 + j\omega\tau}. \qquad (28,12)$$

Здесь τ — время релаксации, или время, в течение которого поляризованность диэлектрика после снятия внешнего поля уменьшается в e раз, ω — циклическая частота изменений поля, $j = \sqrt{-1}$.

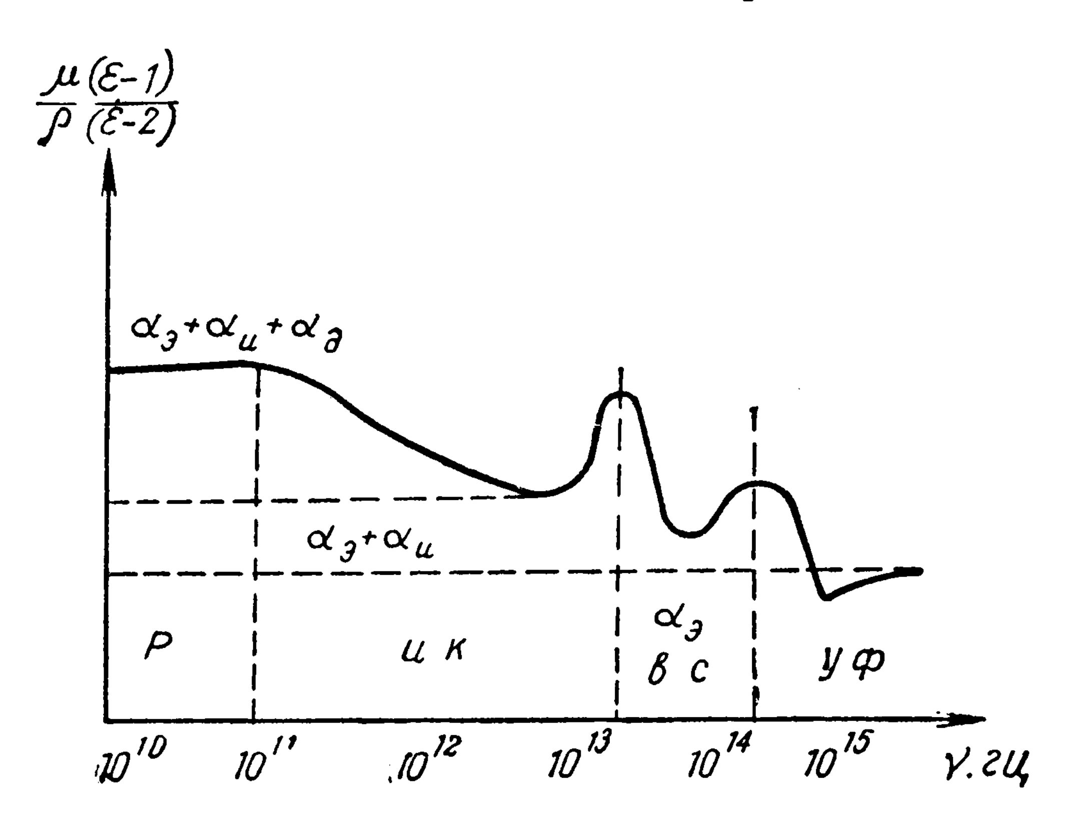


Рис. 28-2. Зависимость молярной поляризуемости от частоты изменений электрического поля:

р — область радиочастот, *ик* — область частот инфракрасного излучения; *вс* — видимого света; *уф* — ультрафиолетового излучения

Время релаксации τ пропорционально кинематической вязкости η вещества диэлектрика и обратно пропорционально его температуре $\left(\tau = \frac{\eta}{2kT}\right)$. Комплексная диэлектрическая проницаемость, при записи в которой учитываются не только восстанавливаемые процессы в диэлектрике, но и преобразования в нем энергии электрического поля, представится в виде

$$\varepsilon_c = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2 = 1 + \frac{4\pi n \alpha_д}{1 + j\omega\tau} = 1 + \frac{4\pi n \alpha_д}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{4\pi n \alpha_д \omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}. \qquad (28,13)$$

Вещественная часть комплексной диэлектрической проницаемости зависит от поляризации, проистекающей вследствие ориентации дипольных молекул, а мнимая часть — от преобразования (утечки) энергии поля по той же причине. Спонтанная поляризация сегнетоэлектриков сохраняется и после того, как устранено внешнее элек-

трическое поле. Тела, длительно сохраняющие поляризацию и сами создающие электрическое поле, называют электретами. Величина вектора самопроизвольной поляризации для сегнетовой соли достигает значений $P_с = 800$ а. э. е., а диэлектрическая проницаемость — значений $\varepsilon_с = 10^4$ а. э. е. Однако такая большая диэлектрическая проницаемость и аномальная температурная зависимость имеются только в направлении одной (сегнетоэлектрической) оси $\varepsilon_а$ (рис. 28-3).

Если не происходит фазовых превращений, то диэлектрическая восприимчивость $\varkappa$ твердых тел с повышением температуры моно-

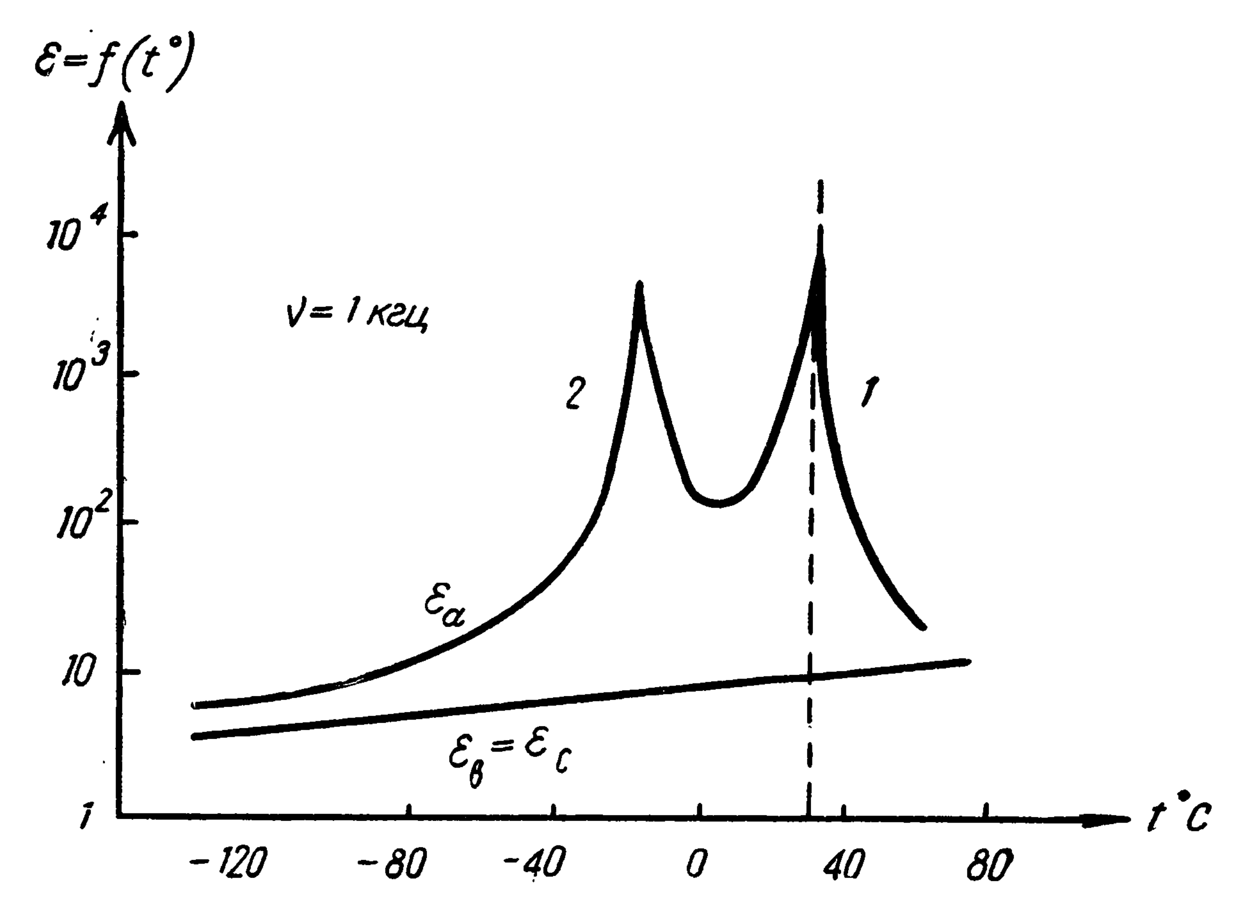


Рис. 28-3. Зависимость диэлектрической проницаемости $\varepsilon_с$ сегнетовой соли от температуры ($\varepsilon_в = \varepsilon_с$ — значения проницаемости, вычисленные по двум другим осям):

1 — область закона Кюри — Вейсса; *2* — область спонтанной поляризации

тонно убывает. В отличие от этого диэлектрическая восприимчивость у сегнетоэлектриков в неполяризованной фазе их состояния с понижением температуры возрастает, достигая резко выраженного максимума при температуре точки Кюри, а затем происходит рост спонтанной поляризации, и $\varkappa$ монотонно убывает.

В неполяризованной фазе зависимость низкочастотной диэлектрической восприимчивости $\varkappa$ в направлении сегнетоэлектрической оси от температуры можно аппроксимировать так называемым законом Кюри — Вейсса:

$$\varkappa \approx \frac{C}{T - T_0},$$

где C — сегнетоэлектрическая постоянная Кюри, равная примерно 100° К для сегнетоэлектриков, содержащих короткие водородные связи, и $10^{4\circ}$ К для прочих типов.

Температура Кюри (T_C), при которой низкотемпературное поляризованное состояние изменяется на высокотемпературное неполяризованное, близка к истинной температуре такого перехода.

Зависимости диэлектрической проницаемости сегнетовой соли от напряженности поля вдоль сегнетоэлектрической оси и от дав-

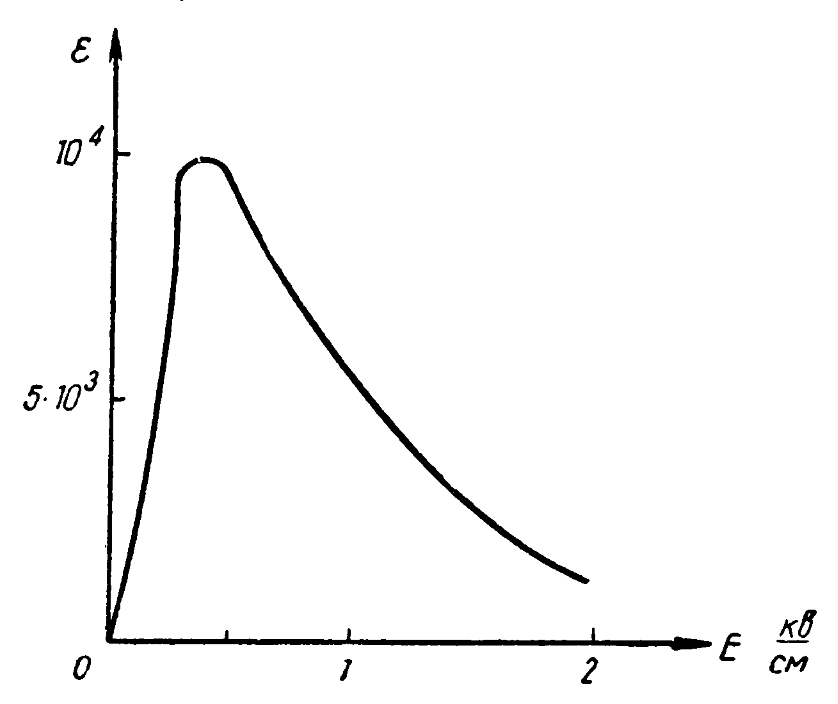


Рис. 28-4. Зависимость диэлектрической проницаемости сегнетовой соли от напряженности поля в образце толщиной 4 *мм* при $t = 20°$ С

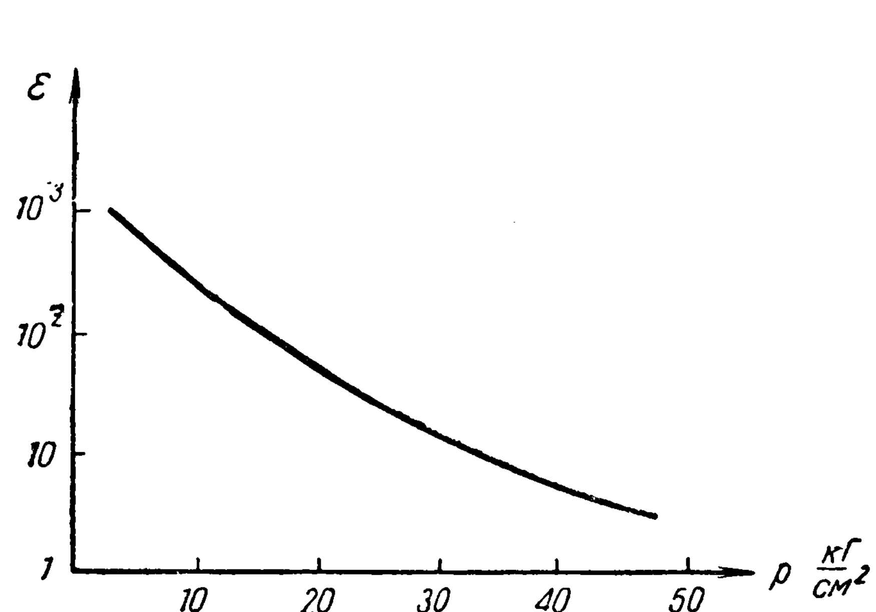


Рис. 28-5. Зависимость диэлектрической проницаемости от давления

ления на кристалл в том же направлении показаны соответственно на рис. 28-4 и рис. 28-5. Все сегнетоэлектрики, поскольку в них возможна спонтанная поляризация, являются пьезоэлектриками и пироэлектриками. Такие сегнетоэлектрики, как титанат бария,

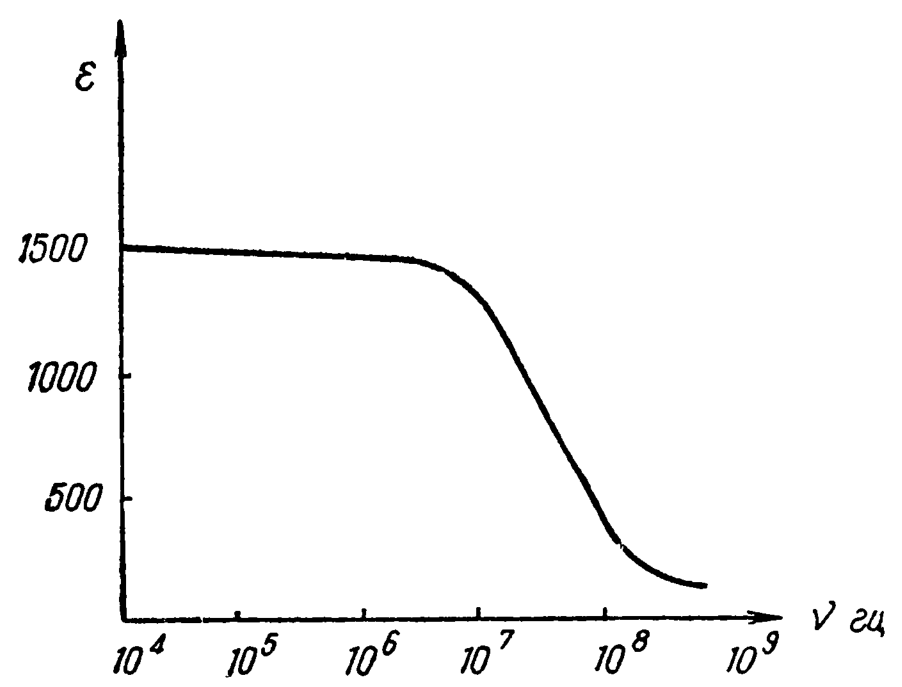


Рис. 28-6. Зависимость диэлектрической проницаемости титаната бария от частоты изменения электрического поля

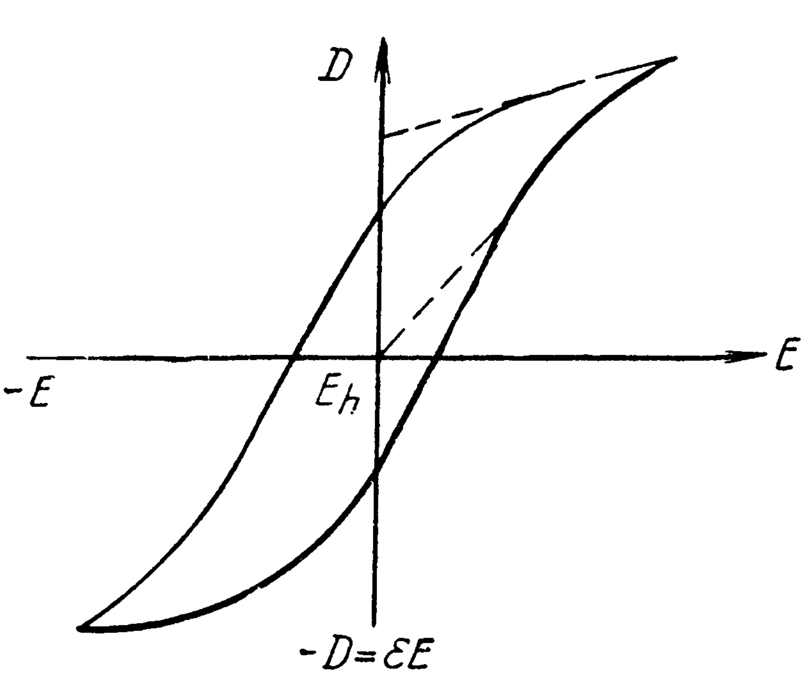


Рис. 28-7. Сегнетоэлектрическая гистерезисная петля для титаната бария ($T < T_C$).

обладают сегнетоэлектрическими свойствами по нескольким осям, что имеет существенное значение в отношении сегнетоэлектрических свойств поликристаллических образцов.

На рис. 28-6 и 28-7 представлены зависимости диэлектрической проницаемости титаната бария от частоты ν изменения внешнего

электрического поля и от напряженности поля для температуры ниже точки Кюри ($T_C = 390°$ K) (гистерезисная петля).

Сегнетоэлектрические кристаллы веществ, содержащих водородные связи, например KH_2PO_4, обладают значительным изотопическим эффектом, при котором замена H_2 на D_2 (тяжелый изотоп водорода — дейтерий) не только повышает точку Кюри со 123° до 213° K, но и увеличивает максимальную поляризацию с 10^4 а. э. е. до $2{,}7 \cdot 10^4$ а. э. е.

Наряду с сегнетоэлектриками, в которых домены, или области согласованной поляризации дипольных молекул, под действием внешнего поля создают общую поляризацию, достигающую насыщения, существуют и антисегнетоэлектрики. При наличии домен антисегнетики не создают результирующего электрического дипольного момента, но преобразуются в сегнетоэлектрики под действием сильного внешнего электрического поля.

Лекция 29

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Непрерывное направленное движение электричества называют электрическим током. Формы этого движения могут быть различны. Если среда представляет собой проводник с присущим ему большим количеством свободных электронов, так что электрический ток осуществляется направленным дрейфом этих электронов, то такое течение электричества называют током проводимости $I_п$. Ток проводимости не связан с перемещением вещества. Направление дрейфа электронов, поскольку их заряд отрицателен, противоположно направлению поля, вызывающего дрейф. Условно принято считать, что ток течет в направлении дрейфа положительных зарядов, т. е. от положительного полюса источника к отрицательному.

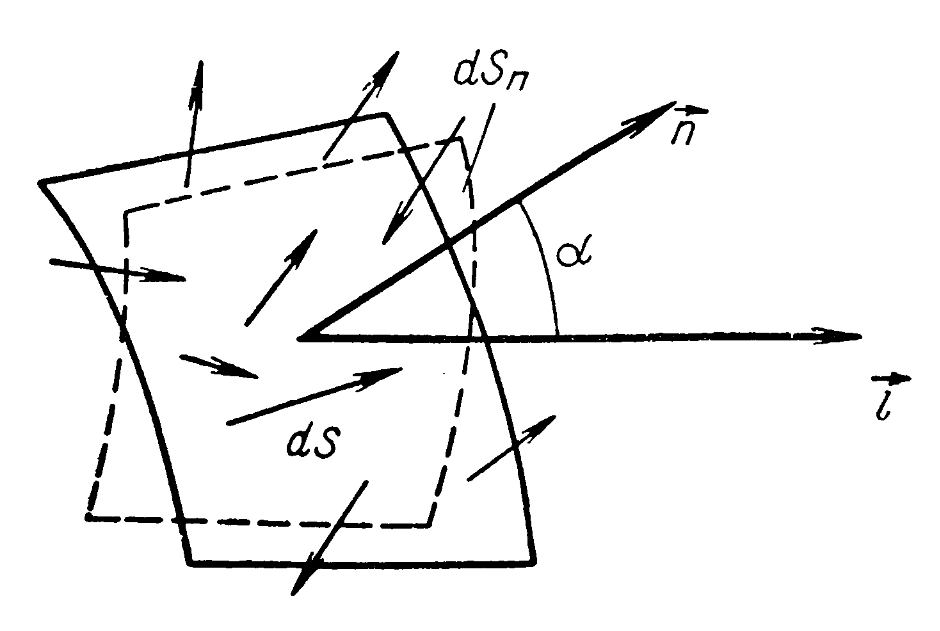


Рис. 29-1. К определению вектора плотности тока, направление которого показано стрелками

Величина тока определяется значением производной от количества протекающего электричества по времени

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ (скалярная величина).} \qquad (29{,}1)$$

Если значение тока отнести к единице площади нормального поперечного сечения потока движущихся зарядов (рис. 29-1), т. е. охарактеризовать течение электричества не только по величине,

но и по направлению, то образованная таким образом плотность электрического тока i будет векторной величиной, равной

$$\vec{i} = \frac{\vec{dI}}{d\vec{S}_n} = \frac{d^2Q}{d\vec{S}_n \cdot dt} = n \cdot e \cdot \vec{v}, \tag{29,2}$$

где n — объемная концентрация свободных электронов, $\vec{v}$ — средняя скорость их направленного перемещения.

В тех случаях, когда среда представляет собой диэлектрик, в котором имеется некоторая концентрация свободных носителей тока одного знака или обоих знаков, как, например, электронов, протонов, атомных ядер, вакансий валентности (дырок) ионов или заряженных тел, и, следовательно, в котором ток осуществляется направленным движением отдельных заряженных частиц сквозь диэлектрическую среду, этот ток называют конвекционным, или током переноса $I_к$.

Примерами конвекционных токов, связанных с переносом вещества, могут служить биполярные ионные токи в газах и в электролитах, термоэлектронные токи в вакууме и электроннодырочные токи в полупроводниках. Соотношение (29,2) при этом сохраняется, однако для ионного электрического тока оно принимает вид

$$i = i^+ + i^- = e(n^+b^+ + n^-b^-)E, \tag{29,3}$$

где n и b означают соответственно концентрацию и подвижность ионов.

Подвижности ионов b^+ и b^- численно равны средним скоростям (обычно в $см \cdot сек^{-1}$) дрейфа соответствующих ионов в диэлектрической среде, при наличии в ней напряженности (обычно в $см^{-1}$) электрического поля, равной единице, т. е.

$$\bar{v} = b \cdot E. \tag{29,4}$$

Здесь подвижность выразится в $\frac{см \cdot сек^{-1}}{в \cdot см^{-1}}$ или в $\frac{см^2 \cdot сек^{-1}}{в}$.

В газах подвижности ионов при нормальных условиях составляют несколько указанных единиц ($b^- > b^+$); в жидких сильно разбавленных электролитах при комнатной температуре они имеют значения порядка $10^{-3}\ \frac{см^2 \cdot сек^{-1}}{в}$; в твердых электролитах при тех же условиях — 10^{-7} тех же единиц (резко возрастая с температурой). Значения подвижностей электронов в полупроводниках и проводниках лежат в пределах $(10 \div 10^3)\ \frac{см^2 \cdot сек^{-1}}{в}$. Диэлектрик может не иметь носителей тока в виде электронов, ионов или других заряженных частиц, но в нем может осуществляться движение электричества путем изменения во времени состояния электрического поля, т. е. может протекать электрический ток. По теореме Остроградского — Гаусса такой электрический ток является током диэ-

лектрического смещения. Его течение обусловлено полевыми процессами, а именно изменениями во времени результирующего вектора диэлектрического смещения D, создаваемого электрическими полями зарядов, находящихся вне рассматриваемого объема диэлектрика. Ток смещения $I_с$, который протекает сквозь некоторую площадь S, нормальную к вектору D, в системе а. э. е. выражается формулой

$$I_с = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{dN}{dt} = \frac{1}{4\pi} S \frac{dD}{dt} = \frac{\varepsilon_с}{4} S \frac{dE}{dt}. \qquad (29,5)$$

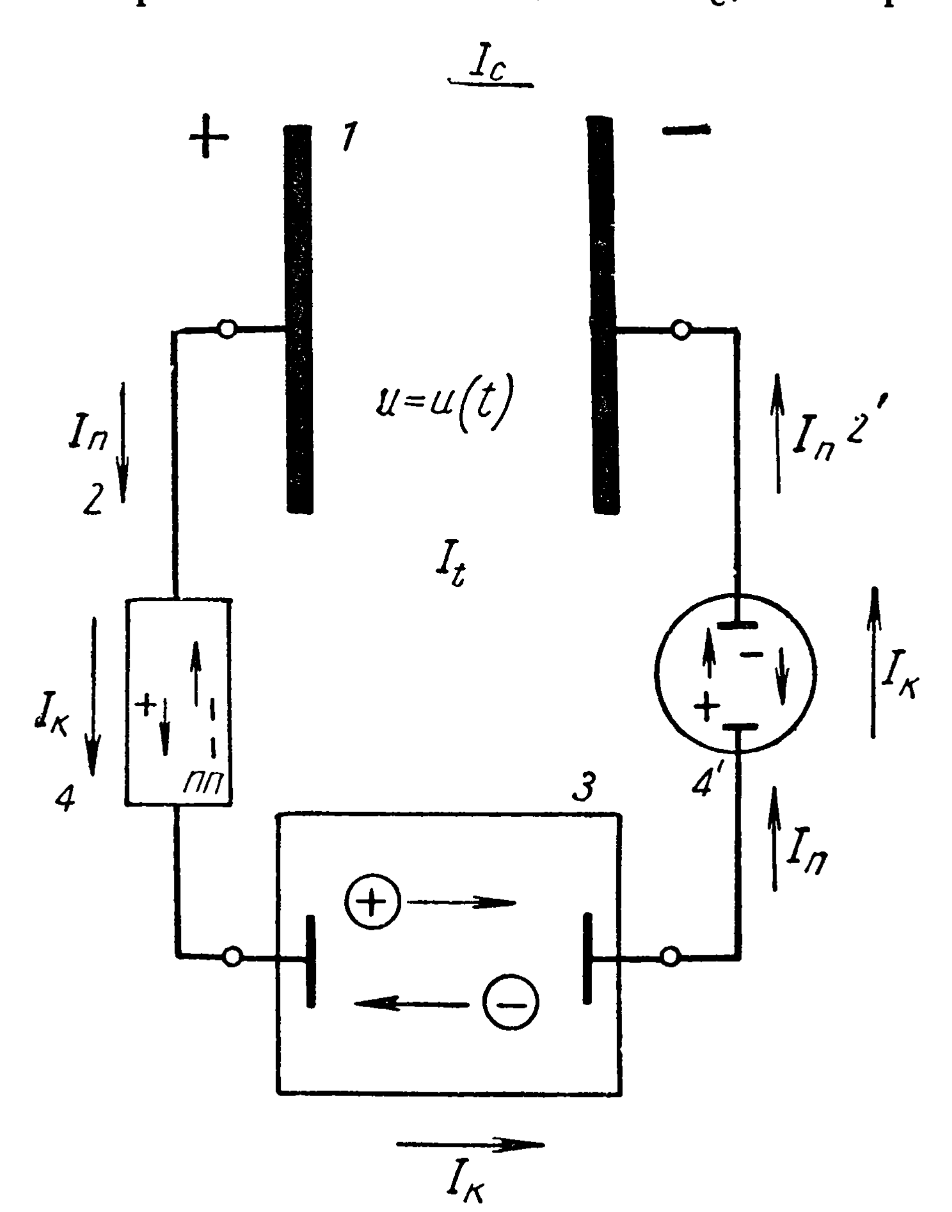


Рис. 29-2. Замкнутый контур тока со смешанной проводимостью электричества. На участке *1* течет ток смещения, на участках *2*, *2′* — электронный ток проводимости; на участках *3*, *4*, *4′* (электролит, полупроводник, газоразрядная трубка) — ток конвекции

Примером тока смещения может служить ток, протекающий в вакууме между двумя электродами при изменении во времени разности потенциалов между ними или при изменении емкости между ними. Если изменяются обе величины, то

$$I_с = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(C \cdot U)}{dt} = C\frac{dU}{dt} + U\frac{dC}{dt}. \qquad (29,6)$$

Из выражения (29,5) следует, что электрический ток смещения прямо пропорционален скорости изменения электрического поля. По этой причине конденсаторы большой емкости с вполне совершенным изолирующим слоем диэлектрика не оказывают заметного сопротивления токам высокой частоты, но почти совсем не пропускают постоянного тока.

В общем случае электрический ток складывается из всех трех рассмотренных видов, так что полный ток, протекающий через некоторую поверхность в среде, равен

$$I = I_п + I_к + I_с. \qquad (29,7)$$

При всех условиях течения электричества в соответствии с представлением об электрическом токе контур, по которому происходит непрерывное перемещение электричества, т. е. протекает электрический ток, всегда является замкнутым. Например, при разряде конденсатора на проводящую цепь, содержащую электролит, полупроводник и газоразрядный промежуток (рис. 29-2) на разных участ-

ках контура тока, будет протекать одинаковый по величине ток, но он будет представлен тремя различными видами течения электричества.

Сквозь изолятор конденсатора протекает ток смещения

$$I_с = C\frac{dU}{dt} = I(t).$$

В проводниках этот ток I представлен током проводимости

$$I_п = ne\bar{v}(t)\cdot S = I(t),$$

а в электролите и газовом промежутке — током конвекции

$$I(t) = en'S(b^+ + b^-)E(t) = I_к.$$

Тот или иной вид тока определяется природой электрической проводимости среды: электронной — для тока проводимости, электронно-дырочной, или ионной, —для тока конвекции, полевой электромагнитной — для тока диэлектрического смещения.

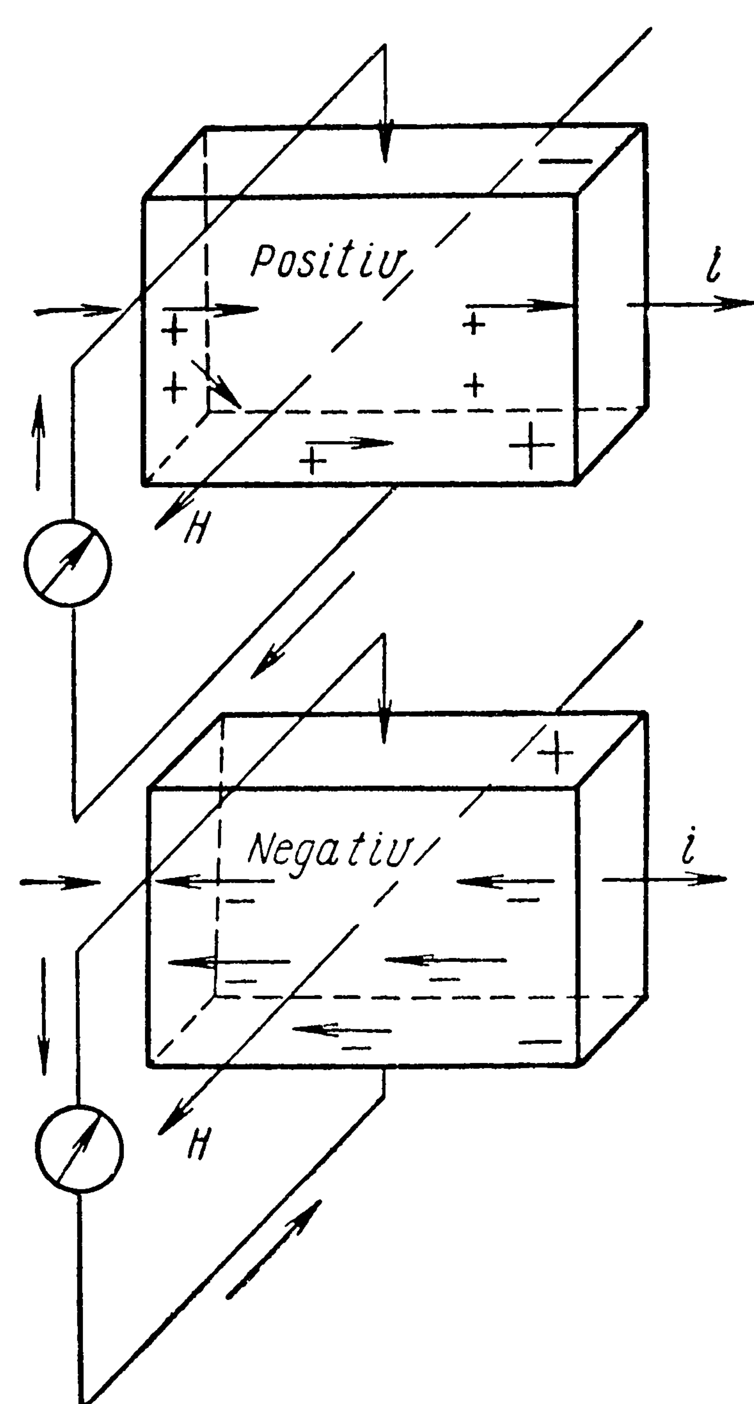


Рис 29-3. Явление Холла (p — positiv и n — negativ — обозначения носителей тока)

Природа и знаки зарядов носителей тока для токов проводимости и конвекции может быть выяснена с помощью эффекта Холла. Этот эффект заключается в том, что при протекании тока сквозь образец вещества, помещенный в поперечное (по отношению к вектору плотности тока) магнитное поле, в образце возникает поперечное электрическое поле, перпендикулярное как вектору плотности тока, так и вектору напряженности магнитного поля (рис. 29-3). Дрейфующие носители тока в магнитном поперечном поле будут отклоняться от своего пути под действием электромагнитной силы (силы Лоренца, аналогичной силе Ампера, отклоняющей проводник с током), направление которой определяется по известному правилу левой руки (см. рис. 29-3). Направление поля, возникающего вследствие изменения концентрации дрейфующих свободных зарядов (поле Холла), определяет знак заряда носителей тока. Аналогично значению силы Ампера при $S = 1$ *см*^{2} сила Лоренца выражается формулой

$$dF = Hidl = Hdq\frac{dl}{dt} = H\frac{ne}{c}v; \qquad (29,8)$$

отсюда для отдельного заряда ($n = 1$) в системе а. э. е. имеем

$$F_л = H\frac{e}{c}v, \qquad (29,8')$$

где H — напряженность магнитного поля в абсолютных электромагнитных единицах, $c = 3 \cdot 10^{10}$ — коэффициент соотношения между абсолютными электростатическими и электромагнитными единицами заряда. Полагая $F = \pm eE_x = F_л$, имеем

$$H\frac{v}{c} = \pm E_x.$$

Из опытных данных получим

$$E_x = R_x \cdot H \cdot i = R_x \cdot H \cdot n \cdot ev, \qquad (29,9)$$

так что постоянная эффекта Холла будет

$$R_x = \pm\frac{1}{nec}; \qquad (29,10)$$

если e выражается в абсолютных электростатических единицах, знак «плюс» соответствует положительным носителям тока, а знак «минус» — отрицательным. Умножая выражение (29,10) на $\sigma = neb$, получим

$$\sigma R_x = \frac{b}{c}. \qquad (29,10')$$

Таким образом, эффект Холла по значению постоянной $R_x \gtrless 0$ позволяет определить не только знак носителей тока, но и их концентрацию n и подвижность b. Например, оказалось, что R_x для Bi в $2 \cdot 10^5$ раз больше, чем для Cu. У твердых ионных проводников и жидких электролитов $R_x = 0$, поскольку носители тока имеют разноименные заряды.

Среди большинства веществ удельная электрическая проводимость которых лежит в интервале между крайними наибольшими значениями для проводников (10^5 $ом^{-1}$ $см^{-1}$) и крайними наименьшими значениями для изоляторов (10^{-13} $ом^{-1}$ $см^{-1}$), имеется группа веществ (полупроводников), характеризуемая отрицательным значением температурного коэффициента электрического сопротивления.

У всех проводников с повышением температуры концентрация свободных электронов практически не изменяется, но у них увеличивается размах колебаний узлов кристаллической решетки, так что дрейф электронов затрудняется, и, следовательно, электрическое сопротивление проводника возрастает. У электронных полупроводников, наряду с увеличением размаха колебаний узлов кристаллической решетки, резко возрастает число носителей тока, причем в течении электричества участвуют не только свободные электроны, но и свободные места ковалентных связей атомов.

Вследствие этого с повышением температуры электрическое сопротивление полупроводников уменьшается, а проводимость соответственно возрастает.

Закон Ома, справедливый для проводников (металлы, электролиты), в дифференциальной форме имеет вид

$$i = nebE = \sigma E, \qquad (29,11)$$

где E — напряженность электрического поля, непрерывно создаваемого источником питания внутри проводника.

Выражение (29,11) для плотности тока непосредственно вытекает из закона Ома, записанного для участка цепи, не содержащего источников электродвижущих сил, и примененного к элементарному участку проводника сечением dS и длиной dl с удельной проводимостью σ. Для такого участка очевидно, что

$$\frac{1}{R} = \sigma \frac{dS_n}{dl}.$$

Так как U означает падение потенциала на некотором участке длиной l, то падение потенциала на участке длиной $l + dl$ составит $U + dU$, и, следовательно, изменение разности потенциалов будет $U - (U + dU) = -dU$. Таким образом,

$$i = \frac{di}{dS_n} = -\sigma \frac{dU}{\vec{dl}} = \sigma \vec{E}. \qquad (29,12)$$

Однако этот закон, в котором принята независимость удельной проводимости от приложенной разности потенциалов, не будет выполняться для электрических токов конвекции в газах. В ионизированных газах число свободных носителей тока ограничено, так что наблюдается явление насыщения. Кроме того, значительную роль в искажении электрического поля играют пространственные заряды у электродов. При ударной ионизации, производимой движущимися зарядами, проводимость газа резко возрастает. В разреженных газах, которые ударной ионизацией приведены в состояние ионной плазмы, т. е. в такое состояние, когда уже не имеется нейтральных атомов, а имеются только положительные и отрицательные ионы (в том числе и электроны), проводимость возрастает до очень высоких значений. Сквозь плазму могут протекать исключительно большие токи (в несколько миллионов ампер).

Особый вид проводимости, так называемой дырочной, наблюдается в электронных полупроводниках. Типичными веществами, в которых возникает такого вида проводимость, являются кристаллы Si и Ge с ковалентными связями атомов. Все четыре валентных электрона атомов в равновесном состоянии связаны (рис. 29-4, *а*) и кристалл полупроводника, не имеющего примесей, при низких температурах является типичным диэлектриком (рис. 29-4, *д*). На схеме энергетических уровней занятыми являются все уровни валентных связей (зона уровней валентных связей), причем в со-

ответствии с исключением Паули в каждом из возможных квантовых состояний, определяемых четырьмя квантовыми числами (главным, побочным, магнитным и спиновым), может находиться только один электрон (см. рис. 29-4). Работа, которую необходимо совершить у полупроводников для освобождения валентного электрона

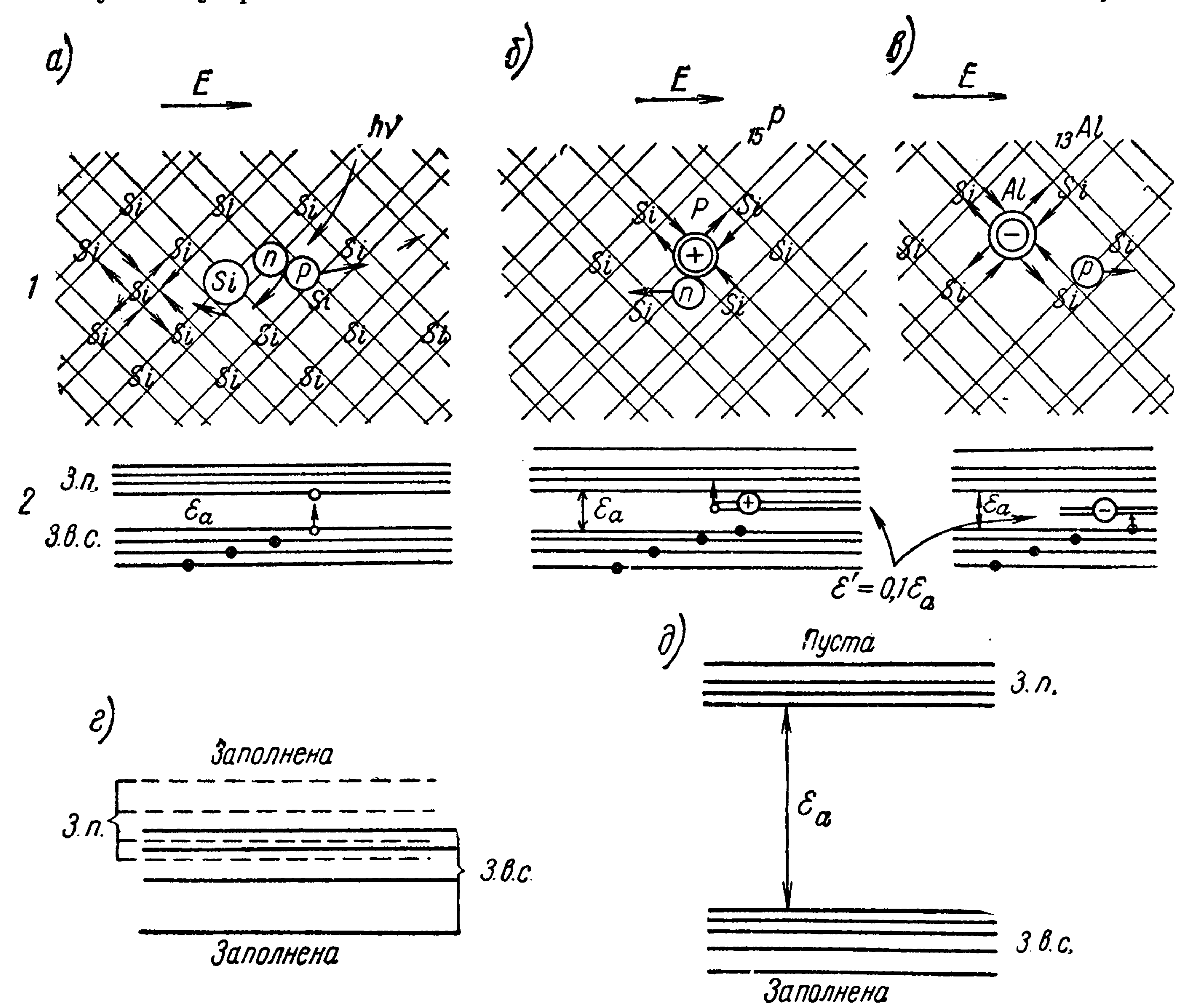


Рис. 29-4. Проводимость полупроводников:

а) собственная проводимость, *б*) проводимость полупроводника *n*-типа; *в*) проводимость полупроводника *p*-типа, *1* — образование *n*- и *p*-носителей тока; *2* — зоны уровней энергии электронов (з. в. с. — зона валентных связей; з. п. — зона проводимости; ε_a — энергия активации с уровнем основной решетки; ε' — энергия активации с уровнем примеси), *г*) схема уровней проводника, *д*) схема уровней диэлектрика

(энергия активации проводимости $\varepsilon_а$), меньше, чем у диэлектриков, и составляет примерно 1 *эв*. Такой или большей энергией может обладать лишь незначительная часть атомов при их беспорядочном движении, так как

$$n_{\varepsilon_а} = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_а}{kT}}. \quad (29,13)$$

Эту энергию могут извне внести в полупроводник кванты излучений (кванты видимого света с энергией $h\nu = 1,5 \div 3$ *эв*; ультра-

фиолетового — $h\nu > 4$ *эв*; рентгеновского — $h\nu > 3$ *кэв* и γ-кванты — $h\nu > 1$ *Мэв*) или быстро движущиеся заряженные частицы (протоны, электроны, ядра).

В результате воздействия на кристалл излучением или путем повышения температуры вещества полупроводника внутри гомополярной решетки кристалла в междуузлии появятся свободные электроны, полученные из числа валентных электронов. Вместе с тем в валентных связях атомов окажутся свободные места или так называемые дырки.

Свободные отрицательные заряды (электроны) совершают в междуузлии дрейф против макроскопического электрического поля, создаваемого приложенной к полупроводнику разностью потенциалов, и тем самым представляют собой негативные (n) носители тока. Вместе с этим дрейфом электронов в полупроводнике протекает электрический процесс, связанный с его внутренним полем. Образовавшееся свободное место в валентной связи нарушает равновесие внутреннего поля и вызывает заполнение дырки одним из ближайших валентных электронов, переместившимся в направлении против внешнего поля. При этом свободные места окажутся дрейфующими по полю и, следовательно, будут вести себя как позитивные (p) дополнительные носители тока.

На схеме энергетических уровней такой процесс представляется как перенос электрона из зоны валентных связей (з. в. с.) в зону уровней проводимости (з. п.), расположенную выше зоны уровней связи на величину энергии активации ε_a. Таким образом, создаются n-носители тока в зоне уровней проводимости и p-носители в зоне уровней валентных связей. Собственная проводимость полупроводника изменяется соответственно образованию этих носителей. В механизме собственной проводимости полупроводника участвуют не только свободные электроны (n-носители тока), но и внутренние полевые образования (p-носители тока).

Согласно схеме энергетических уровней при протекании тока в полупроводниках участвуют не только носители тока зоны проводимости, но и дырки зоны валентных связей. Полевое образование в форме p-носителя тока в полупроводнике не представляет собой положительного заряда (позитрона), однако его участие в процессе электрического тока эквивалентно дрейфу положительного элементарного заряда. В атомах нет позитронов, а для образования пары зарядов (электрон — позитрон) требуется энергия по крайней мере в миллион электронвольт ($E \geqslant 2m_0c^2$).

Собственная проводимость полупроводников зависит от температуры, причем с ее повышением резко увеличивается (см. 29,13) число носителей тока. Поэтому, несмотря на возрастание сопротивления направленному перемещению зарядов со стороны колеблющихся узлов решетки, проводимость полупроводника увеличивается. Это свойство является одним из характерных признаков полупроводников.

Наличие в решетке полупроводника примесных атомов соседних групп вызывает появление новых возможных энергетических уровней. Если эти атомы являются атомами-донорами, т. е. имеющими лишний электрон по сравнению с атомами основного вещества, то в решетке окажутся закрепленными положительные ионы этих примесных атомов, а в междуузлии — свободные электроны (n-носители тока).

Полупроводники этого типа (рис. 29-4, *б*), кроме собственной проводимости, имеют еще примесную проводимость n-типа. Аналогично, в случае внедрения акцепторных примесных атомов в решетке окажутся закрепленными отрицательные ионы примесного вещества и освобожденными для этого закрепления места (дырки) в валентных связях атомов основной решетки (p-носители тока). Полупроводники этого типа (рис. 29-4,*в*), кроме собственной проводимости, будут иметь еще примесную проводимость p-типа. При высоких температурах относительное значение примесной проводимости уменьшается, и основную роль играет собственная проводимость полупроводников.

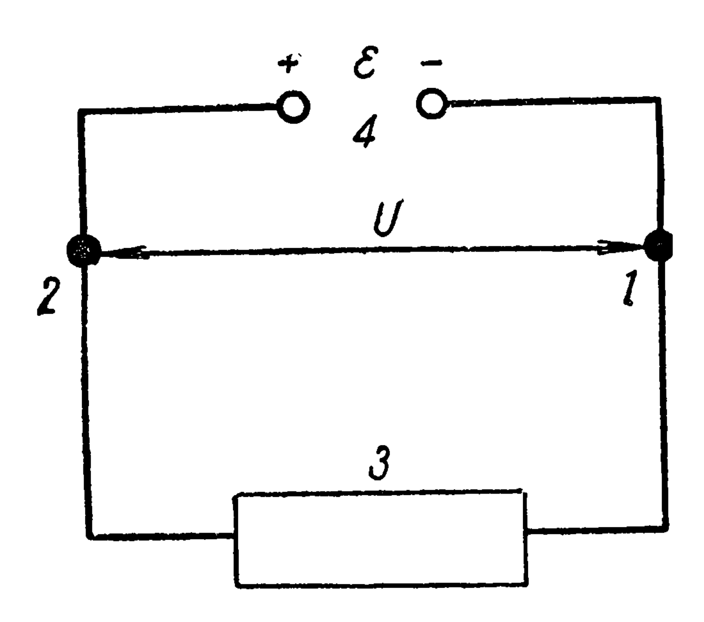


Рис. 29-5. К использованию закона Ома для участка цепи тока (R_{2-3-1} — сопротивление участка без источника питания, R_{2-4-1} — сопротивление участка, содержащего источник электродвижущей силы)

При наличии сопротивления движению электричества, согласно первому началу термодинамики, необходимо, чтобы в контуре постоянного электрического тока был источник, который за счет энергии внутренних процессов (трибо-, термо-, магнито-, фото-, нуклео- или хемоэлектрических) производил бы работу перемещения зарядов в среде.

В потенциальном электростатическом поле работа перемещения единичного заряда по любому замкнутому контуру всегда равна нулю $\left(\oint E_l\,dl = 0\right)$. При протекании электрического тока этот интеграл вдоль контура тока уже не будет равен нулю, а составит работу перемещения положительного единичного заряда при переводе его от низкого потенциала к более высокому. Эта работа численно определяет величину суммарной электродвижущей силы, действующей в контуре с э. д. с. тока $\mathscr{E}$. Для простейшей цепи, состоящей из источника с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ и с внутренним сопротивлением r и некоторого внешнего сопротивления цепи R (рис. 29-5), закон Ома представится в следующем виде

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_{2-3-1}} = \frac{U}{R_{2-3-1}} = \frac{\mathscr{E} - U}{R_{2-4-1}}. \qquad (29,14)$$

Лекция 30

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Металлы не изменяют своих свойств, как бы долго сквозь них ни протекал электрический ток. Таким образом, носителями тока в металлах могут быть лишь свободные электрические заряды. Природа этих носителей была выяснена опытами Мандельштама — Папалекси (1914 г.), а также опытами Стюарта и Толмена (1916 г.) с торможением вращающейся катушки (рис. 30-1).

Если радиус катушки r, а угловая скорость вращения перед торможением $\omega = 2\pi z$, где z — число оборотов в секунду, то линейная окружная скорость движения вещества катушки вместе с содержащимися в ней свободными зарядами будет равна

$$v_0 = r\omega = 2\pi z r.$$

Обозначая время торможения катушки через t, получим, что за это время свободные заряды из-за инерции приобретут относительно решетки металла ускорение $a = \frac{v_0}{t}$. Так как $m_0 a = eE$ (e и m_0 — соответственно заряд и масса покоя носителя тока), то, следовательно, ускорение вызовет появление внутри проводника электрического поля

$$E = \frac{U}{l} = \frac{m_0 a}{e}.$$

Здесь U — разность потенциалов, возникающая на концах катушки.

Таким образом, количество электричества, протекшего за время торможения, составит

$$Q = I \cdot t = \frac{U}{R} t = \frac{m_0 a l t}{eR} = \frac{m_0 v_0 l}{eR}. \qquad (30,1)$$

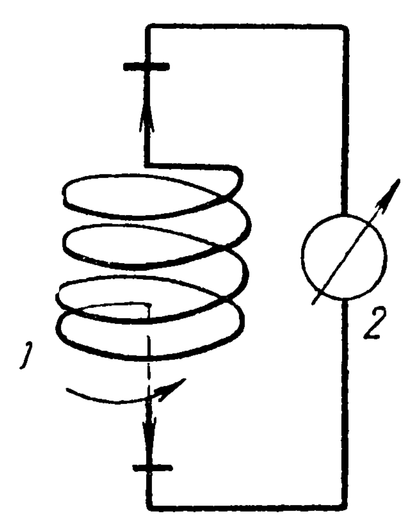


Рис. 30-1. Схема опыта Толмена и Стюарта по определению природы носителя тока в металлах:

1 — вращаемая и затормаживающая катушка; *2* — баллистический гальванометр

Отсюда по измеренному значению Q (баллистический отброс индикатора тока; см. рис. 30-1) и параметрам катушки может быть найдено значение $\frac{e}{m_0}$ для носителя тока в металле. Оказалось, что $\frac{e}{m_0} = 5{,}27 \cdot 10^{17}$ (а. э. е.), или $\frac{e}{m_0} = 1{,}78 \cdot 10^{11}$ СИ, что соответствует заряду и массе электрона. При $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ а. э. е.

$$m_0 \approx 9 \cdot 10^{-28}\ г \approx \frac{1}{1840} M_{\text{Н}}.$$

Металл в целом не проявляет свойств заряженного тела, так что свободные электроны проводимости можно считать лишь как электроны, отделившиеся от атомов. С точки зрения электрической проводимости металл представляет собой жесткую ионную решетку,

составляющую остов вещества, внутри которой имеются свободные электроны проводимости. Дрейф этих электронов в металле, поле решетки которого показано на рис. 30-2, представляет собой течение электричества и отображает зарядовую сторону того электромагнитного процесса, который называется током проводимости.

В классической теории проводимости металлов, развитой Друде и Лорентцом, электроны проводимости в металле рассматриваются как своеобразный электронный газ, подчиняющийся молекулярной

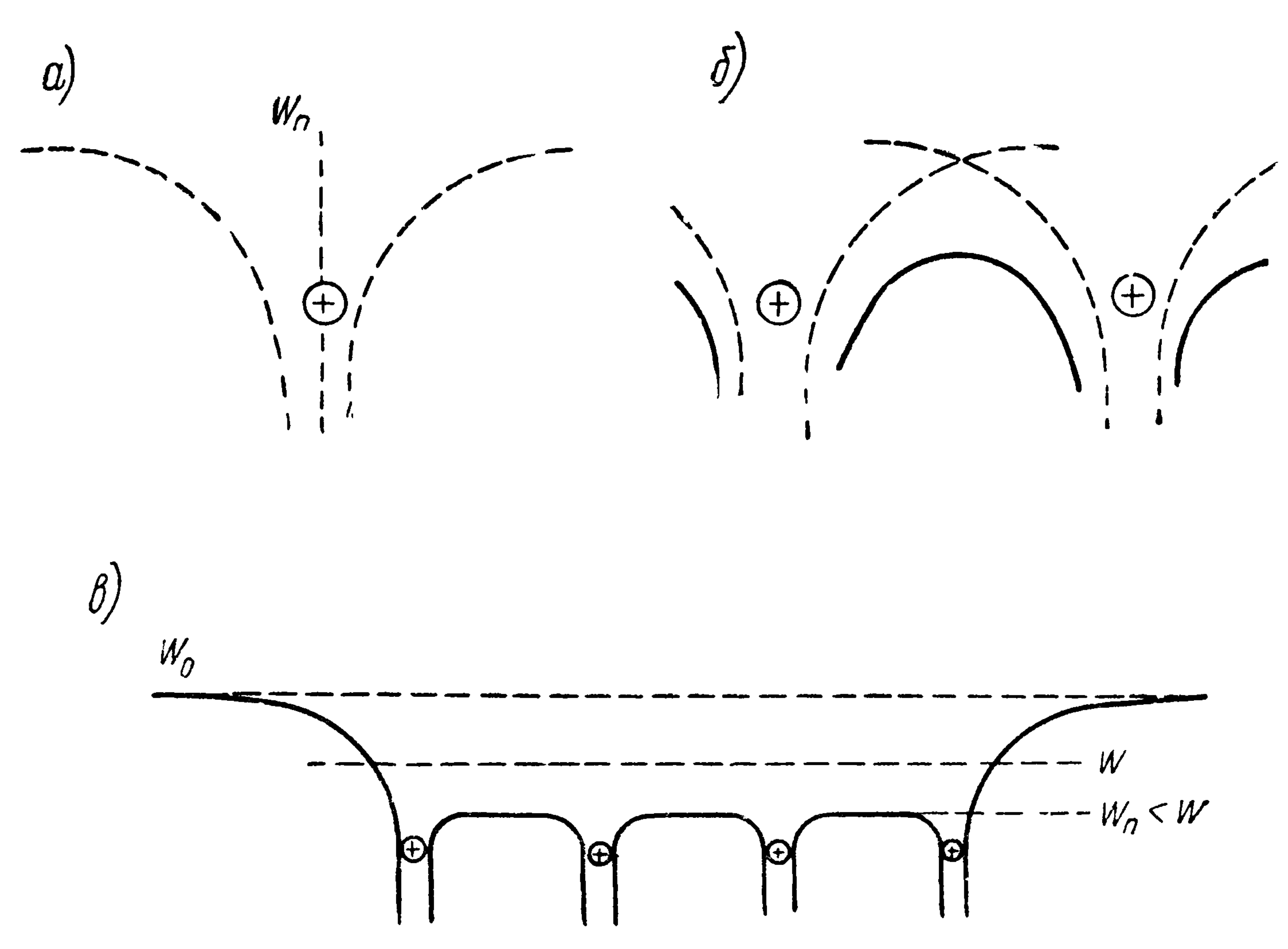


Рис. 30-2. Энергия электрона в потенциальном поле ионной решетки металла:

а) потенциальная энергия $W_п = -\frac{e^2}{r}$ в поле одиночного иона; *б*) то же, в поле двух ионов (сплошной кривой обозначена суммарная энергия; *в*) энергия в поле решетки металла ($W_0 = 0$ — нулевой уровень на расстоянии $r = \infty$; $W_п$ — суммарная потенциальная энергия; $W = W_п + W_к$ — полная энергия электрона)

статистике Больцмана — Максвелла. Это допущение ограничивает справедливость теории только теми явлениями, в которых квантовые соотношения не существенны. Например, протекание тока в проводящей цепи (закон Ома), преобразование энергии тока в проводнике (закон Ленца — Джоуля) и соотношение между электро- и теплопроводностью металлов (закон Видемана — Франца).

Закон Ома непосредственно вытекает из представлений электронной теории проводимости металлов. Если объемная концентрация электронов проводимости будет $n_0 = \frac{N_0}{\mu} \rho_{мет}$ (примерно один свободный электрон на каждый атом), то плотность тока i составит

$$i = n_0 e\bar{v} = n_0 ebE = \sigma E, \qquad (30,2)$$

где b — подвижность электронов в металле, σ — удельная проводимость металла. Выражение (30,2) представляет собой закон Ома в дифференциальной форме, так как $E = -\frac{dU}{dl}$. Для определения величины подвижности электронов b необходимы добавочные предположения о характере дрейфа электронов в решетке.

Полагая, что при каждом столкновении электрон, дрейфующий против поля, теряет всю свою кинетическую энергию поступательного движения ($v_н = 0$) и разгоняется вновь полем на длине свободного пробега $\bar{\lambda}_э$ до конечной скорости $v_к = a\tau = \frac{e}{m_0} E\tau$, где $\tau = \frac{\bar{\lambda}_э}{\bar{u}_э}$ — время разгона, получим

$$\bar{v} = \frac{v_к}{2} = \frac{e}{2m_0} E \frac{\bar{\lambda}_э}{\bar{u}_э} = \frac{i}{n_0 e}, \tag{30,3}$$

и, значит,

$$i = \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}_э}{2m_0 \bar{u}_э} E, \tag{30,4}$$

или

$$\sigma = \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}_э}{2m_0 \bar{u}_э}. \tag{30,5}$$

Здесь

$$\bar{u}_э = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \tag{30,6}$$

— статистическая скорость беспорядочного движения свободных электронов, в котором согласно предположениям классической теории, участвуют все электроны проводимости. Эта скорость $\bar{u}_э$ во много раз превышает среднюю скорость дрейфа электронов $\bar{v}$ ($\bar{u}_э \gg \bar{v}$). Например, при комнатной температуре по формуле (30,6) $\bar{u}_э = 10^7$ *см· сек*$^{-1}$, в то время как даже при значительной плотности тока ($i = 5$ *а/мм*$^2 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ а. э. е.) для средней скорости дрейфа электронов в меди провода ($\mu = 64$, $\rho = 8{,}9$ *г· см*$^{-3}$) из выражения (30,2) имеем

$$\bar{v} = \frac{i}{en_0} = \frac{i\mu}{N_0 e\rho} \approx 3 \cdot 10^{-2}\ см \cdot сек^{-1} \ll \bar{u}_э.$$

Согласно (30,3), конечная скорость разгона электрона будет равна

$$v_к = \frac{e}{m_0} \frac{\bar{\lambda}_э}{\bar{u}} E.$$

Полагая число столкновений электрона проводимости в единицу времени равным $z = \frac{\bar{u}_э}{\bar{\lambda}_э}$, получаем, что мощность, передаваемая единице объема проводника,

$$p = \frac{P_э}{V} = \frac{1}{2} m_0 v_к^2 z n_0 = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}_э}{m \bar{u}_э} E^2 = \sigma E^2 \tag{30,7}$$

— закон Ленца — Джоуля.

Применяя кинетическую теорию газов к электронам в металле, для коэффициента теплопроводности металла будем иметь выражение

$$K = \frac{1}{3} n_0 m_0 \bar{u}_э \bar{\lambda}_э (c_V)_э. \quad (30,8)$$

Здесь $(c_V)_э$ — удельная теплоемкость металла, обусловленная электронами, так что $m_0 (c_V)_э = \frac{3}{2} k$ и, значит, согласно (30,5) и (30,8),

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{m_0 \bar{u}_э^2}{e^2} k. \quad (30,9)$$

Так как по кинетической теории газов $m\bar{u}^2 = 3kT$, то из выражения (30,9) получим соотношение между коэффициентами теплопроводности и электропроводности

$$\frac{K}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} \cdot T = \mathrm{const} \cdot T \quad (30,9')$$

— закон Видемана — Франца, по которому это соотношение не зависит от рода металла, но зависит прямо пропорционально от температуры. Классическая статистика, примененная к электронам в металле, привела, таким образом, к трем основным законам электрического тока проводимости металлов. Однако сделанные в ней допущения о независимости движения электронов проводимости, применение к этому движению законов классической механики, принятие объемной концентрации свободных электронов, равной концентрации атомов вещества проводника, а длины пробега электрона $\lambda_э$, равной расстоянию между ионами кристаллической решетки металла, приводят к некоторым противоречиям с опытом. Так, из опыта известно, что $\sigma \sim \frac{1}{T}$, а не $\frac{1}{\sqrt{T}}$, как вытекает из выражения (30,5). По кинетической теории газов следует, что теплоемкость металла должна складываться из теплоемкости кристаллической решетки $\left(\frac{6}{2} R\right)$ и теплоемкости электронного газа $\left(\frac{3}{2} R\right)$, т. е. $c = \frac{9}{2} R$. Между тем опыт показывает, что для металлов, как и для диэлектриков, $c = \frac{6}{2} R$. Далее по классической кинетической теории газов средняя кинетическая энергия электронов проводимости должна убывать с понижением температуры $\sim \frac{3}{2} kT$. Между тем, как показывает опыт, она изменяется незначительно, и, следовательно, в тепловом движении участвуют не все электроны проводимости, а только некоторая часть их, зависящая от температуры. Элементарная электронная теория проводимости металлов не дает объяснений явлению сверхпроводимости.

Эти недочеты теории снимаются квантовыми дополнениями к теории, сделанными Ферми.

Лекция 31

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Недочеты теории проводимости, возникшие в результате применения классической статистики к электронам в металлах, устраняются при использовании квантовой статистики, развитой Ферми и Дираком.

Как следует из квантового соотношения неопределенностей (лекция 3), электроны в металлах принадлежат к той категории микрочастиц, к которой необходимо применять квантовую или волновую механику. Отметим, что фазовая длина волны электрона в металле (волна де Бройля), согласно выражению (3,3), составляет

$$\overline{\lambda}_p = \frac{h}{m\overline{v}} = 60\text{Å},$$

т. е. такую величину, для которой характерны дифракционные явления на узлах решетки кристалла. Квантовая статистика Ферми — Дирака для свободных электронов, находящихся в микрополе ионной решетки, основывается на неразличимости отдельных электронов, на применении волновой механики к электронной совокупности и на учете ограничения Паули, по которому в каждом квантовом состоянии не может находиться больше одного электрона.

Как уже было отмечено (см. 18,9), распределение электронов по энергиям выражается зависимостью

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{n}\cdot\frac{dn}{d\varepsilon} = K_{\text{Ф—Д}}\cdot\sqrt{\varepsilon}\cdot F_{\text{Ф}}(\varepsilon) = K_{\text{Ф—Д}}\cdot\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}, \quad (31,1)$$

где (случай сильно вырожденного газа)

$$\beta = \frac{1}{kT};\quad K_{\text{Ф—Д}} = \frac{4\pi}{h^3}(2m)^{3/2};\quad e^{-\alpha} = A = n\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}$$

— параметр вырождения электронного газа. При достаточно малых значениях A (например, при температурах $T > 3{,}5\cdot 10^4$ °K) соотношение (31,1) переходит в классическое выражение статистики Максвелла — Больцмана [см. (15,7′)]. При обычных температурах параметр вырождения в металлах может быть представлен в виде

$$A = e^{-\beta\varepsilon_{\text{Ф}}} = e^{-\frac{\varepsilon_{\text{Ф}}}{kT}},$$

где

$$\varepsilon_{\text{Ф}} = \frac{h^2}{2m_0}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3} = 5{,}8\cdot 10^{-27}\cdot n^{2/3} \approx (5 \div 10)\ \text{эв}$$

— энергетический уровень Ферми, который зависит только от концентрации электронов n.

Таким образом, выражение (31,1) может быть записано в виде (рис. 31-1)

$$\varphi(\varepsilon) = K_{\text{Ф-Д}} \cdot \varepsilon^{1/2} \cdot (e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_\text{Ф}}{kT}} + 1)^{-1}. \qquad (31,2)$$

При $A = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \ll 1$, т. е. при высоких температурах, к электронам в металле применима классическая статистика в то время, как при умеренных температурах, когда $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \geqslant 1$, электронный газ в металле является вырожденным и подчиняется только квантовой статистике Ферми — Дирака.

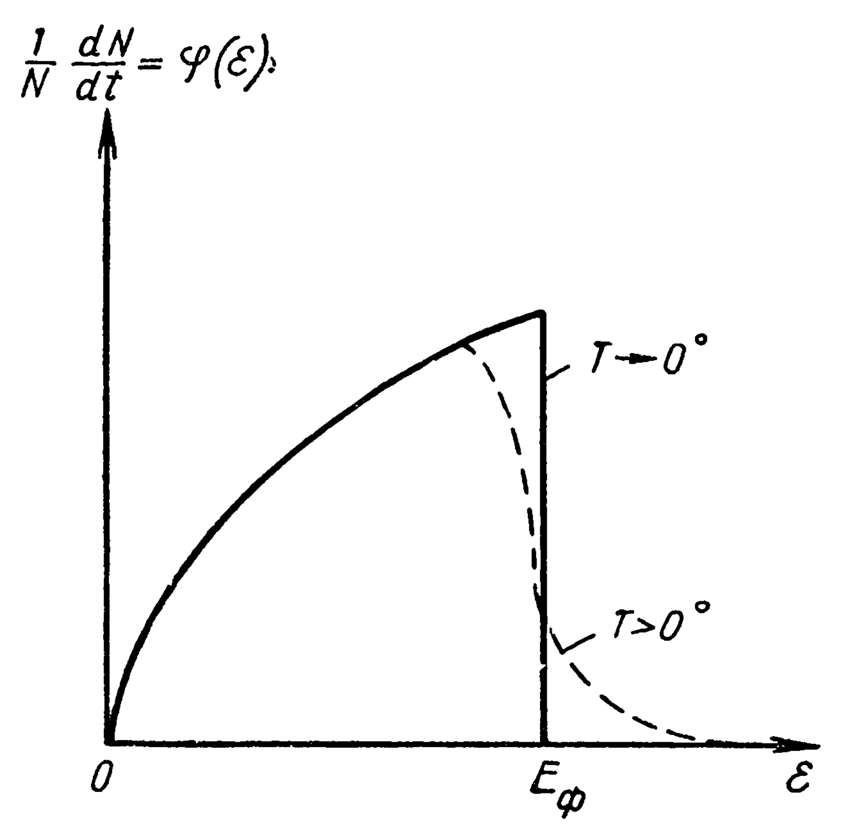


Рис. 31-1. Распределение электронов металла по энергиям согласно статистике Ферми — Дирака (31,2)

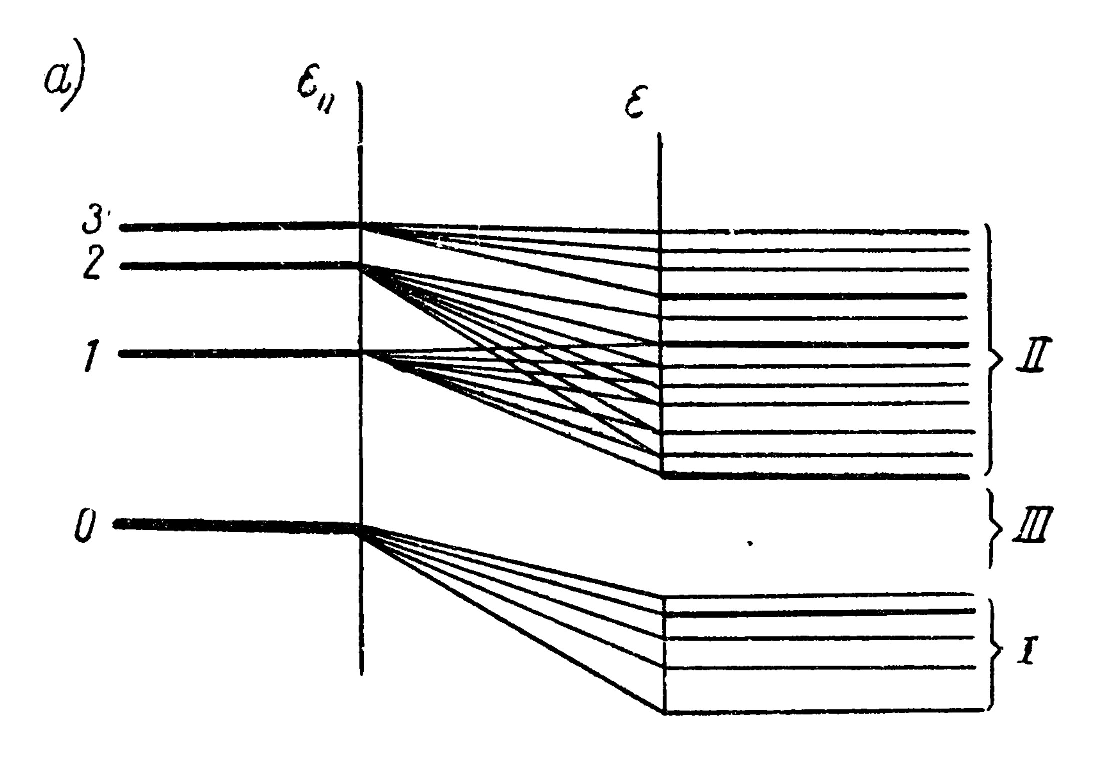
В разреженном газе каждый атом представляет собой самостоятельную квантовую систему с дискретными квантовыми уровнями энергии электронов, подчиняющуюся ограничению Паули. При сближении атомов, находящихся в твердом и жидком состояниях вещества, дискретные квантовые уровни энергии электронов, вследствие взаимного воздействия микрополей атомов, превращаются в полосы разрешенных состояний с энергетическими интервалами порядка 10^{-22} *эв* (рис. 31-2, *а*). При этом сохраняется ограничение Паули для каждого из возможных квантовых состояний.

Функция Ферми $F_\text{Ф} = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_\text{Ф}}{kT}} + 1}$ показывает, в какой мере возможные уровни разрешенных квантовых состояний электронов являются заполненными.

Рассматривая функции Ферми при $T \to 0°$, получаем $F_\text{Ф}(\varepsilon) = 1$ для значений $\varepsilon < \varepsilon_\text{Ф}$ и $F_\text{Ф}(\varepsilon) = 0$ для $\varepsilon > \varepsilon_\text{Ф}$ (рис. 31-3). Аналогично, при $T > 0°$ $F_\text{Ф} = \frac{1}{2}$ для $\varepsilon = \varepsilon_\text{Ф}$; $F_\text{Ф} = e^{\frac{-(\varepsilon-\varepsilon_\text{Ф})}{kT}}$ для $\varepsilon > \varepsilon_\text{Ф}$;

$$F_\text{Ф} = (1 - e^{-\frac{\varepsilon-\varepsilon_\text{Ф}}{kT}}) \text{ для } \varepsilon < \varepsilon_\text{Ф}.$$

Согласно (31,2), плотность возможных уровней энергии электронов возрастает по мере приближения их значений к уровню Ферми ($\sim \sqrt{\varepsilon}$). Зона уровней проводимости в металлах перекрывается с зоной уровней валентных связей (рис. 31-2, *б*).



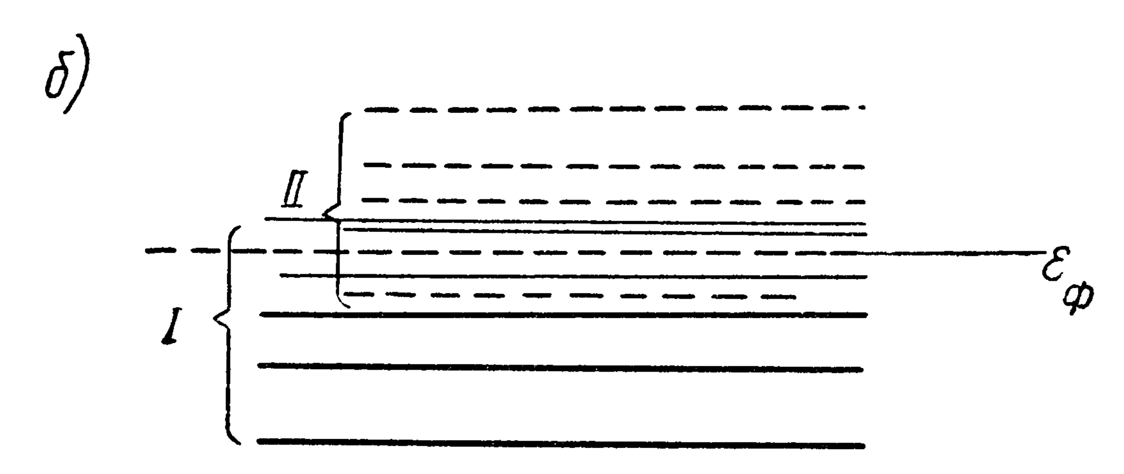


Рис. 31-2. *а*) Образование зон энергетических уровней электрона в кристалле:

ε_0 — уровни энергии электрона в атоме: уровень 0 соответствует нормальному состоянию; уровни *1*, *2*, *3* — возбужденному состоянию атома; ε — уровни энергии электронов в кристалле: *I* — зона уровней валентных связей; *II* — зона уровней проводимости; *III* — зона, запрещенная в квантовом отношении

б) Перекрытие зон энергетических уровней в металле

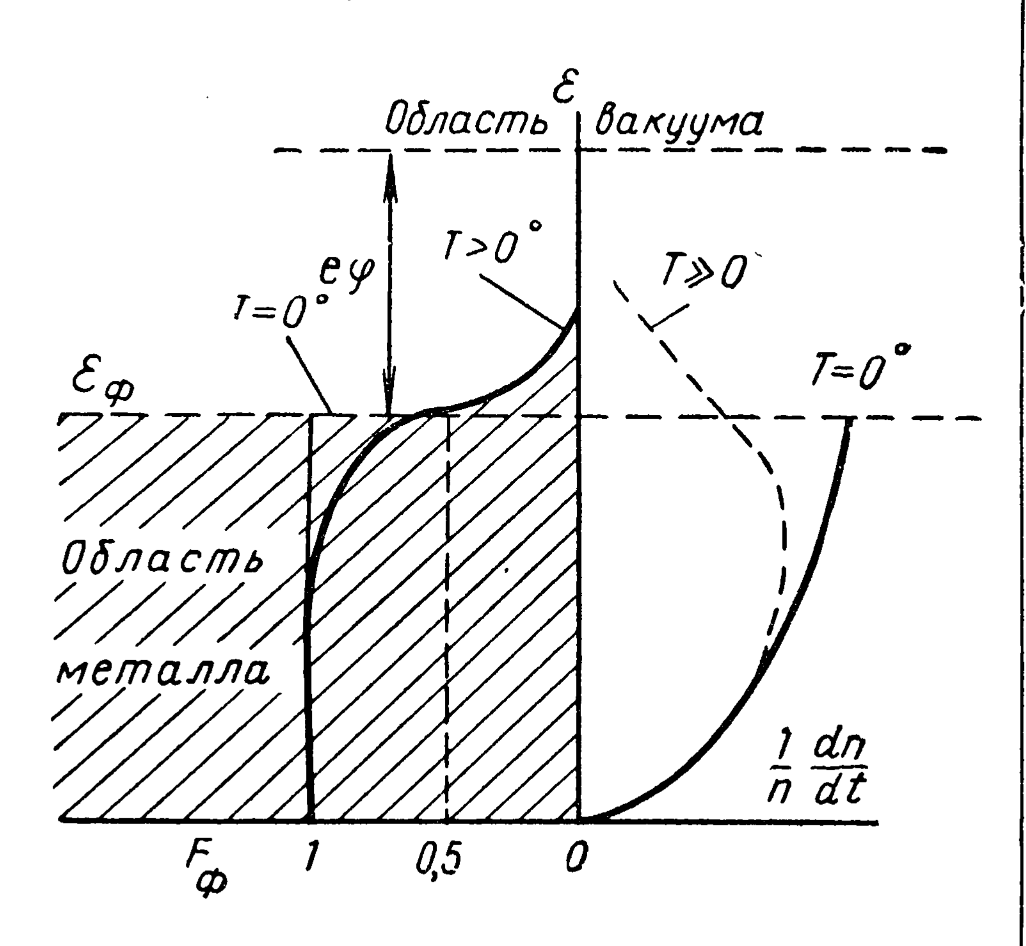


Рис. 31-3. Энергетическая схема электронов в металле:

Слева от оси ординат—график изменения значений функции Ферми $F_ф$; справа — график функции распределения электронов по энергиям.

Сверхпроводящее состояние соответствует полному перекрытию зон, поскольку $\varepsilon_\Phi \sim n^{2/3}$. При $T = 0°$ К электронами заполнены все состояния ниже уровня Ферми. При повышении температуры в беспорядочном движении участвует только часть электронов, занимающих уровни ($\pm kT$) вблизи уровня Ферми, чем и объясняется малое влияние хаотического движения электронов на значение теплоемкости металлов. Таким образом, квантовые дополнения к теории проводимости снимают все расхождения теории с экспериментом.

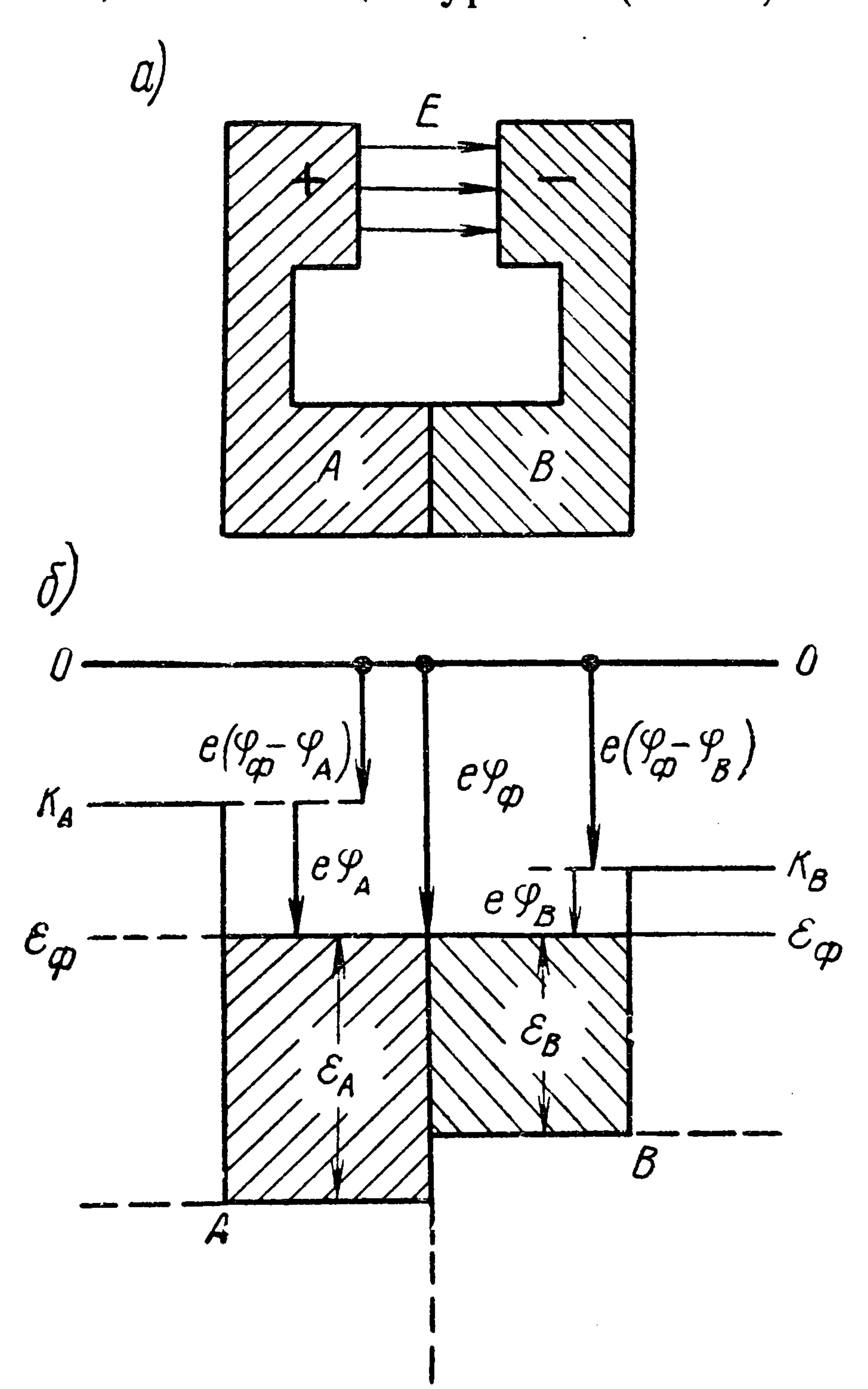


Рис. 31-4. Электрический контакт двух металлов:

а) возникновение контактного электростатического поля; *б*) энергетическая схема возникновения контактной разности потенциалов

При электрическом контакте двух металлов A и B (при обмене электронами) между их свободными концами (рис. 31-4, *а*) возникает разность потенциалов и, значит, образуется электрическое силовое поле. Причиной возникновения контактной разности потенциала является, во-первых, различие в величине работы выхода электрона из металла (работа выхода электрона с уровня Ферми; рис. 31-4, *б*) и, во-вторых, различие в концентрации свободных электронов.

Уровни Ферми соприкасающихся металлов в состоянии равновесия совпадают из-за обмена электронами. Уровни K_A и K_B соответствуют полному освобождению электронов от связи с металлами. Их энергии по отношению уровня Ферми составляют $e\varphi_A$ и $e\varphi_B$, а по отношению к нулевому уровню 00 энергии внешней среды — $e(\varphi_\Phi - \varphi_A)$ и $e(\varphi_\Phi - \varphi_B)$. ε_A и ε_B представляют собой кинетические энергии электронов на уровне Ферми. Суммы $(\varepsilon_A + e\varphi_\Phi)$ и $(\varepsilon_B + e\varphi_\Phi)$ выражают потенциальные энергии, благодаря которым электроны удерживаются в металле.

Контактную разность потенциалов определит электростатическая энергия, равная

$$eU_{к,1} = e(\varphi_\Phi - \varphi_B) - e(\varphi_\Phi - \varphi_A) = e(\varphi_A - \varphi_B), \qquad (31,3)$$

кроме того, число электронов, переходящих из первого металла во второй, по Больцману будет равно $n_{A,B} = n_{0,A} \cdot e^{-\frac{e\varphi_A'}{kT}}$, а переходящих навстречу $n_{B,A} = n_{0,B} \cdot e^{-\frac{e\varphi_B'}{kT}}$. Так как при равновесии $n_{A,B} = n_{B,A}$, то

$$\frac{n_{0,A}}{n_{0,B}} = e^{\frac{e(\varphi_A' - \varphi_B')}{kT}} = e^{\frac{eU_{к,2}}{kT}},$$

откуда

$$U_{к,2} = \frac{kT}{e} \cdot \ln \frac{n_{0,A}}{n_{0,B}}. \qquad (31,4)$$

Таким образом,

$$U_к = U_{к,1} + U_{к,2} = e(\varphi_A - \varphi_B) + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{0,A}}{n_{0,B}} = f(T). \qquad (31,5)$$

При комнатных температурах контактная разность потенциалов составляет несколько вольт.

Если и вторые свободные концы металлов привести в контакт, то образуется замкнутая цепь; но в ней отсутствует электродвижущая сила, поскольку температуры контактов одинаковы и, следовательно, $(U_к)_{1,2} + (U_к)_{2,1} = 0$.

Однако, если $T_1 \neq T_2$, то в цепи возникает термоэлектродвижущая сила (явление Зеебека; рис. 31-5, *а*)

$$\mathscr{E}_{1,2} = (U_к)_1 - (U_к)_2 = \frac{k}{e}(T_1 - T_2) \cdot \ln \frac{n_{0,A}}{n_{0,B}} \qquad (31,6)$$

и будет протекать ток. Термоэлектродвижущие силы по отношению к эталонному металлу (платина), составляющие десятки микровольт на градус, могут быть представлены в виде

$$\mathscr{E}_{1,0} = \alpha_1 \cdot \Delta T \quad \text{и} \quad \mathscr{E}_{2,0} = \alpha_2 \cdot \Delta T,$$

так что

$$\mathscr{E}_{1,2} = (\alpha_1 - \alpha_2)\,\Delta T, \qquad (31,7)$$

где α_1 и α_2 — характеристические коэффициенты термоэлектродвижущих сил рассматриваемых металлов. В явлении Зеебека, следовательно, происходит частичное преобразование тепла, распространяющегося от нагретого тела к холодному, в энергию термоэлектрического тока (термопары).

Обратный процесс характеризуется явлением Пельтье, в котором энергия электрического тока создает отбор тепла от одного тела и передачу его другому (холодильное устройство; рис. 31-5, *б*).

Количество ежесекундно выделяющегося или поглощающегося тепла пропорционально току, т. е.

$$Q_П = K_П \cdot I = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot T \cdot I, \qquad (31,8)$$

где T — температура охлаждаемого спая. Стационарный режим характеризуется условием

$$Q_{\text{П}} = Q_0 + Q_{\text{Т}},$$

где Q_0 — тепло, поступающее в спай из охлаждаемой среды, Q_T — тепло, поступающее за то же время из-за теплопроводности проводов и в результате выделения джоулева тепла.

Третий термоэлектрический эффект (рис. 31-5, *в*) наблюдается в однородной металлической цепи, если в ней одновременно имеется

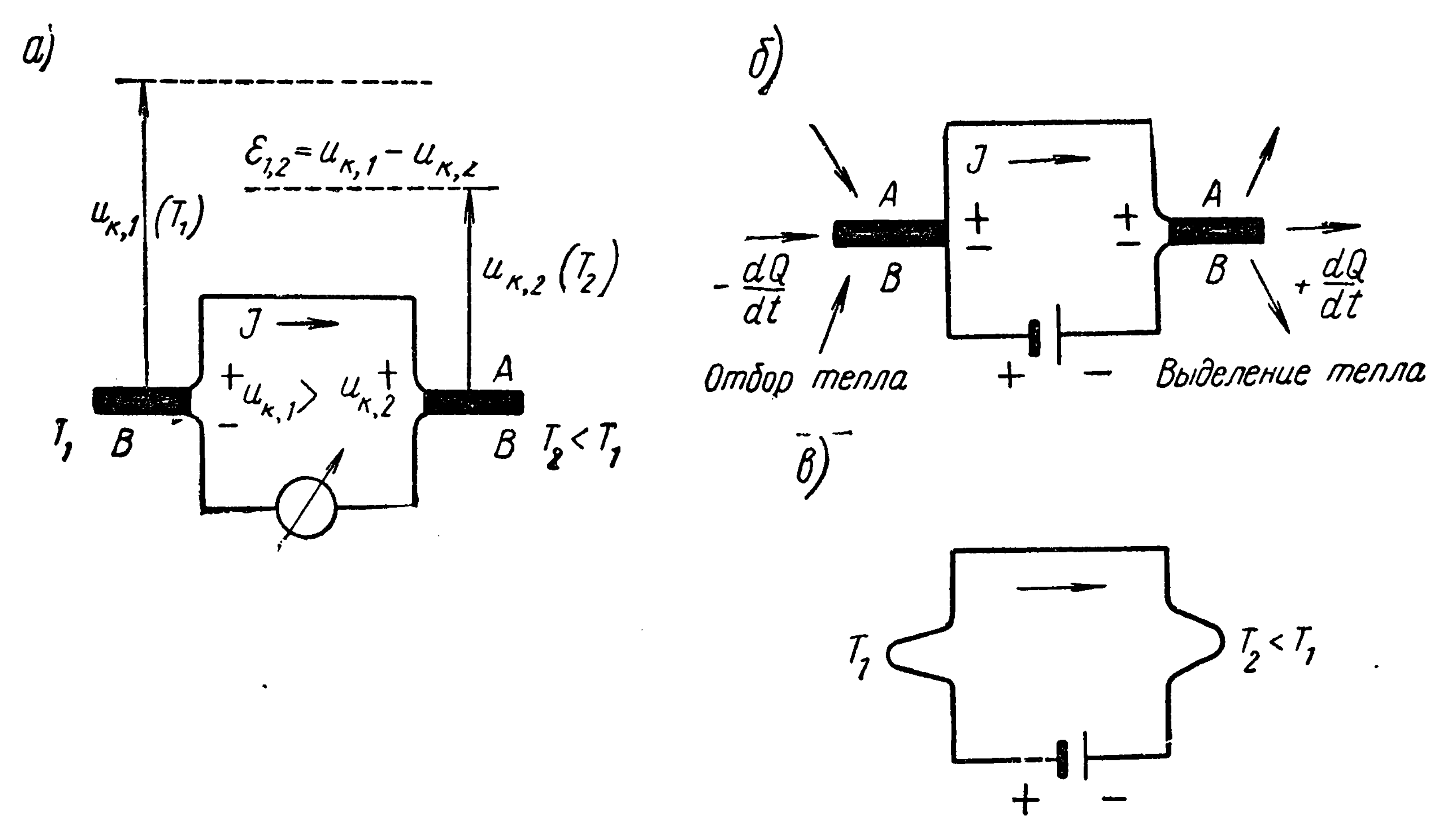


Рис. 31-5. Термоэлектрические цепи (индексы *1*, *2* обозначают контакты разнородных металлов):

а) цепь термопары. Возникновение $\mathcal{E}_{1,2}$ и протекание тока I при $\Delta T \neq 0$ (явление Зеебека); *б*) цепь холодильного элемента. Возбуждение ΔT при протекании тока (явление Пельтье); *в*) термоэлектрический эффект в однородном проводнике при наличии теплового потока и электрического тока (явление Томсона)

разность температур ($\Delta T \neq 0$) и протекает электрический ток ($I \neq 0$). Когда дрейф электронов происходит в том же направлении, в каком происходит распространение тепла, то в проводнике в дополнение к теплу, обусловленному теплопроводностью и джоулевым теплом, прибавляется (или из него вычитается при противоположном дрейфе) тепло, переносимое электронами (эффект Томсона), равное

$$Q_{\text{Т}} = K_{\text{т}} \cdot \Delta T \cdot I, \qquad (31,9)$$

где K_T — коэффициент эффекта Томсона, зависящий от материалов цепи. Применяя статистику Ферми — Дирака к свободным электронам в металле, можно рассчитать также число электронов, эмитируемых (испускаемых) в вакуум единицей поверхности ме-

талла за единицу времени. Распределение электронов по скоростям при

$$E = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \gg \varepsilon_\Phi,$$

согласно выражению (18,9), представится в виде

$$(dn)_{v_x, v_y, v_z} = 2\left(\frac{m}{n}\right)^3 \cdot e^{-\frac{\varepsilon - \varepsilon_\Phi}{kT}} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z. \quad (31,10)$$

Пусть ось x направлена по нормали к поверхности металла (рис. 31-6). На единицу поверхности металла за единицу времени попадут только электроны, заключенные в объеме цилиндра, образующая которого параллельна скорости электрона v. Если в единице объема металла общее число свободных электронов с компонентами скорости, лежащими в элементе области вблизи v_x, v_y, v_z, будет равно $(dn)_{v_x, v_y, v_z}$, то число таких электронов, которые достигнут поверхности металла, будет равно

$$d\nu = v_x (dn)_{v_x, v_y, v_z}. \quad (31,11)$$

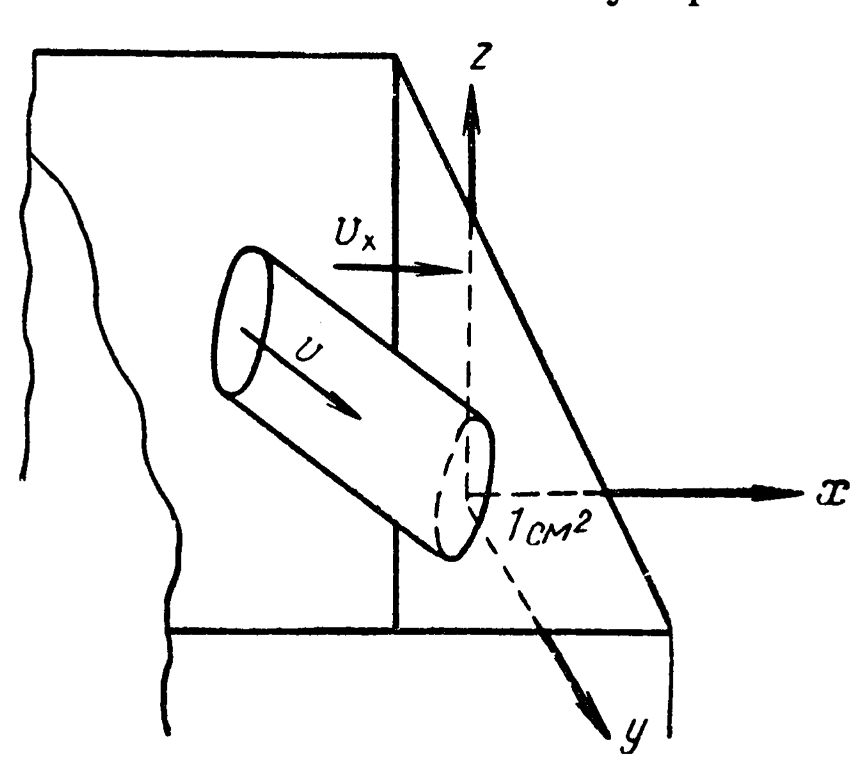


Рис. 31-6. К подсчету числа электронов, эмитируемых с единицы поверхности металла в единицу времени

Подставляя в формулу (31,11) значение $(dn)_{v_x, v_y, v_z}$ после интегрирования по всем значениям v_y, v_z в границах их изменений от $-\infty$ до $+\infty$ и по значениям v_x от $(v_x)_\text{а} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_\text{а}}{m}}$, где $\varepsilon_\text{а} = \varepsilon_\Phi + eU_\text{а}$ — полная работа выхода электрона из металла, до $v_x = \infty$, получаем, что плотность эмиссионного потока электронов

$$\nu = 2\left(\frac{m}{n}\right)^3 \cdot e^{\frac{\varepsilon_\Phi}{kT}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int\limits_{(v_x)_\text{а}}^{\infty} v_x e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \cdot dv_x. \quad (31,12)$$

Согласно уравнениям (15,16) и (15,17), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT} v_y^2} \cdot dv_y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT} v_z^2} \cdot dv_z = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}};$$

$$e^{\frac{\varepsilon_\Phi}{kT}} \int\limits_{(v_x)_\text{а}}^{\infty} v_x \cdot e^{-\frac{m}{2kT} v_x^2} \cdot dv_x = \frac{kT}{m} \cdot e^{\frac{-\varepsilon_\text{а} - \varepsilon_\Phi}{kT}} = \frac{kT}{m} e^{\frac{-eU_\text{а}}{kT}}.$$

Здесь $eU_\text{а} = 2 \div 5$ *эв* — работа выхода электрона из металла в ва-

куум. После подстановки значений этих интегралов в выражение (31,12) находим

$$\nu = \frac{4\pi m}{h^3} \cdot k^2 \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{eU_a}{kT}}; \qquad (31,13)$$

плотность эмиссионного тока насыщения

$$i = \nu e = A' \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{B}{T}} \qquad (31,14)$$

— формула Ричардсона — Дёшмэна.

Теоретическое значение постоянной $A' = 120$ *а* · *см*$^{-2}$ · *град*$^{-2}$ в действительности не сохраняется, так как при подсчете числа эмитируемых электронов (по 31,12) была использована классическая, а не волновая механика.

Учитывая частичное отражение электронных фазовых волн на границе «металл — вакуум», вместо величины A' в выражении (31,14) имеем $A = D \cdot A'$, где $D = (1 - r)$ — прозрачность поверхности металла для электронных волн, r — коэффициент отражения фазовых электронных волн де-Бройля от потенциального барьера на границе «металл — вакуум». Коэффициент A сильно зависит от рода металла и чистоты его поверхности. Например, для вольфрама $A = \frac{1}{2} A' = 60$ *а* · *см*$^{-2}$ · *град*$^{-2}$, а для вольфрама, покрытого пленкой бария, $A = 1{,}5$ *а* · *см*$^{-2}$ · *град*$^{-2}$.

Лекция 32

СВЕРХПРОВОДЯЩЕЕ СОСТОЯНИЕ МЕТАЛЛОВ

Температура и давление сильно влияют на состояние и структуру вещества. При очень высоких температурах порядка десятков тысяч градусов любое вещество находится в газообразном состоянии. При низких температурах все металлы и многие диэлектрики кристаллизуются. Температуры фазовых переходов чистых веществ являются температурными реперами.

Понижение температуры металла означает уменьшение амплитуды колебаний узлов кристаллической решетки и, следовательно, уменьшение электрического сопротивления.

На рис. 32-1 показаны три различных хода изменения сопротивления металла в области температур, близких к абсолютному нулю, ожидаемые по электронной теории. Кривая *1* соответствует случаю, когда сопротивление металла обусловлено исключительно рассеянием электронов на тепловых колебаниях узлов решетки, кривая *2* — когда рассеяние электронов в значительной мере происходит на примесях и дефектах решетки кристалла, кривая *3* — когда в области температуры, близкой к абсолютному нулю, в проводнике быстро уменьшается число свободных электронов проводи-

мости. Сплошными линиями показаны экспериментальные кривые, полученные в 1911 г. Камерлинг-Оннесом. Как видно, ртуть в узком температурном интервале 4,22—4,27° К полностью теряет электрическое сопротивление. Платина, по крайней мере до температуры $T = 0{,}07°$ К, не проявляет подобной потери сопротивления.

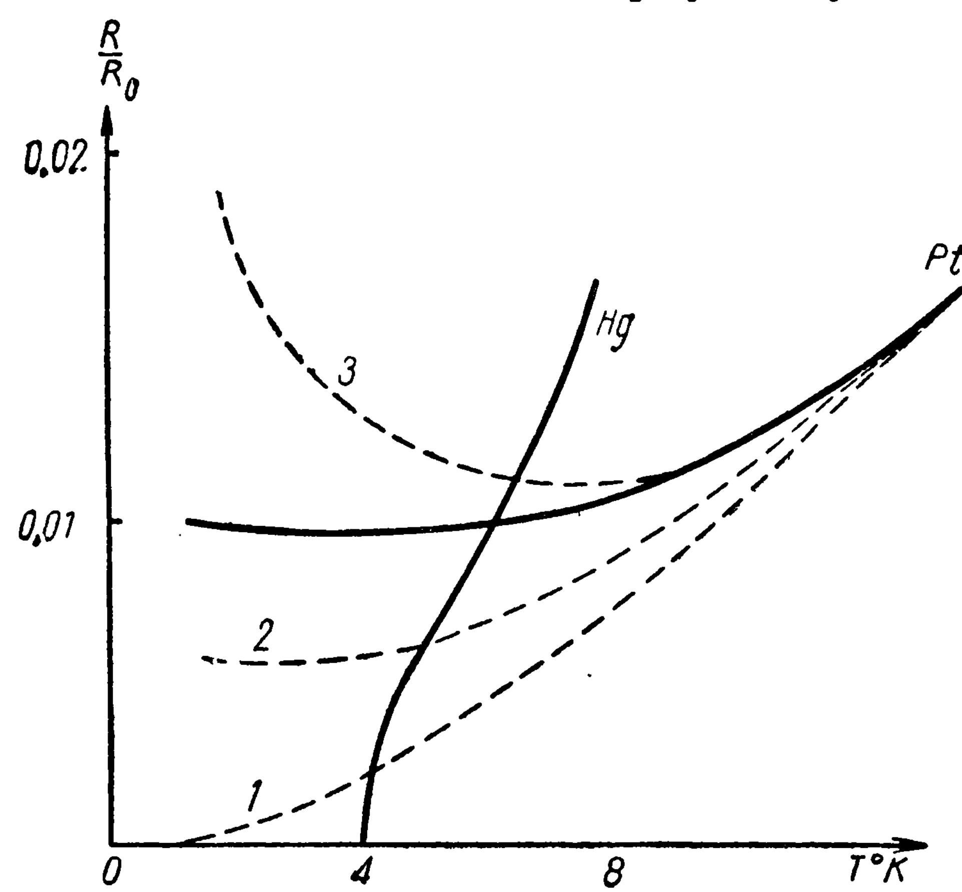


Рис. 32-1. Изменение сопротивления металлов при понижении температуры (R_0 — сопротивление при $t = 0°$ С).

Кривые *1*, *2*, *3* характеризуют изменение сопротивления по электронной теории проводимости металлов: Pt — для платинового образца (несверхпроводящего); Hg — для ртутного образца (сверхпроводящего)

В настоящее время известны двадцать три чистых металла и большое количество сплавов, переходящих в сверхпроводящие состояния. Критические температуры переходов в отсутствии внешних магнитных полей лежат в интервале температуры от $T = 0{,}155°$ К (для сплава Bi_2Pt) до $T = 18°$ К (для сплава $NbSn_3$).

Вместе с потерей электрического сопротивления исчезает и магнитная индукция внутри сверхпроводника (под поверхностным слоем толщиной 10^{-5} *см*). Признак $B = 0$ (эффект Мейснера), т. е. признак идеального диамагнетика, столь же характерен для сверхпроводящего состояния, как и условие $R = 0$. Увеличивая напряженность внешнего магнитного поля, можно разрушить сверхпроводящее состояние при данной температуре сверхпроводника, причем намагниченность быстро распространяется от поверхности внутрь образца металла (переходное состояние). Критическое значение напряженности H_c разрушающего магнитного поля зависит от рода рассматриваемого вещества и его температуры (рис. 32-2).

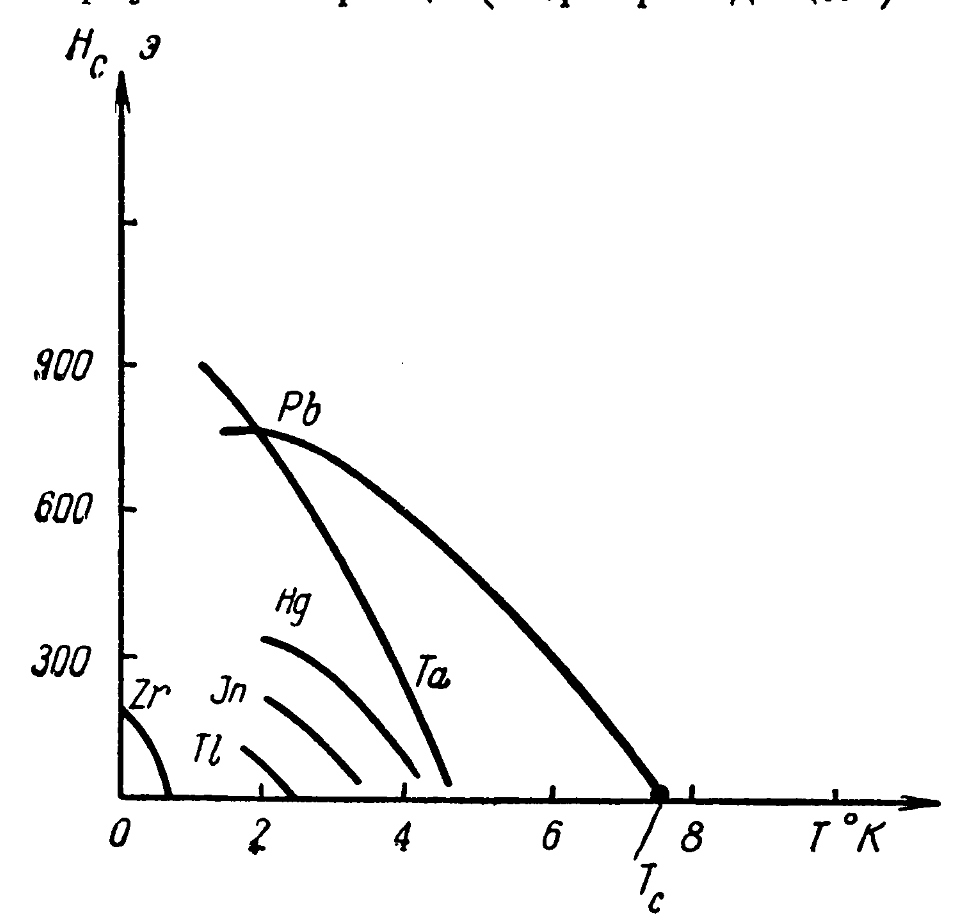


Рис. 32-2. Зависимости критической напряженности магнитного поля H_c от температуры сверхпроводящего состояния для ряда веществ (Pb, Hg, In, Tl — мягкие сверхпроводники)

Аналитически эта связь представляется уравнением параболы

$$H_c = H_0\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]. \qquad (32,1)$$

Для так называемых мягких сверхпроводников, к которым сводятся все металлы при достаточной их чистоте, наклоны кривых при $T = T_c$ составляют примерно 200 *э* на градус, так что, согласно выражению (32,1), $H_0 \approx 100\ T_c$. Сверхпроводящие металлы в таблице элементов Менделеева образуют две группы, в которые не входят одновалентные металлы и ферромагнетики. Удельное сопротивление металлов, входящих в группы сверхпроводящих элементов, при комнатных температурах больше, чем удельное сопротивление прочих металлов. Например, удельные сопротивления сверхпроводящих титана, циркония и гафния составляют при комнатных температурах соответственно (89,45 и 32) $\cdot\ 10^{-6}$ *ом·см*, а у несверхпроводящих элементов — меди, серебра и золота — соответственно (1,6; 1,5 и 2,4) $\cdot\ 10^{-6}$ *ом · см*. Среди сверхпроводящих сплавов имеются соединения, состоящие из несверхпроводящих элементов. При переходе в сверхпроводящее состояние структура решетки металла, оптические и фотоэлектрические свойства металла не изменяются, но исчезают все термоэлектрические эффекты. Сверхпроводящее состояние не возникает при очень высоких частотах тока $\nu > 10^7$ *гц* (рис. 32-3). При $\nu \approx 2 \cdot 10^{13}$ *гц* остаточное сопротивление оказывается не зависящим от температуры. Критическая температура сверхпроводника зависит от его изотопического состава. В общем случае изотопический эффект, заключающийся в изменении, описывается соотношением

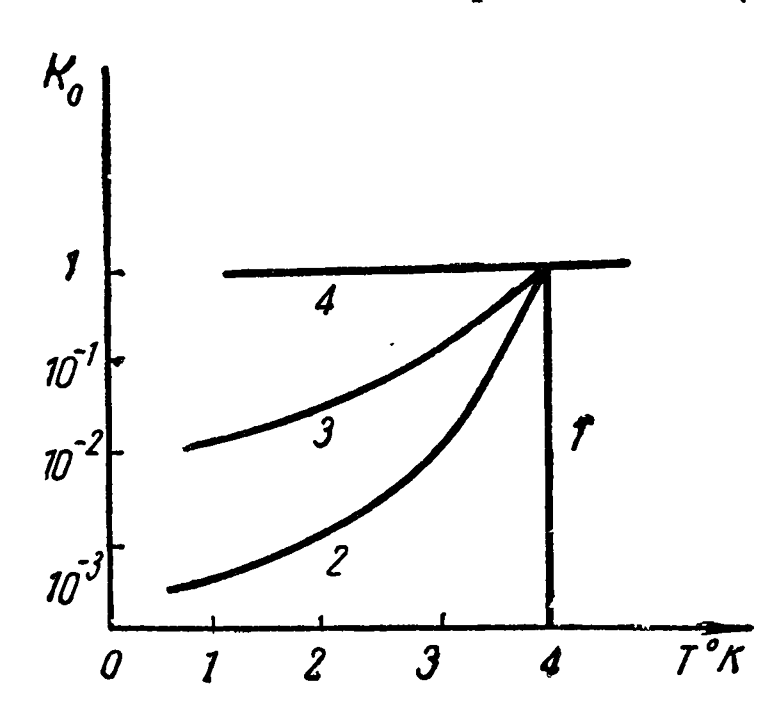


Рис. 32-3. Зависимость сопротивления сверхпроводящего металла от температуры при очень высокой частоте электрического тока (R_0 — сопротивление при $t = 0°$ C):

1 — наступает сверхпроводящее состояние ($\nu = 10^7$ *гц*); *2* ($\nu = 10^9$ *гц*) и *3* ($\nu = 10^{10}$ *гц*) сверхпроводимость отсутствует; *4* ($\nu = 2 \cdot 10^{13}$ *гц*) сверхпроводимости нет ($R = R_0 = \text{const}$).

$$A^{1/2} \cdot T_c = \text{const}, \qquad (32,2)$$

где A — атомный вес вещества. Так как температура Дебая $T_Д \sim A^{-1/2}$, то, следовательно,

$$\frac{T_c}{T_Д} = \text{const}, \qquad (32,3)$$

Соотношение (32,3) указывает на то, что сверхпроводимость связана со взаимодействием электронов и колебаний кристаллической

решетки; поэтому условие возникновения сверхпроводимости может быть выражено через удельное сопротивление ρ металла при комнатной температуре и число валентных электронов n в единице объема. В системе (а. э. е.) такое условие представляется в виде

$$n \cdot \rho \gtrless 10^6.$$

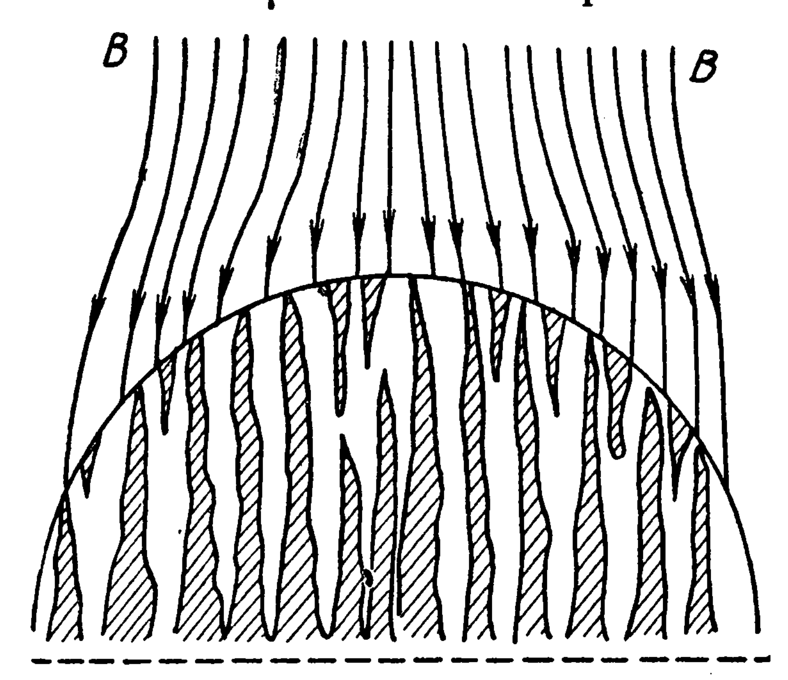


Рис. 32-4. Схематическое изображение слоистой структуры промежуточного состояния в оловянном шаре:

Пунктирная линия показывает положение индикатора в зазоре; B — линии магнитной индукции

Например, для несверхпроводящего натрия $n \cdot \rho = 0{,}14 \times 10^6$ (а. э. е.), а для сверхпроводящего свинца $n \cdot \rho = 3{,}1 \times 10^6$ (а. э. е.).

Промежуточное состояние сверхпроводящего вещества представляет смесь чередующихся сверхпроводящих и проводящих слоев, расположенных вдоль внешнего магнитного поля (рис. 32-4). На рис. 32-5 показана кривая отклонений индикатора намагниченности, который перемещался по диаметру поперечного зазора между полусферами сверхпроводящего олова, находящегося в промежуточном состоянии. Когда микроскопический датчик в виде висмутовой проволочки попадал в магнитное поле H_c ($B \gg 0$), т. е. в домен нормальной фазы, отклонение индикатора достигало верхней горизонтали *аа*; при попадании в сверхпроводящий домен ($B = 0$) отклонение отсутствовало (нижняя горизонталь *бб*). Таким образом, промежуточное состояние сверхпроводящего вещества было прослежено экспериментальным путем.

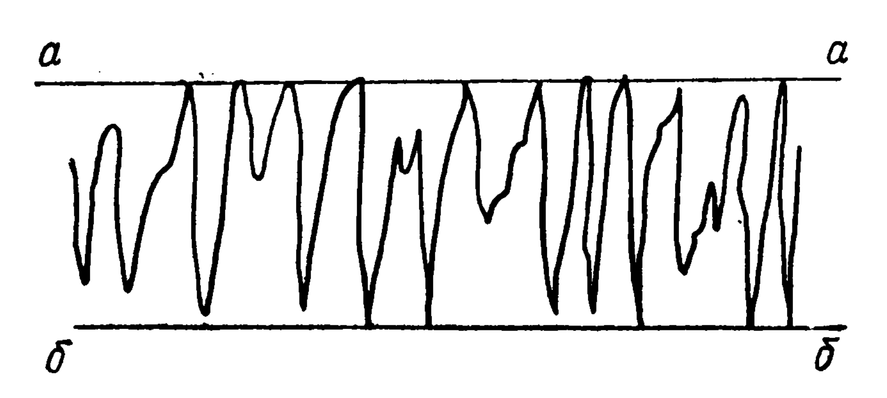


Рис. 32-5. Кривая отклонений индикатора при его положении против сверхпроводящей фазы состояния (магнитного поля нет)

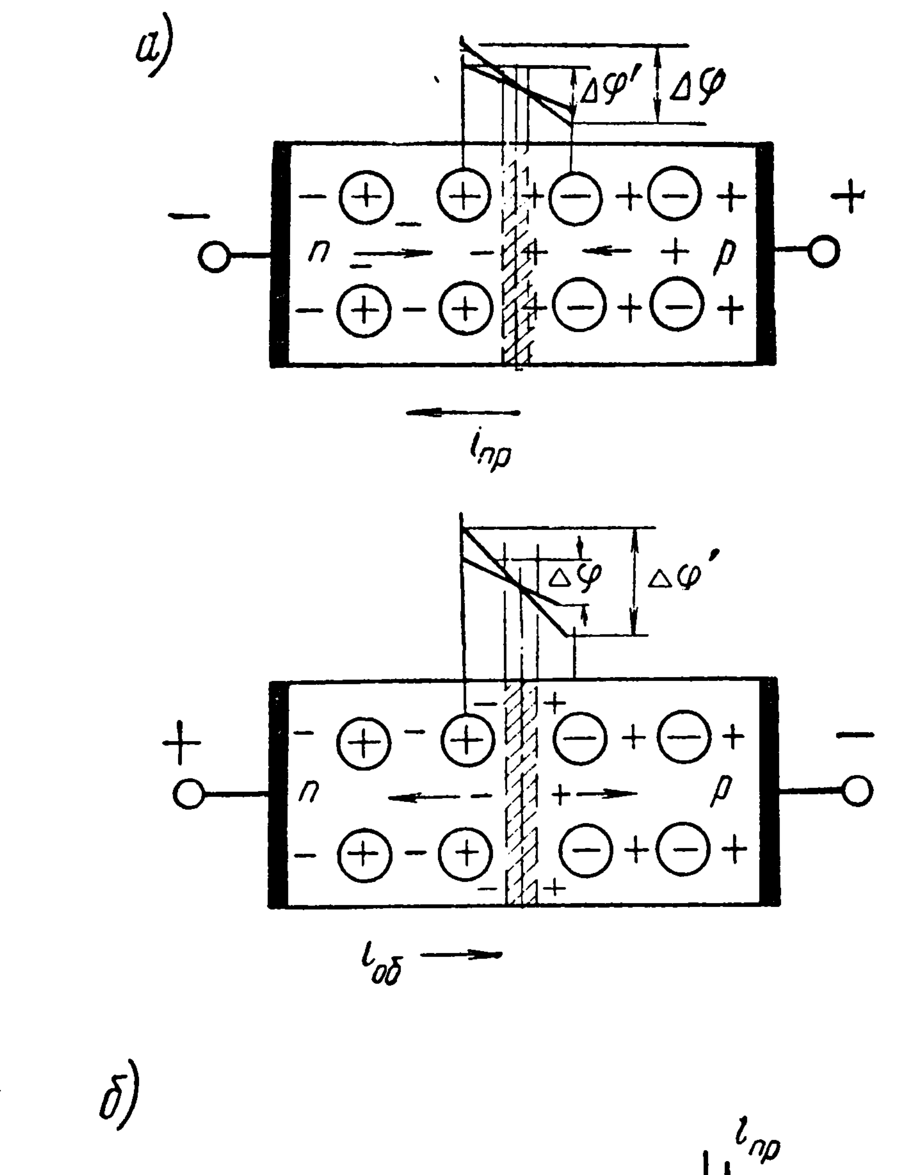
Лекция 33

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Полупроводниковые приборы, применяемые в электрических цепях, имеют четыре основных свойства: выпрямительные, термоэлектрические, фотоэлектрические и электропреобразовательные. Эти свойства объясняются наличием двух типов примесной проводимости полупроводников.

Для вентильного (выпрямительного) эффекта необходимо, чтобы в полупроводнике были созданы контактирующие p- и n-области.

Образующийся при этом p — n-переход определяет собой выпрямительное свойство. Вблизи контакта p- и n-областей проводимости ионов примесных атомов (доноров и акцепторов) в результате отталкивания носителей тока соседней области полупроводника образуется тонкий запорный слой, обедненный носителями тока (n- и p-центрами) (рис. 33-1). Толщина такого слоя зависит от удельного сопротивления полупроводникового материала и составляет $d \approx 10^{-7} \sqrt{\rho}$ *см* (ρ выражено в *ом · см*).



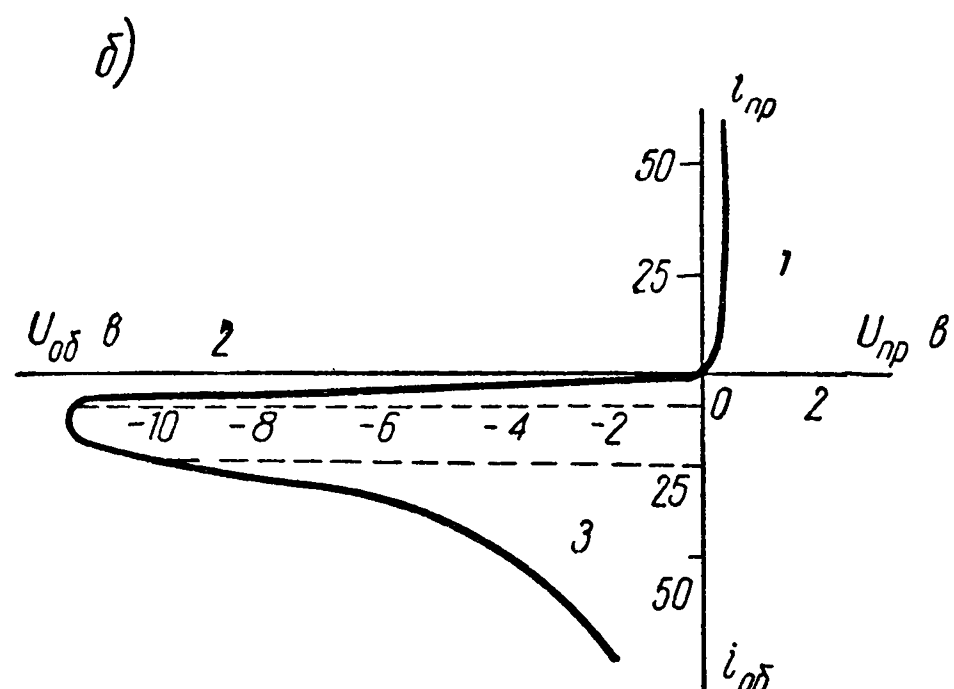


Рис. 33-1. Контактные явления в полупроводниковых диодах:

а) прямое и обратное протекание тока (кружками обозначены ионы атомов-донаров и акценторов, не участвующие в направленном перемещении; p-и n ($\pm$) — носители тока; $\Delta\varphi$ — скачок потенциала на границе n-p-проводимости; *б*) характеристика полупроводникового селенового диода: *1* — прямой примесный ток; *2* — обратный примесный ток; *3* — ток смешанной проводимости (для мощных кристаллических диодов $i_{пр} = 300$ *а/см²*, $U_{об} = 1000$ *в*)

На границе p- и n-областей проводимости имеется контактный скачок электростатического потенциала $\Delta\varphi$, отмеченный на рис. 33-1, *а*. Внешнее электрическое поле в зависимости от полярности включения полупроводникового диода с p—n-переходом либо уменьшает скачок потенциала на переходе, либо увеличивает его. В первом случае носители тока, двигаясь навстречу друг другу (в направлении к запорному слою), уменьшают его ширину и тем самым уменьшают сопротивление полупроводникового элемента электрической цепи (пропускная полярность, прямой ток), во втором случае, наоборот, отходят от запорного слоя, чем увеличивают его ширину и, следовательно, увеличивают сопротивление полупроводника (запорная полярность, обратный ток) (рис. 33-1, *б*).

При одной и той же небольшой разности потенциалов между электродами прямой ток в тысячи раз превышает обратный, так что

кристаллический полупроводниковый диод подобно кенотрону является эффективным выпрямителем переменного тока $\left(\frac{R_{об}}{R_{пр}} = \frac{1}{1000}\right)$.

Примесная проводимость имеет значение только при низких температурах. С повышением температуры свыше 100° С основное значение приобретает собственная проводимость полупроводников и их выпрямительные свойства уменьшаются. Чрезмерно большие плотности прямого тока (нагрев) и чрезмерно большие обратные разности потенциалов (пробой) приводят к порче полупроводникового диода.

Запорный слой образуется и при контакте металла с полупроводником примесной проводимости.

Свободная поверхность полупроводника, например n-типа проводимости, содержит электроны проводимости в особом равновесном поверхностном состоянии, которое определяется полем ионов атомов-доноров. Этот поверхностный заряд электростатически отталкивает электроны n-проводимости в глубь полупроводника, в результате чего поверхностный слой обедняется основными носителями тока.

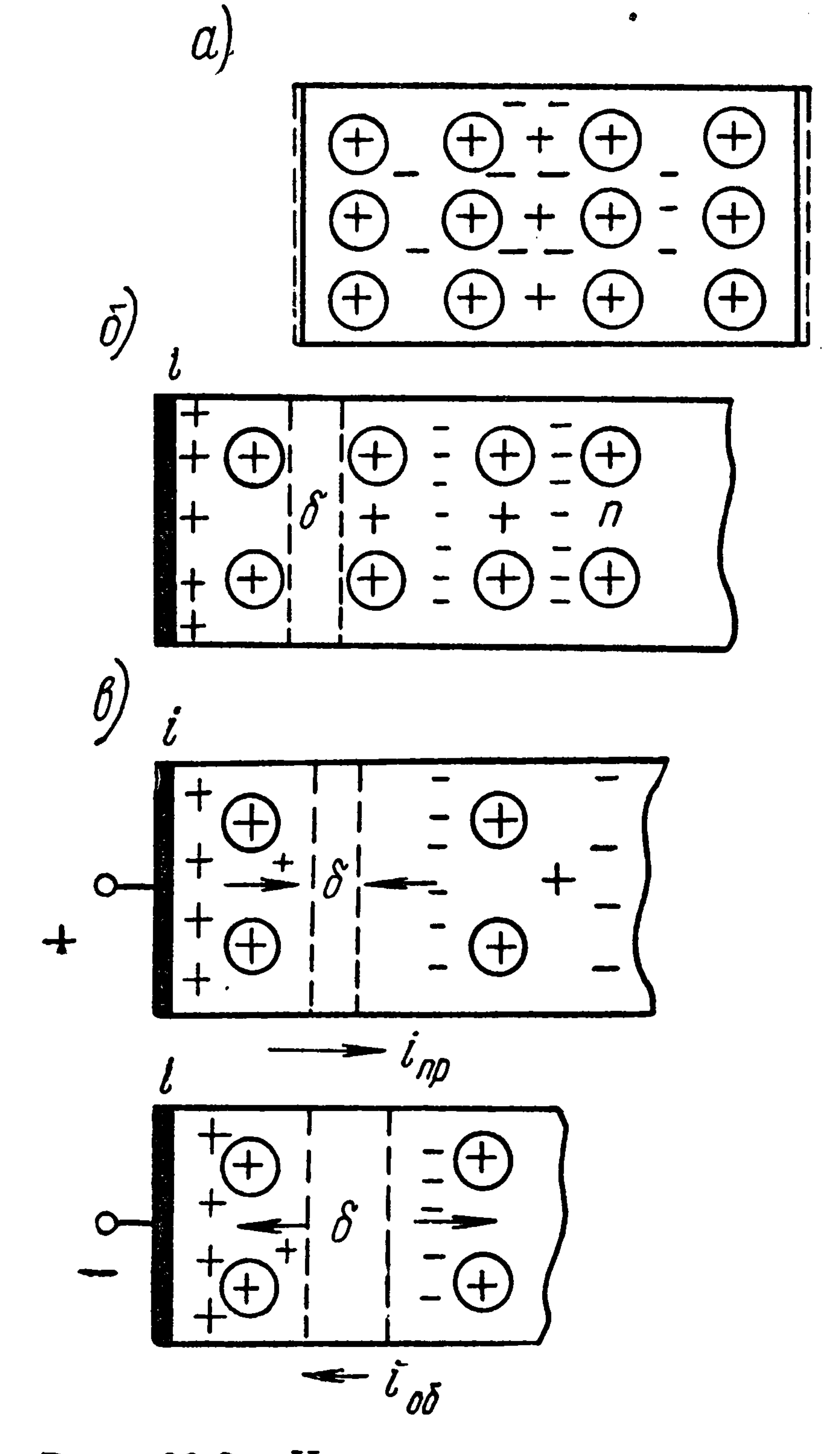


Рис. 33-2. Контактные явления на границе металл—полупроводники:
а) нейтральная поверхность полупроводника n-типа (поверхностное состояние электронов проводимости); *б*) образование запирающего слоя δ; *в*) полярность, уменьшающая сопротивление запирающего слоя (прямое направление), и полярность, увеличивающая его (обратное направление)

При контакте с металлом в результате обмена электронами носители тока переходят с поверхности полупроводника, где их потенциальная энергия больше, в металл, где она меньше, до тех пор, пока не будет уравновешена разность контактных потенциалов соприкасающихся сред. Положительный электростатический заряд в полупроводниках с n-проводимостью обусловлен имеющимися в обедненном слое примесными ионами и p-центрами собственной проводимости. Таким образом, поверхностное состояние на границе металл — полупроводник характеризуется скачком потенциала, подобным p — n-переходу (рис. 33-2, *б*). Сопротивление

контактного запорного слоя зависит от размеров металлического электрода и характерной для него контактной разности потенциалов. Запорные слои нередко создаются искусственным путем, например, путем химических реакций (меднозакисные и селеновые выпрямители) или путем нанесения тонкого слоя изолятора (шеллака) между металлом и полупроводником. Полупроводниковые выпрямители получили широкое применение в технике (радиоэлектроника, радиотехническая промышленность, строительство).

Термоэлектрические свойства полупроводников используются для создания термосопротивлений, термисторов и термоэлементов.

Сопротивление однородного полупроводника в сильной мере зависит от температуры. Если N будет общим числом тех электронов в единице объема полупроводника, которые могут быть переведены в электроны проводимости (т. е. N — объемная концентрация или валентных электронов, или примесных атомов), то, используя классическую статистику и обозначая через ε энергию активации проводимости, получаем, что число ежесекундно образуемых электронов проводимости

$$z_1 = \alpha N e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \qquad (33,1)$$

число ежесекундно рекомбинирующих n- и p-центров

$$z_2 = \beta n_1^2, \qquad (33,2)$$

где n_1 — объемная концентрация носителей тока.

Установившийся режим характеризуется условием $z_1 = z_2$ и, значит,

$$n_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta} N\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{2kT}}. \qquad (33,3)$$

Как видно, концентрация носителей тока быстро возрастает при повышении температуры. Так как подвижность b носителей тока убывает с температурой значительно медленнее, то при $\varepsilon \gg 2kT$ можно принять, что удельная проводимость полупроводника

$$\sigma = n_1 e b = \sigma_0 e^{-\frac{\varepsilon}{2kT}}, \qquad (33,4)$$

или

$$R_T = \rho_\infty \frac{l}{S} e^{+\frac{\varepsilon}{2kT}} = A e^{+\frac{B}{T}}. \qquad (33,5)$$

Здесь $A = \rho_\infty \frac{l}{S}$ и $B = \frac{\varepsilon}{2k}$. Из выражения (33,5) имеем (рис. 33-3)

$$\ln R_T = \ln A + B\frac{1}{T}. \qquad (33,6)$$

Пользуясь равенством (33,6), для двух температур полупроводника T_1 и $T_2 > T_1$ получим

$$B = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln\frac{R_{T_1}}{R_{T_2}} = \operatorname{tg}\beta. \qquad (33,7)$$

По найденному значению B (2900° K) могут быть определены энергия активации ε и удельное сопротивление [см. (33,5), (33,6)] полупроводника, обусловленное его собственной проводимостью, т. е. найдены два важнейших характеристических параметра полупроводника.

После дифференцирования уравнения (33,5) находим, что температурный коэффициент сопротивления полупроводника, равный

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT} = -B\frac{1}{T^2} = \alpha(T), \qquad (33,8)$$

является отрицательной величиной, зависящей от температуры.

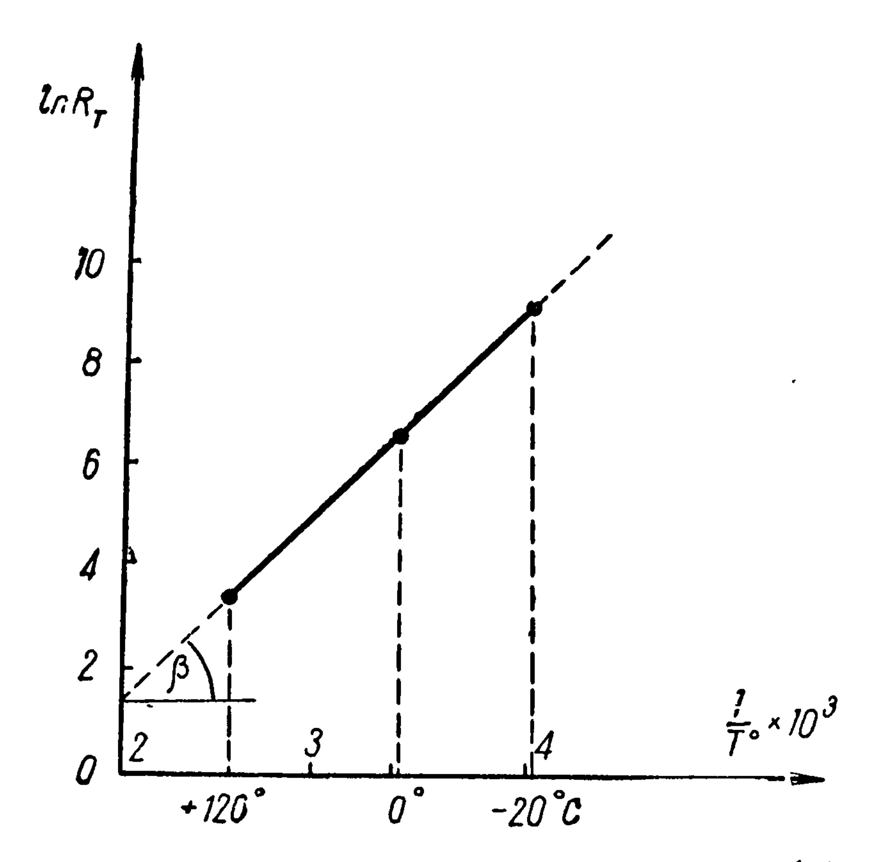


Рис. 33-3. Зависимость $\ln R_T = f\left(\frac{1}{T}\right)$ для полупроводника

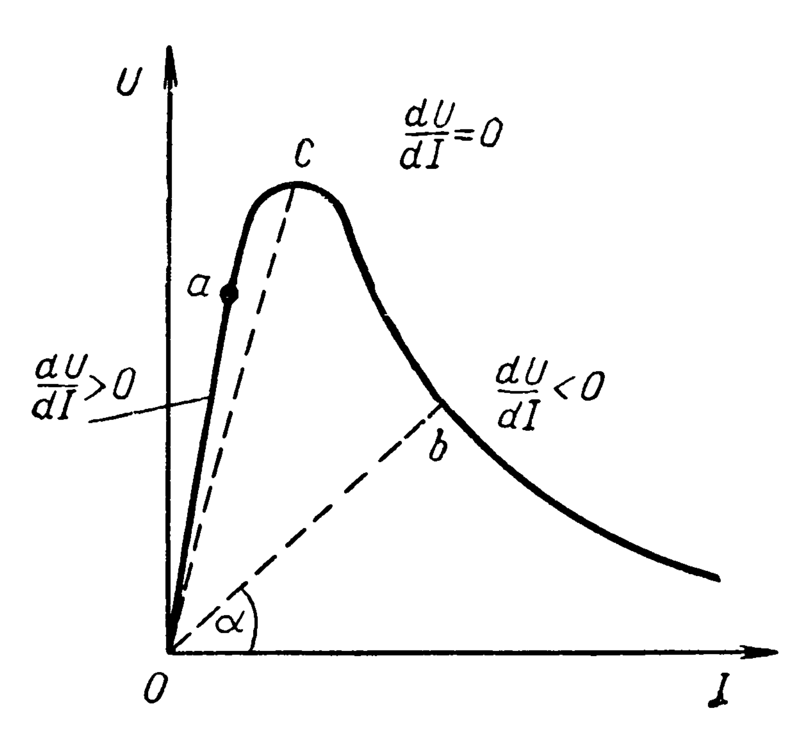


Рис. 33-4. Статическая вольтамперная характеристика полупроводника.

В электротехнике используются обе ветви характеристики: *Oa* — в приборах для электрических измерений температур и *cb* — в приборах для автоматической стабилизации режимов в электрических цепях

Полупроводниковое сопротивление в цепи тока не остается неизменным, но убывает по мере нагревания полупроводника током. Таким образом, термосопротивление зависит от тока и, значит, является нелинейным сопротивлением.

На рис. 33-4 показана типовая статическая вольтамперная характеристика полупроводникового сопротивления (электрическая характеристика при установившемся теплообмене). Для проводников, обладающих линейной характеристикой, сопротивления статическое $R_{ст} = \frac{U}{I}$ и дифференциальное $R_{диф} = \frac{dU}{dI}$ одинаковы (пунктирные линии *Oc* и *Ob*). Нагрев проводника током вызывает незначительное увеличение его сопротивления. При нагреве полупроводника током сопротивление его резко убывает (возрастает концентрация носителей тока); вольтамперная характеристика при этом перестает быть линейной и становится падающей. На участке *Oa* кривой

(см. рис. 33-4) сохраняется линейность вольтамперной связи и, значит,

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I} = R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} > 0.$$

В точке c дифференциальное сопротивление отсутствует, так как в ней $\frac{dU}{dI} = 0$; в точке b оно отрицательно, так как $\frac{dU}{dI} < 0$.

Вольтамперная характеристика зависит не только от характеристических параметров полупроводника, но и от условий теплообмена, что осложняет эксплуатацию полупроводниковых приборов. Нелинейность полупроводниковых сопротивлений широко используется в измерительных (линейный участок Oc), регулировочных и автоматических устройствах (спадающая ветвь характеристики).

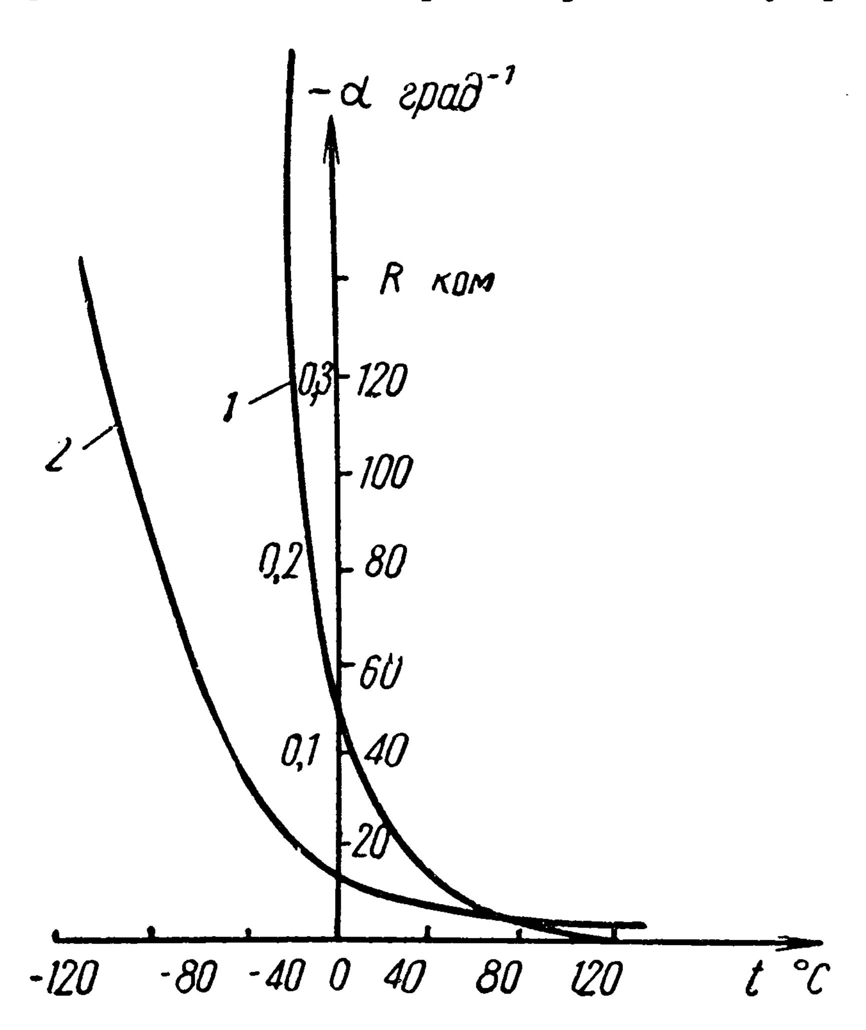


Рис. 33-5. Зависимости $R = R(T)$ и $\alpha = \alpha(T)$ для полупроводника

Из графика изменения сопротивления полупроводника в зависимости от температуры (рис. 33-5, кривая *1*) вытекает возможность использования полупроводников в качестве высокочувствительных термометров сопротивления (термисторов).

На рис. 33-5 приведен также график изменения температурного коэффициента сопротивления термистора (кривая *2*) в зависимости от температуры, вычисленного по формуле (33,8) при значении $B = 2900°$ K.

Термосопротивления изготовляются из оксидных полупроводников с использованием окислов металлов средней группы ($Z = 22 \div 29$). Они имеют форму стержней, дисков и бусинок. Формовка изделия производится плавлением, испарением и спеканием. Термисторы применяются обычно как датчики в схемах дистанционных измерений электрическими методами неэлектрических величин, таких, как температура, влажность, состав и скорость движения газовых смесей, а также как температурные компенсаторы сопротивления в электрических цепях.

Наличие двух типов проводимости в полупроводниках вносит значительные изменения и в такие термоэлектрические эффекты, как явления Зеебека, Пельтье и Томсона. При нагревании полупроводников возрастает не только средняя кинетическая энергия беспорядочного движения носителей тока, но и их количество. В ре-

зультате диффузии носителей тока от горячего слоя к холодному горячие концы полупроводников n-типа будут обеднены электронами (заряжаются положительно), а полупроводников p-типа, наоборот, обогащены ими (заряжаются отрицательно). В термопарах из полупроводников с разным типом проводимости (рис. 33-6) термоэлектродвижущие силы, возникающие на горячих и холодных спаях (явление Зеебека), оказываются включенными в цепь не встречно, как у проводниковых термопар, а последовательно, так что

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)(T_1 - T_0), \qquad (33,9)$$

где α_1 и α_2 $\left(\text{в } \frac{мкв}{град}\right)$ — коэффициенты Зеебека соответствующих ветвей полупроводниковой термопары.

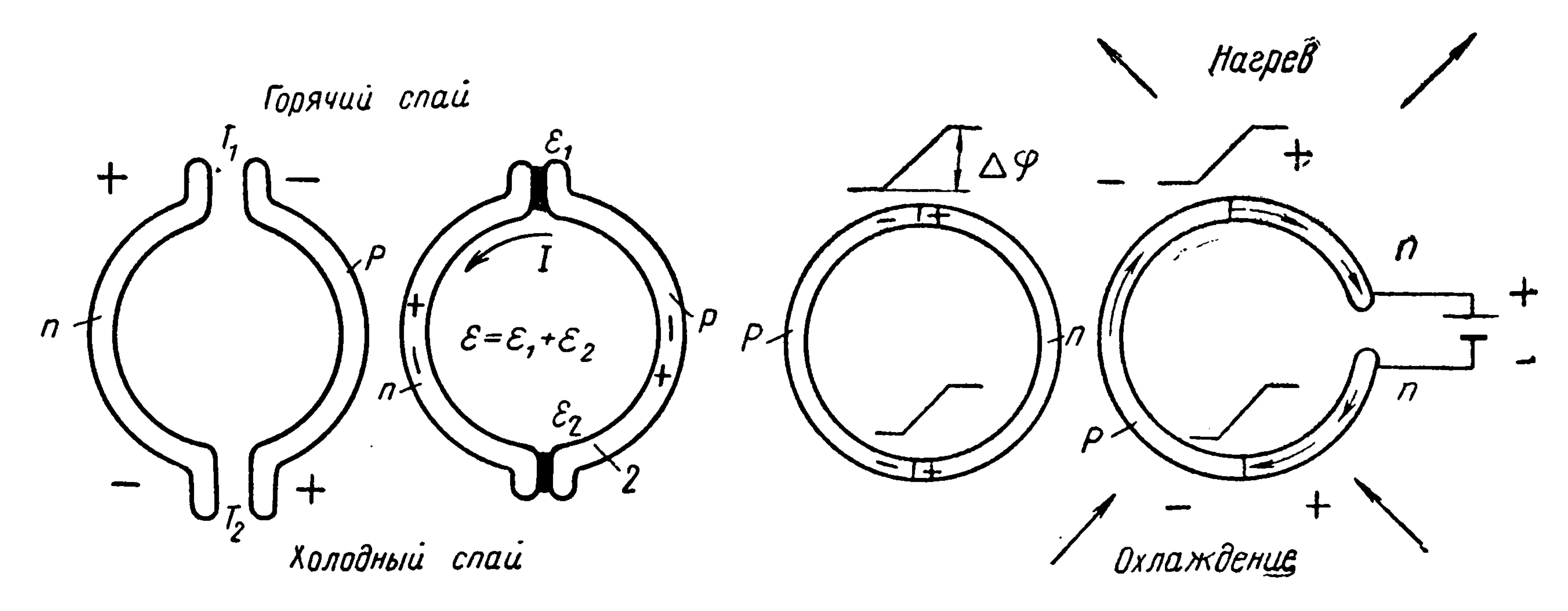


Рис. 33-6. Полупроводниковая термопара (явление Зеебека)

Рис. 33-7. Полупроводниковые пары (явление Пельтье)

Термоэлектродвижущие силы полупроводниковых термопар могут в десятки и больше раз превышать те же величины у металлических термопар при одинаковом перепаде температур. Как было показано (рис. 33-1), на p — n-переходах возникает скачок потенциала $\Delta\varphi$ (рис. 33-7). При протекании тока в цепи полупроводниковой пары один из этих скачков будет увеличивать кинетическую энергию электронов, дрейфующих поступательно, в направлении от отрицательного к положительному потенциалу источника, а другой — уменьшать ее. В первом спае будет выделяться тепло, добавочное к джоулеву и равное $+\Delta Q$, во втором возникает недостаток этого тепла — ΔQ. Первый из рассматриваемых спаев отдает тепло в окружающую среду (нагреватель), а второй отбирает тепло из окружающей среды (холодильник). Явление Пельтье имеет обратимый характер: при изменении направления протекания тока холодильный спай становится спаем нагревательным.

Основным параметром, характеризующим холодильную машину, является отношение количества тепла Q_0, отнимаемого в единицу

времени от охлаждаемого объема, к мощности P, затрачиваемой на работу машины, т. е.

$$\eta_x = \frac{Q_0}{P}. \qquad (33,10)$$

Чтобы определить Q_0, обозначим ежесекундный приток тепла по ветвям термоэлемента через $Q_т = K(T_0 - T_1)$, где k— коэффициент теплопроводности, $T_0 = \text{const}$ — температура спая с избыточным выделением тепла Пельтье; тогда

$$Q_0 = Q_П - Q_T = \pi I - \left[\frac{1}{2} I^2 R + K(T_0 - T_1)\right]. \qquad (33,11)$$

Расходуемая мощность P складывается из мощности P_R, затрачиваемой на преодоление сопротивления току, и мощности $P_т$, расходуемой на преодоление термоэлектродвижущей силы. Поэтому

$$P = P_R + P_Т = I\,[IR + (\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T_1)]. \qquad (33,12)$$

После подстановки найденных значений Q_0 и P в формулу (33,10) и после нахождения экстремума функций $\eta_x = \eta_x(I)$ получим максимальное значение холодильного к. п. д. при заданных T_0 и T_1 и с учетом эффекта Томсона в виде

$$(\eta_x)_{макс} = \frac{T_1}{T_0 - T_1} f(z), \qquad (33,13)$$

где $z = \frac{\bar{\alpha}^2}{\rho K}$. При этом $\bar{\alpha}$ — среднее значение коэффициента Зеебека в заданном интервале температур $T_0 - T_1$; ρ — удельное сопротивление ветвей термоэлемента. Для упрощения предположено, что сечения протяженности электро- и теплопроводных ветвей одинаковы, а коэффициенты Зеебека отличаются только знаком.

При возрастании фактора z значения $f(z)$ стремятся к 1, а максимальное значение холодильного к. п. д. — к своей предельной величине

$$\eta = \frac{T_1}{T_0 - T_1},$$

соответствующей идеальной холодильной машине.

Фактор z возрастает с увеличением соотношения между подвижностью носителей тока и теплопроводностью кристаллической решетки. Наиболее благоприятно это соотношение для кристаллических веществ с промежуточным типом решеток между атомными, ионными и металлическими.

Концентрация носителей тока в полупроводниках может изменяться также с помощью внешних воздействий, например с помощью облучения полупроводника. Если энергия частиц в потоке излучения (например, энергия γ-квантов), поглощаемого полупроводником, так же, как и энергия других проникающих в полупроводник частиц, передаваемая электронам полупроводника, превышает ра-

боту перевода электрона из зоны связей в зону проводимости, или работу перевода электрона с уровней донорной примеси на уровни зоны проводимости (образование *n*-центра и положительного иона в решетке), или, наконец, работу перевода электрона из зоны уровней связей на уровни акцепторной примеси (образование *p*-центра и отрицательного иона), то во всех этих случаях возрастает проводимость полупроводника. Высокая чувствительность полупроводниковых фотосопротивлений, возможность достижения их линейной характеристики (постоянство чувствительности α_λ, выраженной в $\frac{мка}{лм}$) и применимость их для любой избранной спектральной области электромагнитных излучений (при незначительной инерциальности действия) обусловили широкое использование фотосопротивлений в фотометрии и дозиметрии излучений. Фотосопротивления изготовляют обычно в виде тонких полупроводниковых слоев (например, слоев селена, сернистого свинца, сернистого кадмия, сернистого висмута), наносимых на подложку испарением в вакууме. Их темновое сопротивление составляет $10^4 \div 10^7$ *ом*. Наличие скачка потенциала на границе соприкосновения полупроводников *p*- и *n*-типов (*p* — *n*-перехода) позволяет непосредственно преобразовать поглощаемую электромагнитную энергию излучений в электромагнитную же энергию направленного дрейфа носителей тока, т. е. использовать фотоэлемент как источник питания электрических цепей. Если при поглощении квантов излучения $h\nu$ в области *p* (рис. 33-8) и *n* основных носителей возникнут новые пары *n*-, *p*-носителей, то под действием поля положительных ионов примеси в *n*-области неосновные *p*-носители будут направляться в *p*-область, и точно так же под действием поля отрицательных ионов примеси в *p*-области неосновные *n*-носители будут направляться навстречу в *n*-область. Процесс стабилизируется после образования разности потенциалов с отрицательной полярностью на *n*-области и положительной на *p*-области. Разность потенциалов будет поддерживаться во все время воздействия на фотоэлемент квантами излучения.

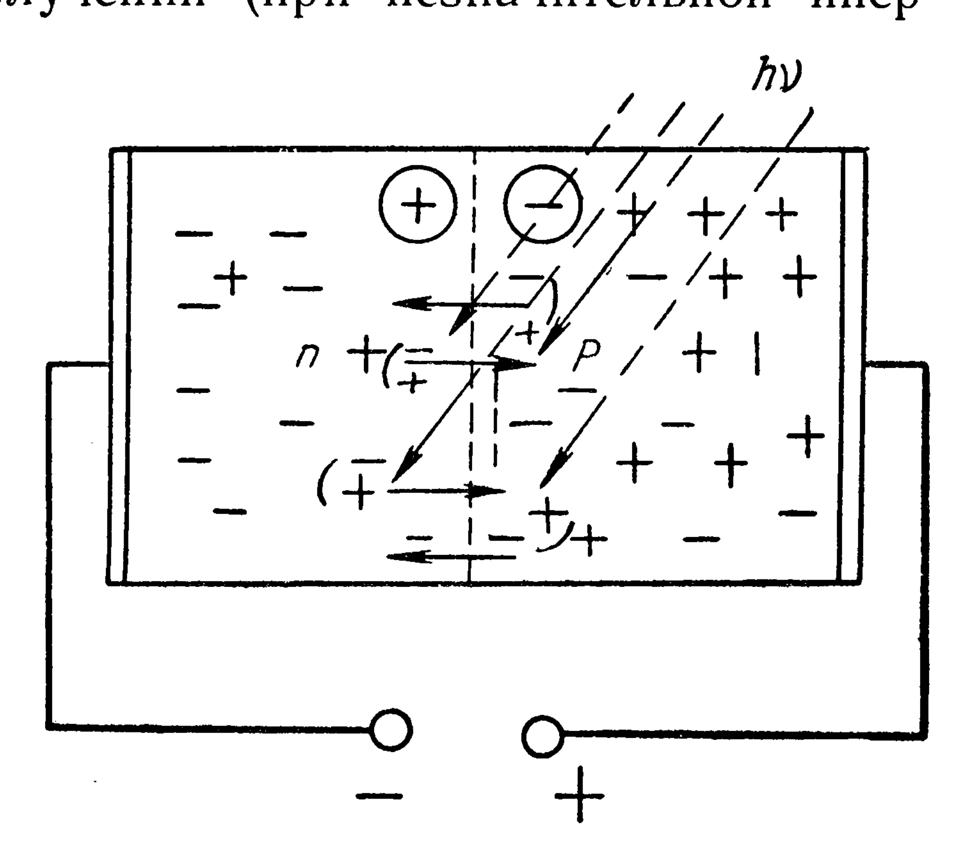


Рис. 33-8. Схема возбуждения фотоэлектродвижущей силы в полупроводниковом фотоэлементе

Вентильные фотоэлементы являются генераторами электродвижущей силы, вследствие чего получили широкое применение в переносных фотометрических устройствах (экспонометры) на спутни-

ках Земли и космических кораблях. На рис. 33-9 показаны схема и спектральная характеристика используемого в объективной фотометрии вентильного селенового фотоэлемента.

На космических кораблях устанавливаются кремниевые солнечные батареи, имеющие к. п. д. порядка 5 ÷ 10% и практически неограниченный срок службы. Кремниевые фотоэлементы допускают получение в ясный день на уровне моря электрической мощности до 50 *вт* с 1 *м*² облучаемой поверхности.

Полупроводниковые фотоэлементы применяются также в промышленности, на транспорте и в технике связи (датчики сигналов). Свойства полупроводниковых диодов в отношении вентильного дей-

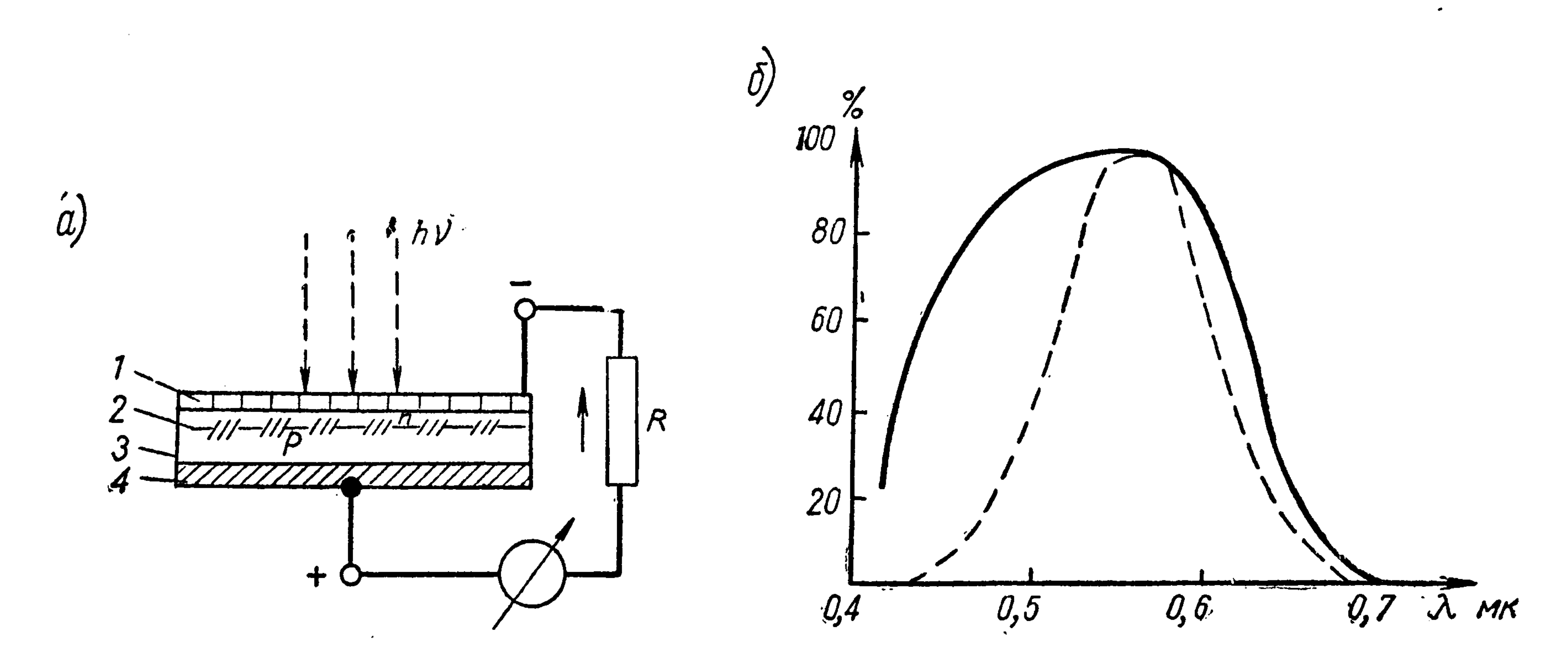


Рис. 33-9. Схема устройства селенового фотоэлемента (*а*) и спектральная характеристика (*б*) селенового фотоэлемента без корректирующего фильтра (пунктирной кривой показана спектральная чувствительность среднего человеческого глаза):

1 — полупрозрачный слой Au; *2* — запорный слой; *3* — слой Se толщиной 0,1 *мм*; *4* — основа (Fe)

ствия аналогичны свойствам электровакуумных диодов (кенотронов). Полупроводниковые кристаллические триоды (транзисторы) *, тетроды или пентоды, являются аналогами соответствующих электронных ламп. Принцип действия транзисторов удобнее всего выяснить на примере точечно-контактных триодов (рис. 33-10). Электрод *Э*, называемый эмиттером, полупроводник *n*-типа, металлический базовый электрод Б и источник питания $E_э$ образуют входной контур тока. Эмиттер через точечный контакт имеет положительную полярность относительно базы и, следовательно, ток эмиттера является прямым током. Благодаря поверхностному электронному заряду и значительной напряженности поля у острия вблизи точечного контакта эмиттера образуется небольшая область полупроводника *p*-типа. Этот процесс в транзисторах называют инъекцией

* От английских слов transfer resistor — преобразователь сопротивлений.

p-центров в полупроводник. В непосредственной близости (25÷÷50 *мк*) к точечному контакту эмиттера располагается еще один точечный контакт, называемый коллектором *К*. Этот электрод имеет отрицательный потенциал относительно базового электрода, так что ток коллектора в выходном контуре, питаемом батареей $E_к$, является обратным током.

Если во входном контуре будут возбуждаться импульсы, изменяющие разность потенциалов между эмиттером и базой, то будут соответственно изменяться p-область эмиттера, концентрация в ней p-центров и ток, протекающий от эмиттера к коллектору. Таким

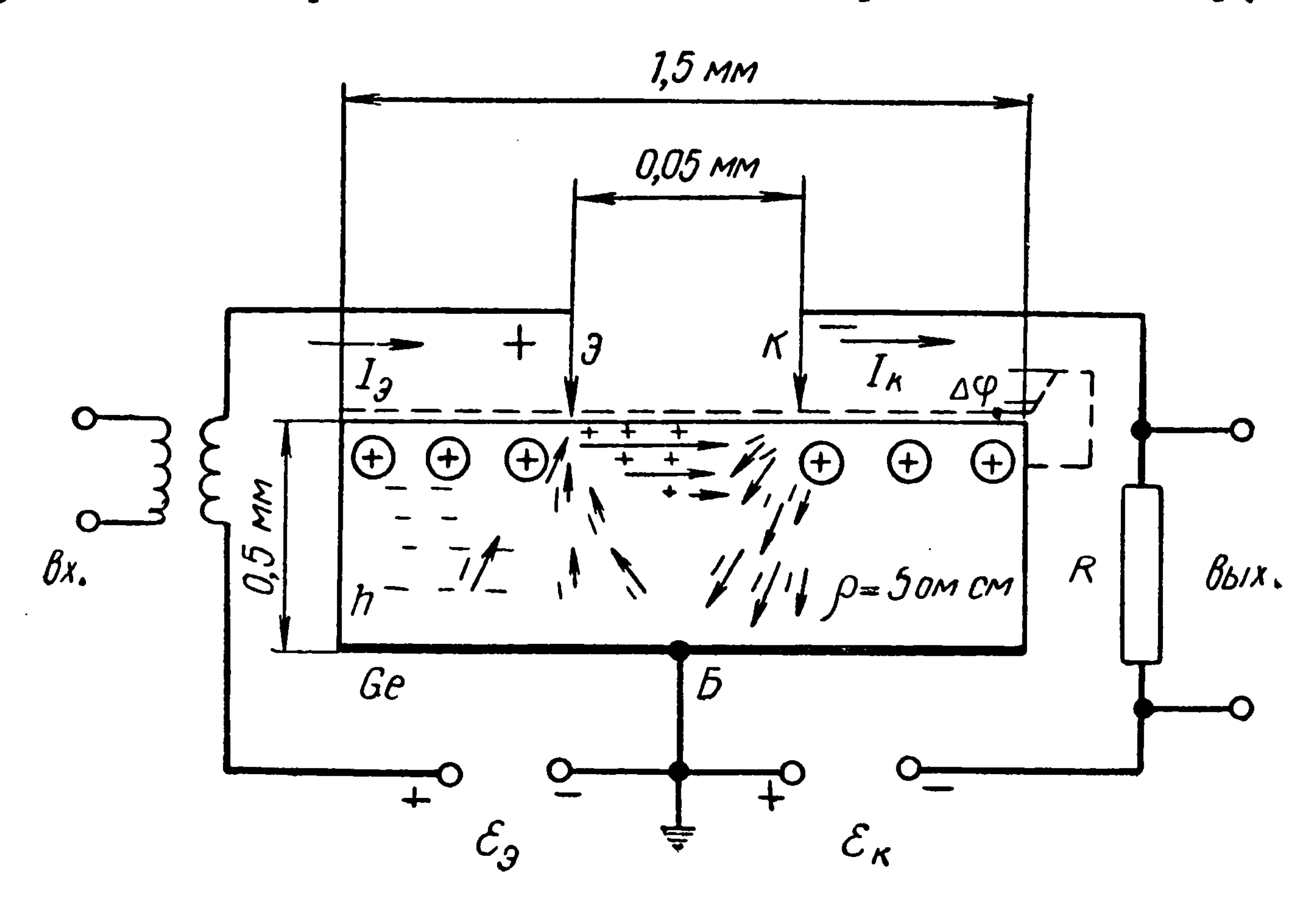


Рис. 33-10. Схема принципа действия точечно-контактного германиевого транзистора.

Кружками условно обозначены ионы примесных атомов-донаров, рассеянные по всему германиевому n-полупроводнику. Эмиттер *Э* p-носителей тока включен в пропускном направлении; коллектор *К* — в запорном, увеличивающем поверхностный скачок потенциала Δφ. Базовый электрод *Б* имеет малое переходное сопротивление.

образом, изменение потенциала базового электрода относительно эмиттера изменяет ток коллектора (коллектор является аналогом анода в лампе-триоде), поскольку (см. рис. 33-10)

$$I_к = I_{об} + I_р.$$

Усиление по току определяется как $\frac{\Delta I_к}{\Delta I_э}$; усиление по напряжению — как $\frac{\Delta I_к}{\Delta I_э} \cdot \frac{r_{вых}}{r_{вх}}$, где r — обозначения сопротивлений соответствующих контуров тока и, наконец, усиление по мощности сигнала как отношение мощности выходного сигнала к мощности сигнала на входе. Для увеличения усиления по мощности вместо точечно-контактных транзисторов применяют плоскостные триоды, например $p — n — p$-типа (рис. 3٥-٠1).

Принцип действия плоскостных кристаллических полупроводниковых триодов аналогичен принципу действия точечно-контактных, но отличается тем, что *p*-область не создается контактом эмиттера, а содержится в полупроводнике; *n*-область не рассредоточена, а, наоборот, сосредоточена в узком слое (25 *мк*) и, кроме эмиттерного *p* — *n*-перехода, имеется второй, коллекторный *n* — *p*-переход. Носители тока *p*-области (*p*-центры) направляются полем питающих батарей в базовую *n*-область. При преодолении потенциального барьера эмиттерного перехода, часть *p*-центров, неподвергнувшаяся в базовом слое рекомбинации с *n*-центрами, разгоняется на коллекторном *n* — *p*-переходе и создает ток коллектора. Для улучшения характеристик транзисторов осуществляют четырехэлектродные полупроводниковые транзисторы (тетроды) и триоды с добавочными переходами, например *p-n-p-n*-типа, или с областями *i* собственной

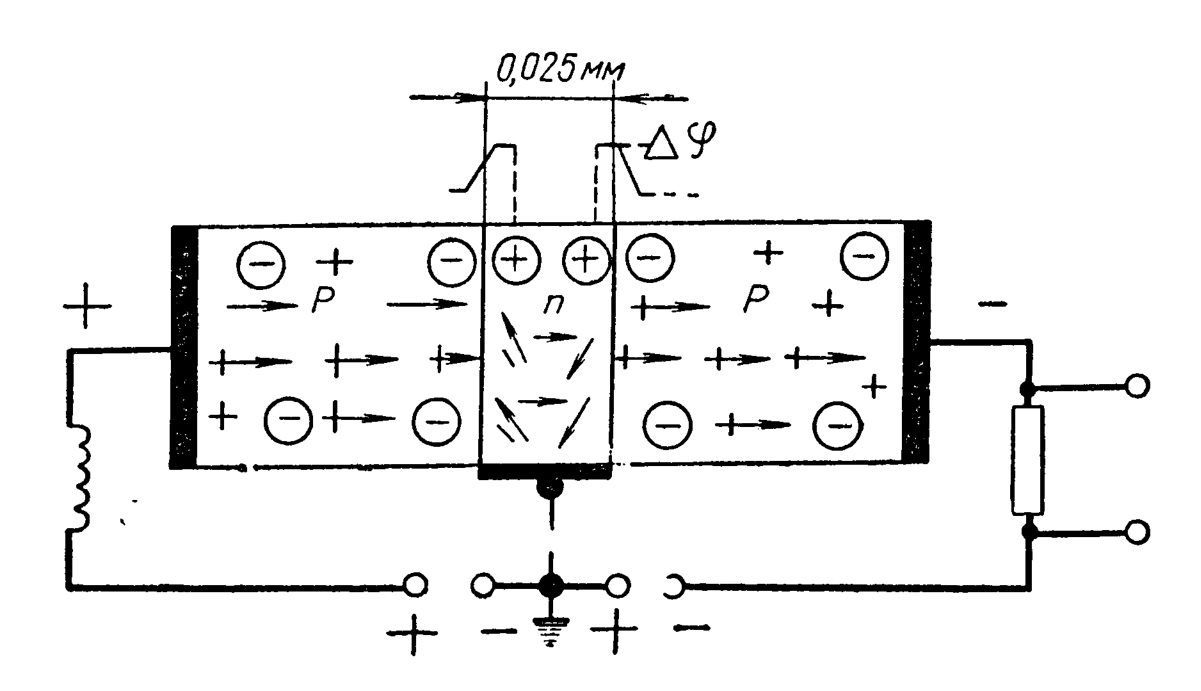


Рис. 33-11. Схема принципа действия плоскостного *p-n-p* -транзистора

проводимости (*p-n-i-p* -типа). В любом полупроводниковом приборе при передвижении носителей тока из одной области проводимости в другую неизбежно происходит рекомбинация *n* — *p*-центров.

Чтобы *p*-центры могли достичь коллекторного электрода, обычно время их жизни должно быть не менее 10^{-4} *сек*. Время жизни носителей тока зависит от метода изготовления образца и совершенства примененного кристалла; оно является существенной характеристикой полупроводника, как и концентрация, и подвижность носителей тока, удельное сопротивление материала и постоянная Холла. Обычно, чем меньше удельное сопротивление полупроводника, тем меньше время жизни носителей тока в нем.

По сравнению с электровакуумными радиолампами, транзисторы обладают рядом преимуществ: занимают в сотни раз меньший объем, имеют в сотни раз меньший вес, потребляют в десятки раз меньшую мощность, выполняют многие функции радиолампы; имеют большую механическую прочность и практически неограниченный срок службы.

Лекция 34

ТЕРМОЭЛЕКТРОННЫЙ ТОК В ВАКУУМЕ

Свободные электроны в металле находятся в беспорядочном тепловом движении атомов вещества. При комнатных температурах в этом движении согласно квантовой статистике Ферми — Дирака участвует несколько процентов (3%) всех электронов проводимости; с повышением температуры наряду с возрастанием кинетической энергии электронов будет увеличиваться и число электронов, участвующих в тепловом движении. Таким образом, возрастает вероятность выхода электронов из металла в вакуум. Согласно выражениям (31,13) и (31,14), для предельно возможного тока насыщения термоэлектронной эмиссии при заданной температуре катода имеем

$$I_{нас} = \nu \cdot e \cdot S = A \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{B}{T}} \cdot S = A \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{e\varphi_a}{kT}} \cdot S, \qquad (34,1)$$

где φ_a — потенциал выхода электрона из металла и S — активная поверхность эмиттера. С повышением температуры оба множителя в выражении (34,1), содержащие температуру, увеличиваются, однако основное значение при этом имеет круто возрастающий экспоненциальный множитель (рис. 34-1).

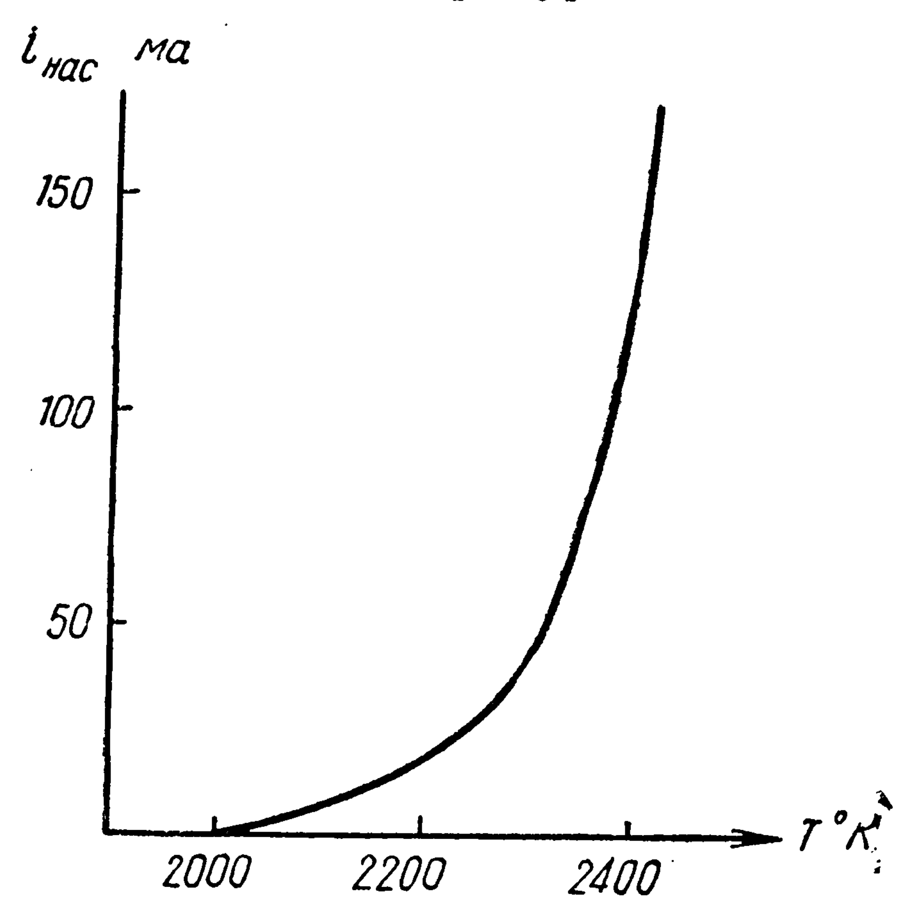


Рис. 34-1. График зависимости $i_{нас} = \frac{I_{нас}}{S} = f(T)$ для вольфрамовой нити накала

Электроны, испускаемые металлом в вакуум, оседают на стенках и электродах вакуумного прибора. Образуя таким образом затормаживающее электрическое поле, они приостанавливают дальнейшую эмиссию. Над поверхностью нагретого металла создается при этом электронное облако, находящееся в электродинамическом равновесии с металлом. Однако вследствие утечки зарядов через изоляцию равновесие нарушается. Металл, эмитирующий электроны, и вакуум, содержащий объемный заряд, образуют своеобразный источник малой термоэлектродвижущей силы, поддерживающий разность потенциалов на сопротивлении утечки. Всякий электровакуумный диод (рис. 34-2) содержит два электрода: катод (холодный или накаливаемый) и анод, располагаемый обычно против катода и поддерживаемый с помощью внешнего источника при положительном по отношению к катоду потенциале.

Эмиссия ν электронов с катода может быть осуществлена следующими способами: путем накала катода (термоэлектронная эмиссия); путем облучения катода квантами электромагнитных излучений с энергией $h\nu > e\varphi_a = 1 \div 5$ *эв* (фотоэмиссия электронов при облучении видимым светом, ультрафиолетовым, рентгеновским или гамма-излучениями); путем облучения катода потоками заряженных частиц (вторичная электронная эмиссия от потоков электронов, ионов и атомных ядер с энергией $E \gg e\varphi_a$) и путем создания сильных электрических полей между анодом и като-

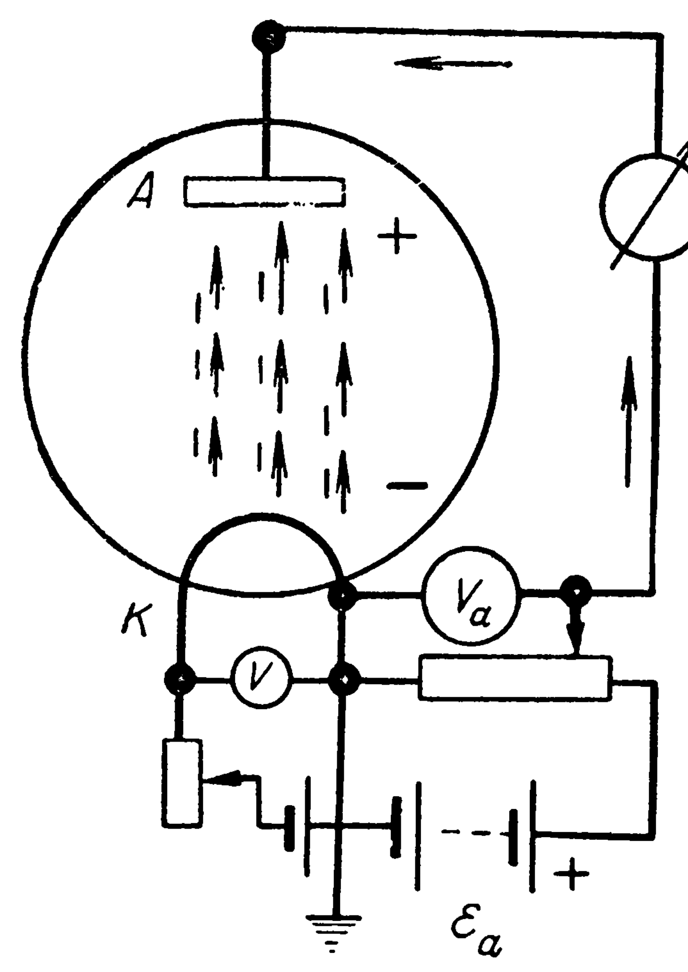


Рис. 34-2. Электрическая схема при снятии характеристики диода

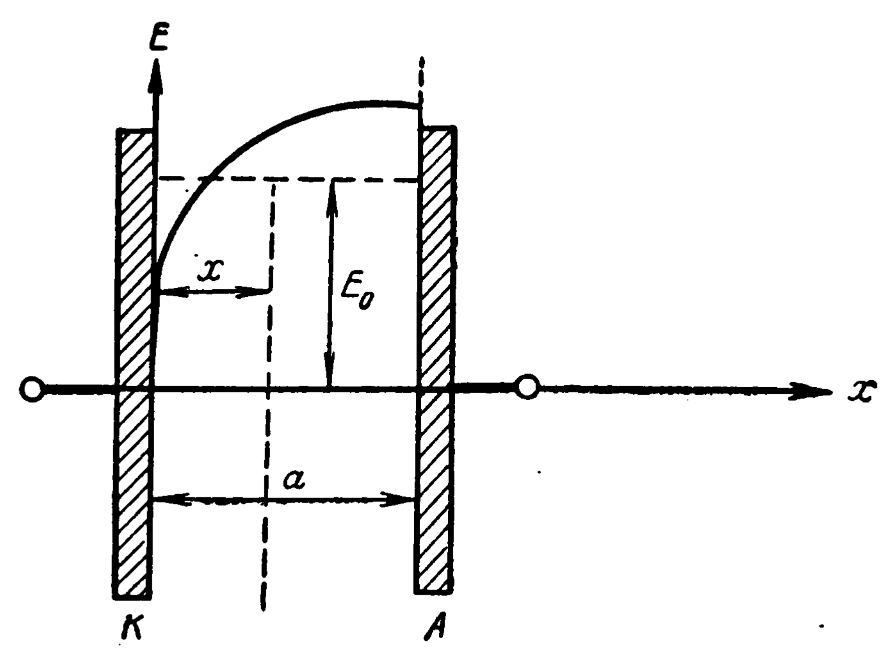


Рис. 34-3. К выводу закона «степени 3/2».

Сплошная кривая $E = -\frac{dU}{dx} = f(x)$ показывает искажение поля из-за объемного заряда; пунктирная — однородное поле E_0 при отсутствии объемного заряда

дом (автоэмиссия электронов при напряженностях полей

$$\left|\frac{dU}{da}\right| > 10^6 \ \frac{в}{см}\Big).$$

В однородном электрическом поле в вакууме под действием постоянной силы $F = eF$ электроны движутся к аноду равноускоренно. Они приобретают кинетическую энергию, определяемую разностью потенциалов, имеющейся на участке пути, поскольку $E = -\frac{dU}{dx}$. Для отрицательного заряда электрона, следовательно, имеем $dA = -eEdx = edU$ или

$$\Delta W = e(U_2 - U_1) = eU. \qquad (34,2)$$

Из этого соотношения вытекает единица энергии, называемая электронвольтом. Она представляет собой кинетическую энергию, приобретаемую элементарным зарядом в вакууме при разгоняющей разности потенциалов в один вольт (1 *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ *эрг* $= 1{,}6 \times \times 10^{-19}$ *дж*). Наличие объемных зарядов вносит искажения в электрическое поле между электродами. При отсутствии столкновений

с атомами, но при наличии электронного объемного заряда зависимость между плотностью эмиссионного тока и разностью потенциалов между электродами не соответствует линейной связи, выражаемой законом Ома.

Полагая электроды диода плоскими для простоты вычисления и отсчитывая расстояние x от поверхности катода (рис. 34-3), для любого сечения потока электронов можно записать, что

$$i = -\rho_x \cdot v_x = -\rho_x \cdot \sqrt{\frac{2eU_x}{m}}, \qquad (34,3)$$

где ρ_x — объемная плотность зарядов, $v_x \ll c$ — скорость их поступательного движения в x-м сечении, i — плотность эмиссионного тока. Градиент напряженности поля в том же сечении по теореме Пуассона (27,8) можно представить в виде

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d^2U_x}{dx^2} = -4\pi\rho_x. \qquad (34,4)$$

Подставляя из выражения (34,3) значение ρ_x в (34,4), получим

$$\frac{d^2U_x}{dx^2} = 4\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}}\, U_x^{-\frac{1}{2}}, \qquad (34,5)$$

или после умножения обеих частей равенства (34,5) на $2\frac{dU_x}{dx}dx$

$$d\left(\frac{dU_x}{dx}\right)^2 = 16\pi \cdot i \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d\left(U_x^{\frac{1}{2}}\right); \qquad (34,6)$$

откуда, полагая при $x = 0$ $E_0 = -\frac{dU}{dx} = 0$ (из-за наличия электронного облака), имеем

$$\frac{dU_x}{dx} = 4(\pi \cdot i)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot U_x^{\frac{1}{4}}. \qquad (34,7)$$

Вторично интегрируем это уравнение в пределах от $x = 0$ до $x = a$ (см. рис. 34-3):

$$4/3 \cdot U^{\frac{3}{4}} = 4(\pi i)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot a, \qquad (34,8)$$

отсюда

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot U^{\frac{3}{2}},$$

что составляет так называемый закон «степени 3/2», или закон Чайльда — Богуславского.

С возрастанием разности потенциалов между электродами диода в случае термоэлектронной эмиссии электронное облако у поверхности накаленного катода рассасывается, а увеличивающийся термоэмиссионный ток достигает своего предельного значения —

тока насыщения (рис. 34-4). Плотность тока насыщения определяется ежесекундной эмиссией электронов с единицы поверхности накаленного катода (см. 31,14).

Из характеристик диода (рис. 34-4) вытекают два режима его работы: «до насыщения» (участки 01, 02, 03) и «при насыщении» (участки B_1, B_2, B_3). В первом случае на диод приходится малая разность потенциалов, и он работает как электрический вентиль (кенотрон), пропускающий ток только в одном направлении. При сильно развитой активной поверхности катода кенотрона и при токах нагрузки $I \ll I_{\text{нас}}$ на диоде будет малое падение потенциала, и его присутствие в цепи тока не повлияет на режим в электрической цепи (например, радиолампы или рентгеновской трубки). При этом на аноде кенотрона рассеивается незначительная мощность электронного потока, и он остается холодным. Чрезмерный нагрев анода кенотрона указывает на неправильный режим его работы. На рис. 34-5 показана часто применяемая двухполупериодная схема выпрямления переменного тока на вентилях. Работа диода при токе насыщения характеризуется большими скоростями электронов, прибывающих на анод, и, следовательно, их большими кинетическими энергиями (табл. 18).

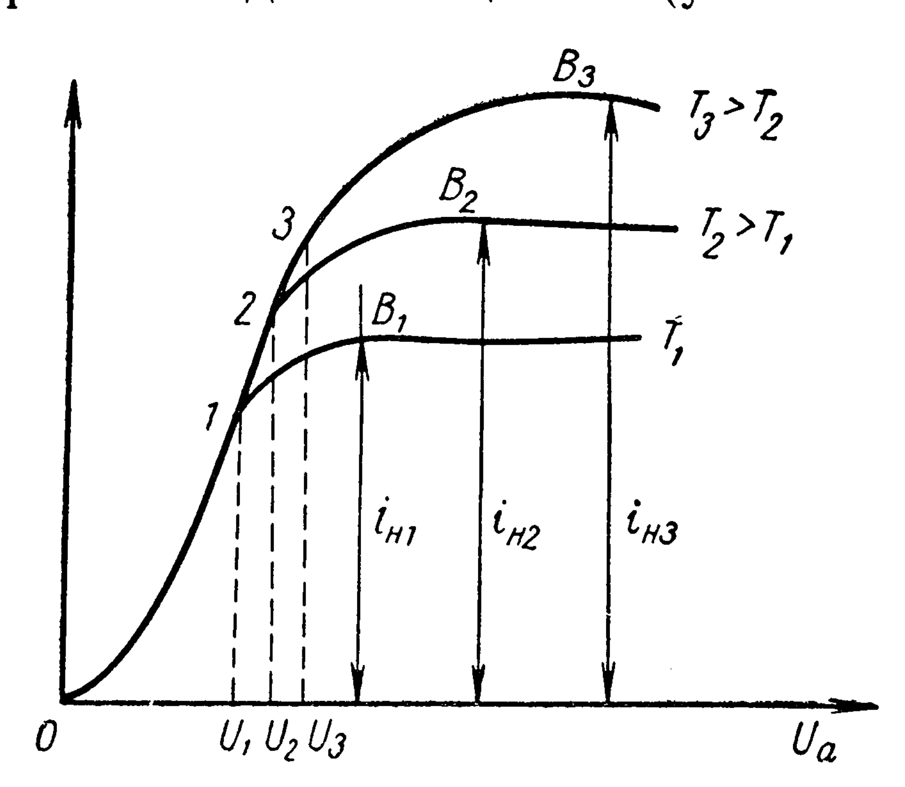


Рис. 34-4. Характеристики электровакуумного диода.

Участки *01*, *02*, *03* характеризуются законом «степени 3/2»; участки B_1, B_2, B_3 — формулой Ричардсона — Дёшмена (34,1)

При большой рассеиваемой на аноде мощности потока электронов металл анода сильно нагревается, так что при длительной работе диода необходим непрерывный отвод тепла (жидкостное, воздушное или радиационное охлаждение). Кроме того, в фокусном пятне анода (место, куда преимущественно попадают электроны) происходит преобразование некоторой, вообще говоря, малой части энергии электронного пучка в энергию испускаемых квантов рентгеновского излучения (от долей процента до нескольких процентов в зависимости от $U_а$), и, следовательно, диод в этом режиме рабо-

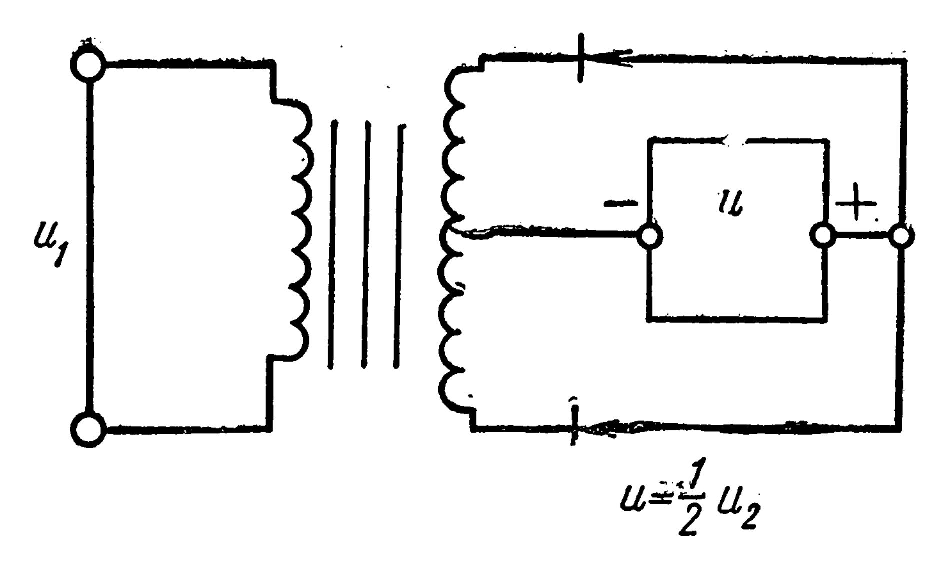


Рис. 34-5. Двухполупериодная схема выпрямления половинного напряжения во вторичной обмотке трансформатора

тает как генератор рентгеновского излучения или, иначе говоря, как рентгеновская трубка.

Таблица 18

Энергия электронов в *эв*	Скорость v электронов в *см · сек*$^{-1}$	$\beta = \frac{v}{c}$	Длина фазовой волны $\lambda_p = \frac{h}{mv}$ в Å
10^{-3}	$1{,}9 \cdot 10^{6}$	$6{,}3 \cdot 10^{-5}$	384
10^{-1}	$1{,}9 \cdot 10^{7}$	$6{,}3 \cdot 10^{-4}$	38,4
1,0	$6{,}0 \cdot 10^{7}$	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	12,1
10	$1{,}9 \cdot 10^{8}$	$6{,}3 \cdot 10^{-3}$	3,85
10^{2}	$6{,}0 \cdot 10^{8}$	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	1,21
10^{3}	$1{,}9 \cdot 10^{8}$	$6{,}3 \cdot 10^{-2}$	0,38
10^{4}	$1{,}6 \cdot 10^{9}$	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	0,12
10^{5}	$1{,}0 \cdot 10^{10}$	$5{,}5 \cdot 10^{-1}$	0,04
10^{6}	$2{,}8 \cdot 10^{10}$	$9{,}5 \cdot 10^{-1}$	0,02

Однако при повышенном напряжении и недостаточном накале нити катода кенотрон может оказаться работающим в режиме рентгеновской трубки и, следовательно, будет радиационно опасным в эксплуатации.

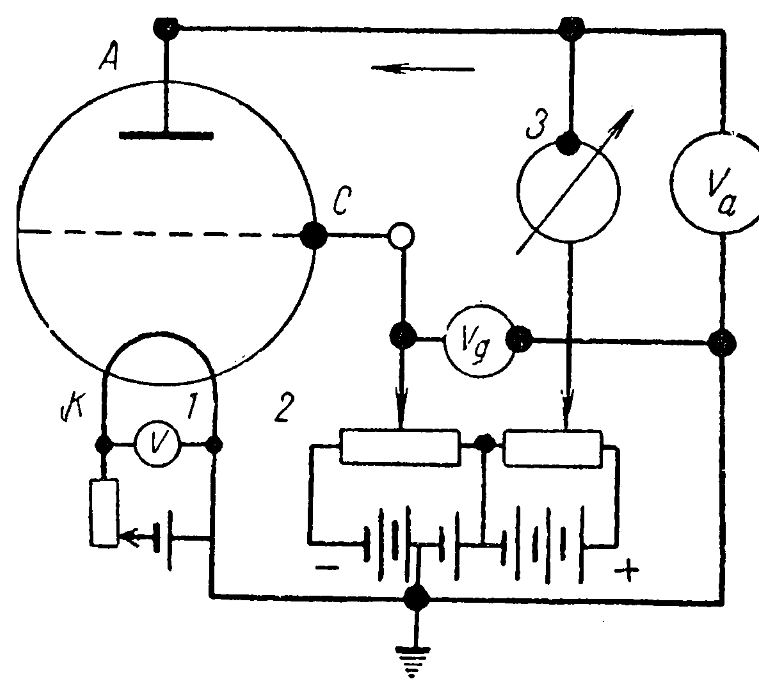


Рис. 34-6. Электрическая схема при снятии статических характеристик триода:

1 — контур тока накала; *2* — контур сеточного тока; *3* — контур анодного тока I_a

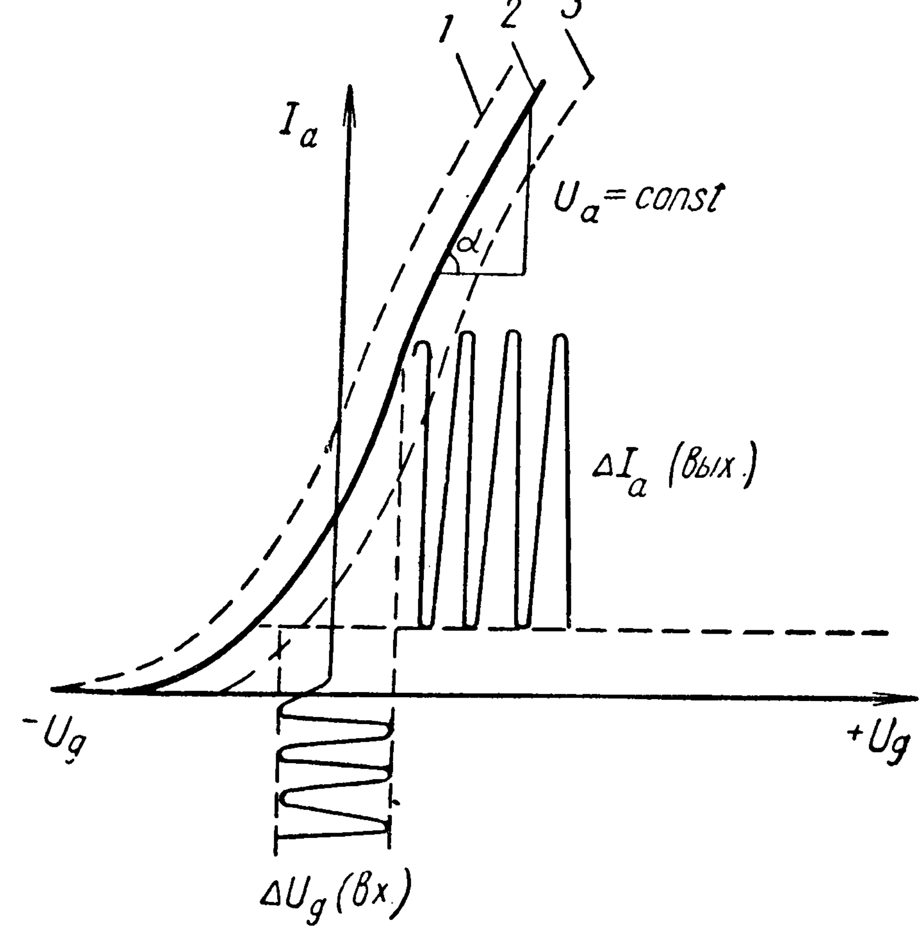


Рис. 34-7. Статические сеточные характеристики лампы-триода $U_a = \text{const}$ $(\Delta U_{вых} \sim \Delta i_a)$

Важное значение для развития радиотехники и электроники имеют многоэлектродные лампы (триоды, тетроды, пентоды). Характеристики и принципы использования таких ламп удобнее всего проследить на простейшем триоде (рис. 34-6). Третий промежуточный электрод — сетка является управляющим электродом. В зависимости от потенциала сетки лампа будет заперта или отперта для движения электронов эмиссии. Если поддерживать анодный потенциал $U_a = \text{const}$ и снять при этом сеточную характеристику $I_a = \varphi\ (U_g)$ (рис. 34-7), то $\text{tg}\, \alpha$ — тангенс угла наклона среднего

прямолинейного участка кривой к горизонтальной оси определит один из оперативных параметров лампы, а именно крутизну сеточной характеристики

$$\operatorname{tg}\alpha = S = \frac{\partial I_а}{\partial U_а}\left(\frac{ма}{в}\right).$$

Подобным образом, сохраняя сеточный потенциал $U_g = \text{const}$ и снимая семейство анодных характеристик $I_а = f(U_а)$ (рис. 34-8), по их углу наклона находится второй параметр лампы — внутреннее сопротивление триода

$$R_i = \frac{\partial U_а}{\partial I_а} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

И, наконец, из условия $I_а = \text{const}$ (рис. 34-8) определяется третий параметр — проницаемость сетки лампы

$$D = \frac{\partial U_д}{\partial U_а},$$

или величина, ей обратная — статический коэффициент усиления

$$\mu_0 = \frac{1}{D} = \frac{\partial U_а}{\partial U_д}.$$

Очевидно, для каждой лампы при выборе одних и тех же единиц измерений справедливо соотношение

$$D \cdot R_i \cdot S = 1. \tag{34,11}$$

Электровакуумный триод используется в качестве усилителя сигнала (рис. 34-9).

Слабый приходящий сигнал изменяет потенциал сетки лампы, что вызывает соответственное изменение анодного тока, определяемого анодной батареей $E_а$, накалом нити лампы и ее сеточной характеристикой.

В схемах возбуждения высокочастотных электромагнитных автоколебаний сетка лампы-триода играет такую же роль, какую выполняет анкер в маятниковых колебаниях часового механизма. Благодаря обратной связи между анодным и сеточным контурами энергия, необходимая для покрытия потерь, ритмично и синхронно поступает от источника питания в колебательный контур.

Эмиссия электронов возможна не только в результате нагрева металла, но и при облучении катода фотонами, заряженными частицами и электронами. В последнем случае эмиссию электронов называют вторичной. Если n_2 — число отраженных и эмитируемых вторичных электронов, n_1 — число первичных электронов, прибывающих за то же время на поверхность электрода, то $\delta = \frac{n_2}{n_1}$ представит собой коэффициент вторичной эмиссии.

Для чистых металлов $\delta = 1{,}1 \div 1{,}4$ в зависимости от энергии первичных электронов (рис. 34-10).

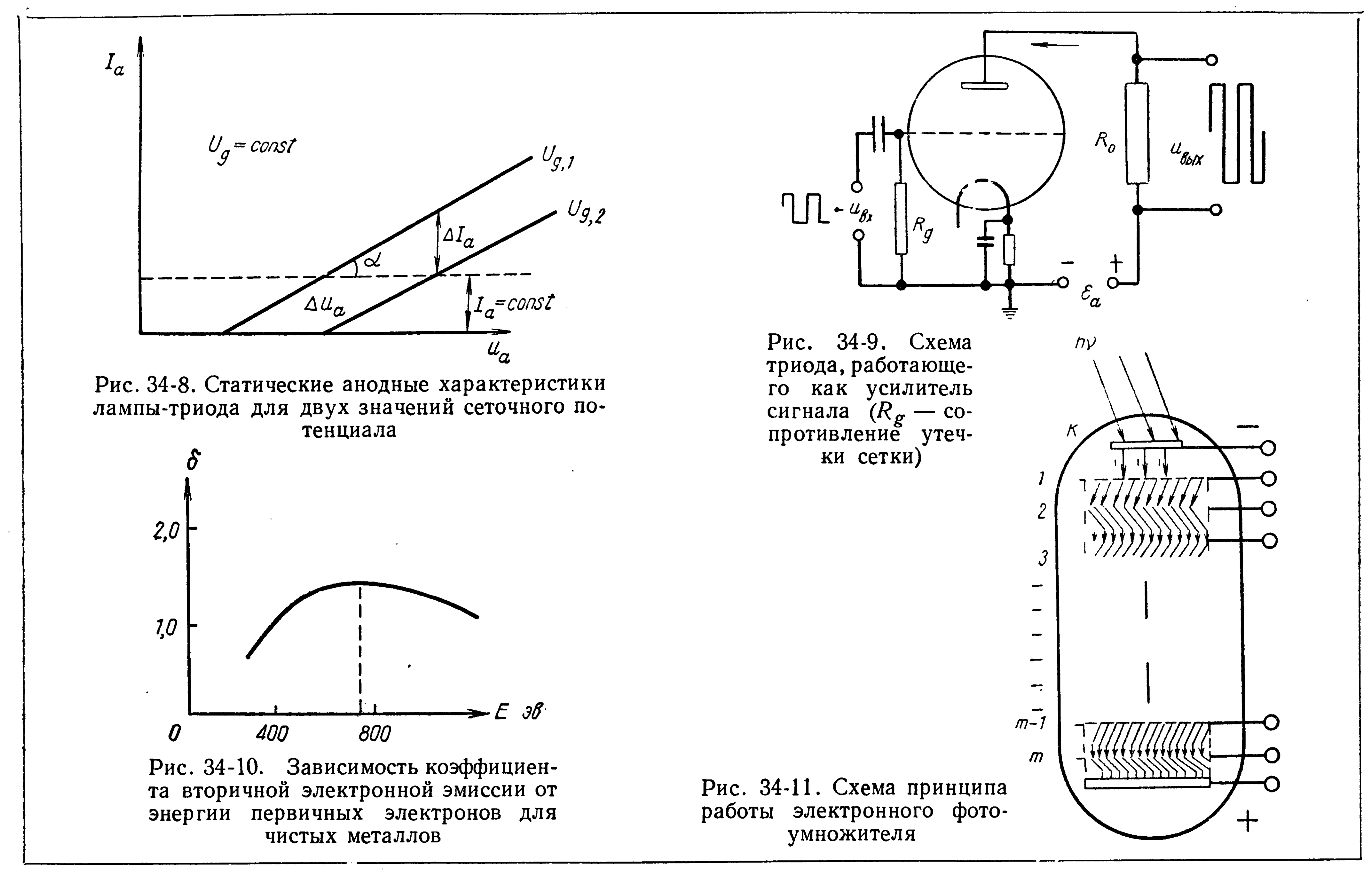


Рис. 34-8. Статические анодные характеристики лампы-триода для двух значений сеточного потенциала

Рис. 34-9. Схема триода, работающего как усилитель сигнала (R_g — сопротивление утечки сетки)

Рис. 34-10. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии первичных электронов для чистых металлов

Рис. 34-11. Схема принципа работы электронного фотоумножителя

На основе вторичной электронной эмиссии работают электронные фотоумножители (рис. 34-11). Между катодом и анодом электронного фотоумножителя расположено несколько ($m = 7 \div 15$) промежуточных активированных электродов (динодов). На каждую ступень такого каскада подается разгоняющая разность потенциалов порядка $150 \div 160$ *в*. Малый фотоимпульс вырывает с катода небольшое число n фотоэлектронов. Коэффициент вторичной эмиссии активированных динодов (вторичных эмиттеров) составляет $\delta = 2 \div 2{,}5$. Если бы все вторичные электроны собирались на электроды, то на выходе заряд импульса составил бы $Q = ne\delta^m$ вместо $q = ne$ на входе.

Вследствие неизбежного рассеяния электронов необходим поправочный коэффициент собирания $K_c < 1$, и тогда усиление фотоумножителя будет равно

$$M = \frac{Q}{q} = K_c \cdot \delta^m. \qquad (34{,}12)$$

Для современных $11 \div 14$ каскадных фотоумножителей общий коэффициент усиления составляет $M = 10^7 \div 10^9$. Такие электронные приборы высокой чувствительности используются в сцинтилляционных люминесцентных счетчиках квантов гамма-излучений.

Лекция 35

НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ГАЗОВ

Газ, состоящий из нейтральных молекул, не обладает электрической проводимостью, так как не содержит носителей тока. Проводимость газа является или следствием действия внешнего по отношению к электрической цепи ионизатора, или следствием действия сильного электрического поля, создаваемого в нем источником э. д. с. Внешние по отношению к электрической цепи воздействия, вызывающие ионизацию газа и, следовательно, его несамостоятельную проводимость, различны по своей природе. Трибоионизацией называется ионизация газа по механическим причинам, например, при трении газа о стенки сосуда или при разрушениях твердых и жидких тел, производимых в газе, т. е. при дроблении, распылении и разбрызгивании вещества.

Термоионизацией будет образование ионов в результате столкновения нейтральных атомов и молекул газа при их интенсивном беспорядочном движении, что наблюдается при высоких температурах газа, или локальное образование ионов при проникновении быстрых нейтронов сквозь газ.

Электроионизацией является процесс, при котором ионы в газе образуются в результате столкновений быстрых заряженных

частиц с молекулами газа (так называемая ударная ионизация).

Фотоионизацией называют образование ионов при воздействии электромагнитными излучениями оптической, рентгеновской или гамма-областей спектра.

По характеру распределения ионов в газе различают ионизацию объемную, когда ионизатор образует ионы во всем подвергаемом воздействию объеме газа, поверхностную, при которой ионы возникают в результате эмиссии электронов с поверхности электродов и со стенок сосудов, содержащих газ, и колонную, при которой ионы создаются преимущественно вдоль пути проникновения ионизирующих частиц.

Так как сильно проникающее космическое излучение через вторичные процессы фото- и электроионизации в какой-то мере всегда и везде ионизирует газы, то начальная несамостоятельная проводимость практически всегда имеется у всех газов. Плотность ионизации, создаваемая в воздухе различными ионизирующими агентами, приведена в табл. 19.

Таблица 19

Ионизирующие агенты	Плотность ионизации
Объемные	
Рентгеновское или γ-излучение при мощности дозы в воздухе 1 $р \cdot сек^{-1}$	$2 \cdot 10^9$ $см^{-3} \cdot сек^{-1}$
Молекулярные коллизии в газе при $T = 1000°$ К	$2 \cdot 10^3$ $см^{-3} \cdot сек^{-1}$
Космическое излучение на уровне моря	$2 \div 100$ $см^{-3} \cdot сек^{-1}$
Поверхностные	
Термоэлектронная эмиссия с вольфрама при $T = 2500°$ К	$2 \cdot 10^{18}$ $см^{-2}$ $сек^{-1}$
Фотоэлектронная эмиссия с калия при облучении $\lambda = 4400$ Å для интенсивности $I = 1{,}0 \frac{мккал}{см^2 \cdot сек} = 4{,}187 \frac{мкдж}{см^2 \cdot сек}$	$3 \cdot 10^{11}$ $см^{-2}$ $сек^{-1}$
Колонные (ударная ионизация)	
α — частицы с энергией $E \approx 5$ *Мэв*	$3 \cdot 10^4$ $см^{-1}$
β — частицы с относительной скоростью $\frac{v}{c} \approx 0{,}9$	10^2 $см^{-1}$
Вторичные	
Вторичная электронная эмиссия с металлов (выход) при $\delta = 1{,}1 \div 4{,}0$	—

Полагая, что при ионизации газа частицами каждую колонну ионов можно рассматривать как локальный ионизационный объем

с более или менее равномерной ионизацией, анализ ионного режима в газе естественно провести, исходя из наличия действующего объемного ионизатора с плотностью ионизации в ν пар ионов за единицу времени в единице объема. Наряду с образованием ионов в газе будет протекать обратный процесс их рекомбинации в нейтральные молекулы. Этот процесс в каждый данный момент будет зависеть от объемной концентрации пар ионов n, т. е. от того, в какой мере ионы, образуемые ионизатором в газе, будут отводиться диффузией или полем к электродам и стенкам газового промежутка (рис. 35-1).

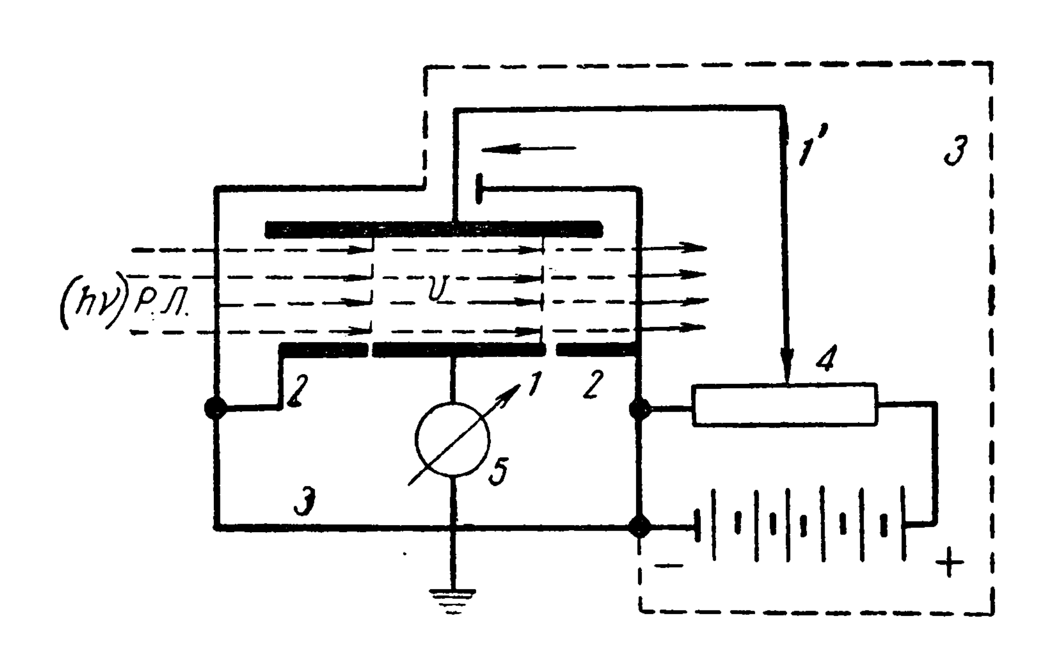


Рис. 35-1. Схема принципа действия ионизационной камеры:

1 — коллекторный высокоизолированный электрод; *1'* — потенциальный электрод; *2* — защитные электроды; *3* — заземленная оболочка; *4* — потенциометр; *5* — индикатор тока, *V* — измерительный ионизационный объем; *РЛ* — рентгеновы лучи

За время dt, в течение которого можно считать, что $\nu = \text{const}$, произойдет изменение концентрации пар ионов на величину

$$dn = (dn)_{\text{ион}} + (dn)_{\text{рек}} + (dn)_{\text{диф}} + (dn)_{\text{хим}} + (dn)_{\text{ток}}. \qquad (35,1)$$

Если не учитывать диффузии ионов и не рассматривать химических реакций, то дифференциальные уравнения ионного состояния в газе для типичных случаев можно записать в виде

$$dn = \nu dt - \alpha n^2 dt - \frac{idt}{a \cdot e}. \qquad (35,1')$$

Здесь $\alpha n^2 dt$ — число пар ионов, рекомбинирующих за время dt в единице объема газа при коэффициенте рекомбинации α. Величина концентрации пар ионов n вошла в квадрате потому, что вероятность рекомбинации пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов. В рассматриваемых условиях эти концентрации одинаковы и равны n. Коэффициент рекомбинации α находится из условия, что рекомбинация происходит при таком сближении ионов, при котором $\frac{e^2}{r} \geqslant \frac{3}{2} kT$. Значение α приблизительно одинаково для всех газов и составляет 10^{-6} *см*$^3 \cdot$ *сек*$^{-1}$; однако оно изменяется в зависимости от плотности газа и скорости отвода ионов к электродам. Последнее слагаемое $\frac{idt}{a \cdot e}$ правой части выражения (35,1') представляет собой число пар ионов, отводимых полем на электроды из единицы объема газового проме-

жутка за время dt; здесь i — плотность ионизационного тока, a — объем газа, приходящийся на единицу площади электродов.

Уравнение (35,1′) можно записать в виде

$$\frac{dn}{dt} = \nu - \alpha n^2 - \frac{i}{ae}; \tag{35,1''}$$

оно определяет ионный режим в газе.

Установившийся режим соответствует условию $\frac{dn}{dt} = 0$, т. е. $n = \text{const}$, а переходные режимы нарастания и убывания ионной концентрации — условию $\frac{dn}{dt} \neq 0$.

Рассмотрим переходный режим нарастания концентрации ионов. Пусть на обкладках конденсатора (см. рис. 35-1) отсутствует разность потенциалов и, значит, напряженность электрического поля $E = 0$, так же как и плотность ионизационного тока ($i = 0$).

Уравнение ионного режима в этом случае примет вид

$$\frac{dn}{dt} = \nu - \alpha n^2, \tag{35,2}$$

причем $\nu = \text{const}$, $\frac{dn}{dt} > 0$ (нарастание ионизации).

Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя его в границах от $t_1 = 0$, когда $n = 0$, до $t_2 = t$, когда $n = n_t$, получаем

$$\frac{dn}{\frac{\nu}{\alpha} - n^2} = \alpha dt, \tag{35,3}$$

$$\frac{\sqrt{\nu/\alpha} - n_t}{\sqrt{\nu/\alpha} + n_t} = e^{-2\sqrt{\nu\alpha}\cdot t},$$

откуда

$$n_t = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}\left(\frac{1 - e^{-2\sqrt{\nu\alpha}\cdot t}}{1 + e^{-2\sqrt{\nu\alpha}\cdot t}}\right). \tag{35,4}$$

Из выражения (35,4) видно, что при $t \to \infty$

$$n_t \to \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} = n_0 = \text{const}; \tag{35,5}$$

т. е. концентрация ионов стремится к предельной равновесной. Таким образом,

$$\frac{n_t}{n_0} = \frac{1 - e^{-2\sqrt{\nu\alpha}\cdot t}}{1 + e^{-2\sqrt{\nu\alpha}\cdot t}},$$

где n_0 — равновесная концентрация пар ионов в газе, при которой

$$\nu - \alpha n_0^2 = 0.$$

Чем эффективнее ионизатор, т. е. чем больше ν, тем быстрее наступает ионное равновесное состояние в газе (рис. 35-2). Теперь допустим, что после практического наступления ионного равновесия в газе, например в момент времени $t = t_1$, прекращается действие ионизатора, т. е. при $t = 0$ $n = n_0$ и $\nu = 0$. Тогда уравнение ионного режима для $t > t_1$ запишется в виде

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha n. \qquad (35,6)$$

Здесь $\frac{dn}{dt} < 0$ (исчезновение ионизации).

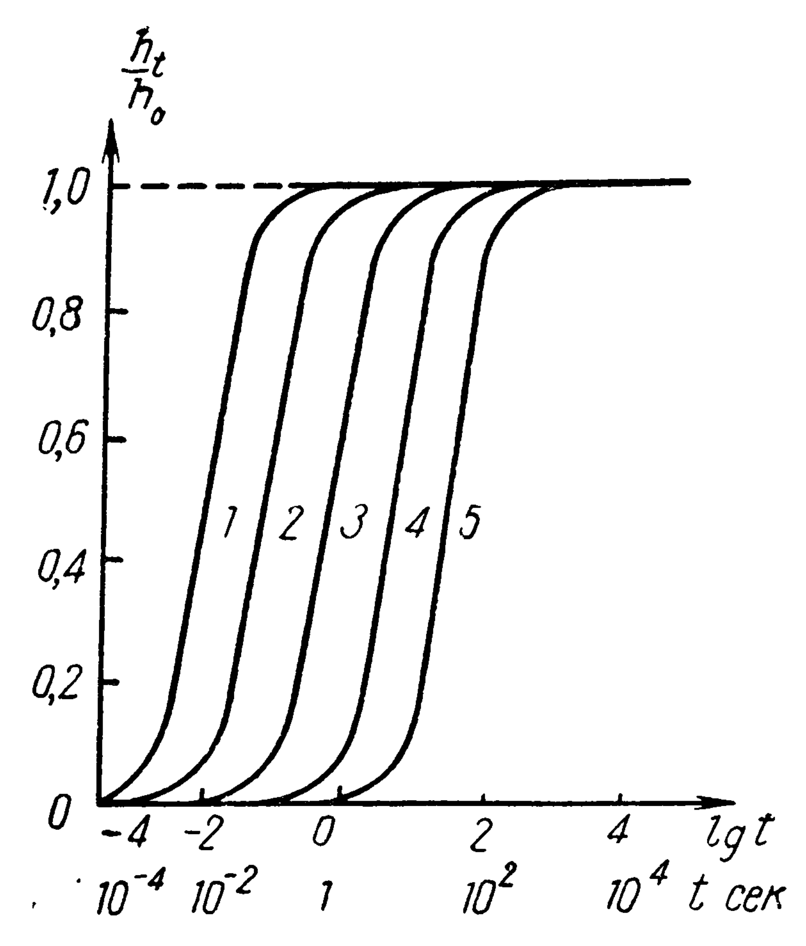


Рис. 35-2. Установление равновесной концентрации ионов во времени после включения ионизатора при отсутствии поля.

Кривые 1—5 соответствуют $\nu = 10^{10}$; 10^8; 10^6; 10^4; 10^2 ($см^{-3}\,сек^{-1}$)

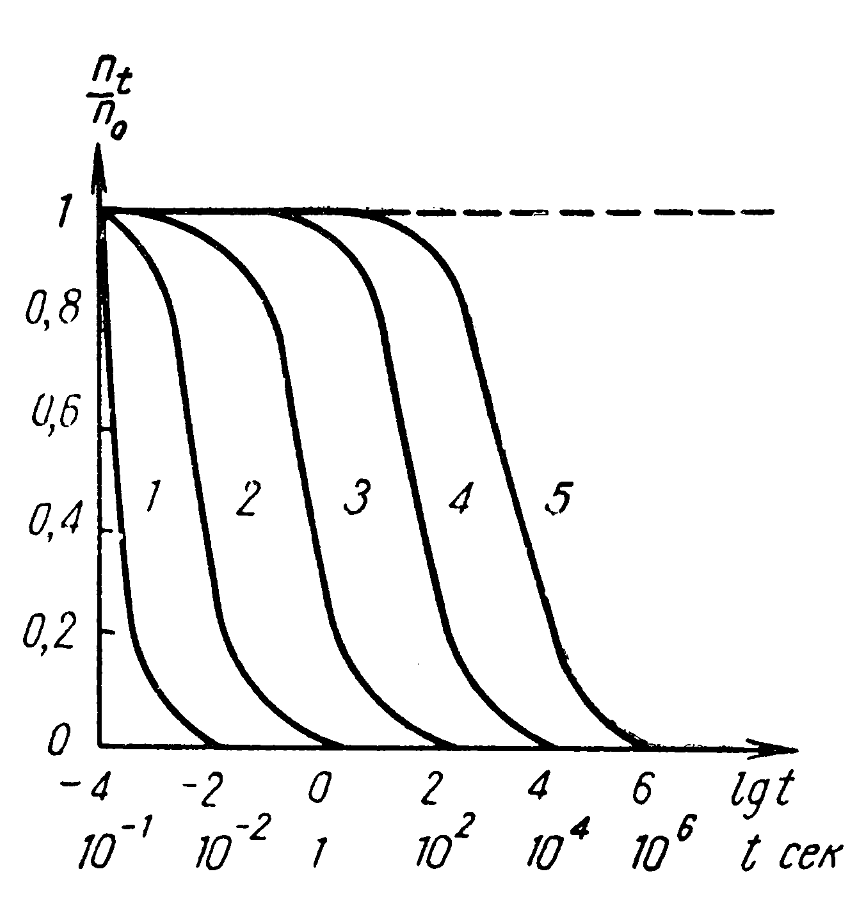


Рис. 35-3. Изменение концентрации ионов во времени после выключения ионизатора и в отсутствие поля.

Кривые 1—5 соответствуют $n_0 = 10^{10}$; 10^8; 10^6; 10^4; 10^2 $см^{-3}$

После интегрирования (35,6) в границах от $t_1 = 0$ до $t_2 = t$ получим

$$\frac{1}{n_t} - \frac{1}{n_0} = \alpha t,$$

или

$$\frac{n_t}{n_0} = \frac{1}{1 + \alpha n_0 t}. \qquad (35,7)$$

Как видно, относительное исчезновение ионизации только из-за рекомбинации ионов происходит тем быстрее, чем больше начальная объемная концентрация пар ионов в газе (рис. 35-3).

При малых расстояниях между электродами объемная ионизация исчезает главным образом из-за диффузии ионов.

При наличии в газовом промежутке электрического поля часть образованных ионизатором ионов будет отводиться к электродам,

и их концентрация будет уже меньше равновесной. В таком случае плотность ионизационного тока в газовом промежутке выразится формулой

$$i = n_1 e (b_p + b_n) E = \sigma E, \qquad (35,8)$$

где b_p и b_n — подвижности ионов соответствующих знаков.

Выражение (35,8) при $\nu = \text{const}$ представляет собой закон Ома. Подставляя значение n_1 из формулы (35,8) в уравнение ионного режима (35,1) при $\frac{dn}{dt} = 0$, получаем

$$i^2 + \frac{(b_p + b_n)^2 eE^2}{\alpha \cdot a} i - \frac{\nu (b_p - b_n)^2 e^2 E^2}{\alpha} = 0, \qquad (35,9)$$

откуда

$$i = \frac{e (b_p + b_n)^2 E^2}{2\alpha \cdot a} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha a^2 \nu}{(b_p + b_n)^2 E^2}} - 1 \right). \qquad (35,10)$$

При слабых полях, когда $E \ll \frac{2a}{b_p + b_n} \sqrt{\nu\alpha}$, т. е. при начальной проводимости газа, выражение (35,10) переходит в (35,8), в котором $n_1 = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} = n_0$.

В сильных полях, когда $E \gg \frac{2a}{b_p + b_n} \sqrt{\nu\alpha}$, если учесть, что $\sqrt{1 + x} \approx 1 - \frac{1}{2} x$, при $x \ll 1$ из уравнения (35,10) найдем

$$i = \nu e a = i_{\text{нас}}. \qquad (35,11)$$

Соотношение (35,11) соответствует тому предельному случаю, когда поле настолько сильно, что рекомбинация ионов исключается, но в газе еще не происходит ударной ионизации, благодаря которой могло бы произойти усиление тока (рис. 35-4). Это соотношение вытекает из уравнения ионного режима, если его записать для установившегося режима $\left(\frac{dn}{dt} = 0\right)$ в отсутствии рекомбинации, т. е.

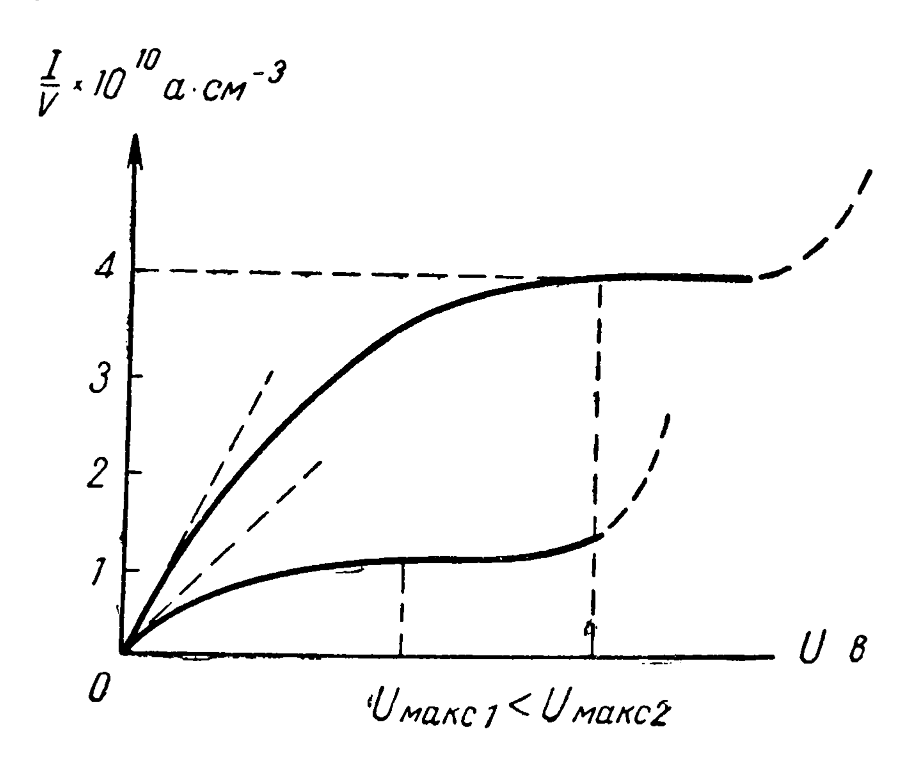


Рис. 35-4. Зависимость ионизационного тока от разности потенциалов на электродах пазового промежутка для двух значений эффективности ионизаторов ν_1 и $\nu_2 > \nu_1$

$$0 = \nu - \frac{i}{e \cdot a}. \qquad (35,12)$$

После умножения обеих частей выражения (35,11) на площадь поперечного сечения воздушного промежутка определим

$$I_{\text{нас}} = \nu e V_i, \qquad (35,13)$$

где V_i — измерительный ионизационный объем газа, внутри которого $\nu = \text{const}$. Уравнение (35,13) является соотношением, на

основе которого ионизационные камеры применяются для дозиметрии ионизирующих излучений. Если учесть, что расход энергии на образование пары ионов в воздухе практически не зависит от рода ионизаторов и остается постоянным и примерно равным 33÷34 *эв*, то можно записать, что

$$D_i = \frac{\Delta W_{\text{погл}}}{m} = \varepsilon \cdot \frac{V}{\rho} \cdot t = \frac{\varepsilon}{e} \cdot \frac{q_i}{m}, \tag{35,14}$$

где D_i — ионизационная доза квантового излучения в воздухе или экспозиционная доза излучения. Так как $V = \frac{m}{\rho}$, то для рентгеновского и гамма-излучений

$$D_i = \frac{\varepsilon}{e} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q_i}{V_i} = I \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_\lambda t. \tag{35,15}$$

Таким образом, ионизационная доза излучения в среде с энергией ионообразования ε определяется разделяемым зарядом, отнесенным к единице массы вещества ($\rho V_i = m$).

В качестве единицы ионизационной дозы принят рентген, представляющий собой удельную поглощенную воздухом камеры энергию ионизатора, при которой на $1{,}293 \cdot 10^{-3}$ *г* воздуха образуются ионные заряды в одну абсолютную электростатическую единицу каждого знака, или иначе $2{,}1 \cdot 10^9$ пар ионов на 1 *см*^{3} воздуха нормального состава и нормальной плотности. В любой другой среде с тем же значением ε (например, в воде или тканях тела) доза одного и того же излучения, согласно выражению (35,15), будет изменяться обратно пропорционально плотности вещества.

Пользуясь приведенным значением для энергии ионообразования в воздухе, по формуле (35,15) получаем $1 р \cong 0{,}11$ *эрг* · *см*$^{-3}$ для воздуха, или (по плотности) $1 р \cong 85$ *эрг* · *г*$^{-1}$ $= 85 \cdot 10^{-4}$ *дж* · *кг*$^{-1}$. Вместе с тем один рентген соответствует разделению зарядов в $2{,}3 \cdot 10^{-3}$ *к* электричества на воздухе.

Если увеличивать разность потенциалов на электродах газового промежутка свыше напряжения насыщения, то при некотором значении подводимого напряжения $U > U_{\text{нас}}$ кинетическая энергия электронов на длине свободного пробега станет достаточной для ударной ионизации газовых молекул. При этом ионизационный ток сильно возрастет, и проводимость газа из несамостоятельной может перейти в самостоятельную. Для выяснения механизма ударной ионизации и условий возникновения самостоятельной проводимости газа при наличии в нем электрического поля рассмотрим случай поверхностной ионизации, происходящей, например, путем вырывания электронов квантами излучения с плоского катода. Если β_n — число пар ионов, создаваемых электронами, движущимися от катода, на единице их пути, n — число электронов, проникающих со стороны катода в произвольно выбранный элементарный слой

газа толщиной dx, то в нем путем ударной ионизации будет добавочно создано $dn = \beta \cdot n \cdot dx$ пар ионов.

После интегрирования этого уравнения по всей толщине газового промежутка a при $\beta_n = \text{const}$ и при $n = n_0$, когда $x = 0$, получим

$$n_a = n_0 e^{\beta a}. \tag{35,16}$$

Приращение числа электронов в газовом промежутке по сравнению с числом их, выходящих за то же время с катода, составит

$$\Delta n = n_a - n_0 = n_0 (e^{\beta a} - 1) \tag{35,17}$$

и будет равно числу n_p положительных ионов, образованных в газовом промежутке электронами. Так как при разности потенциалов $U > U_{нас}$ рекомбинация ионов роли не играет, то все образованные положительные ионы, достигнув катода, будут создавать, в свою очередь, добавочную вторичную эмиссию электронов с катода, равную

$$\Delta n_1 = \gamma n_1 (e^{\beta a} - 1) = n_1 - n_0, \tag{35,18}$$

где n_1 — суммарная эмиссия электронов с катода при стационарном режиме, γ — коэффициент добавочной вторичной эмиссии от положительных ионов. Таким образом, в случае ударной ионизации будут справедливы соотношения:

$$n_1 = \frac{n_0}{1 - \gamma (e^{\beta a} - 1)}, \tag{35,19}$$

$$n_a = n_1 \cdot e^{\beta a} = \frac{n_0 \cdot e^{\beta a}}{1 - \gamma (e^{\beta a} - 1)}. \tag{35,20}$$

После умножения обеих частей уравнения (35,20) на заряд электрона плотность несамостоятельного лавинного тока в газах

$$i = n_a \cdot e = i_0 \frac{e^{\beta a}}{1 - \gamma (e^{\beta a} - 1)}, \tag{35,21}$$

где i_0 — плотность тока насыщения при отсутствии ударной ионизации. Соотношение (35,21) объясняет принцип действия газовых ионизационных счетных трубок (так называемых пропорциональных и гейгеровских счетчиков, предназначаемых для измерений ионизационной эффективности весьма слабых ионизаторов (β - и γ-излучений). На рис. 35-5 приведены схемы включения и рабочие характеристики ионизационных счетных газовых трубок. Колонная ионизация, произведенная в газоразрядной трубке

заряженной частицей большой энергии (электроном, вырванным гамма-квантом из стенки трубки, или частицей, проникшей в трубку извне), создает в радиальном электрическом поле трубки локальный процесс ударной ионизации, в результате чего сквозь газ протекает импульс лавинного несамостоятельного тока при ионизационном нарастании $\mu = \gamma(e^{\beta a} - 1)$, меньшем единицы.

Возникший локальный разряд не получает развития либо из-за примесей к газу, гасящих заряд (самогасящие счетчики), либо из-за резкого снижения напряжения на электродах (несамогасящие счетчики).

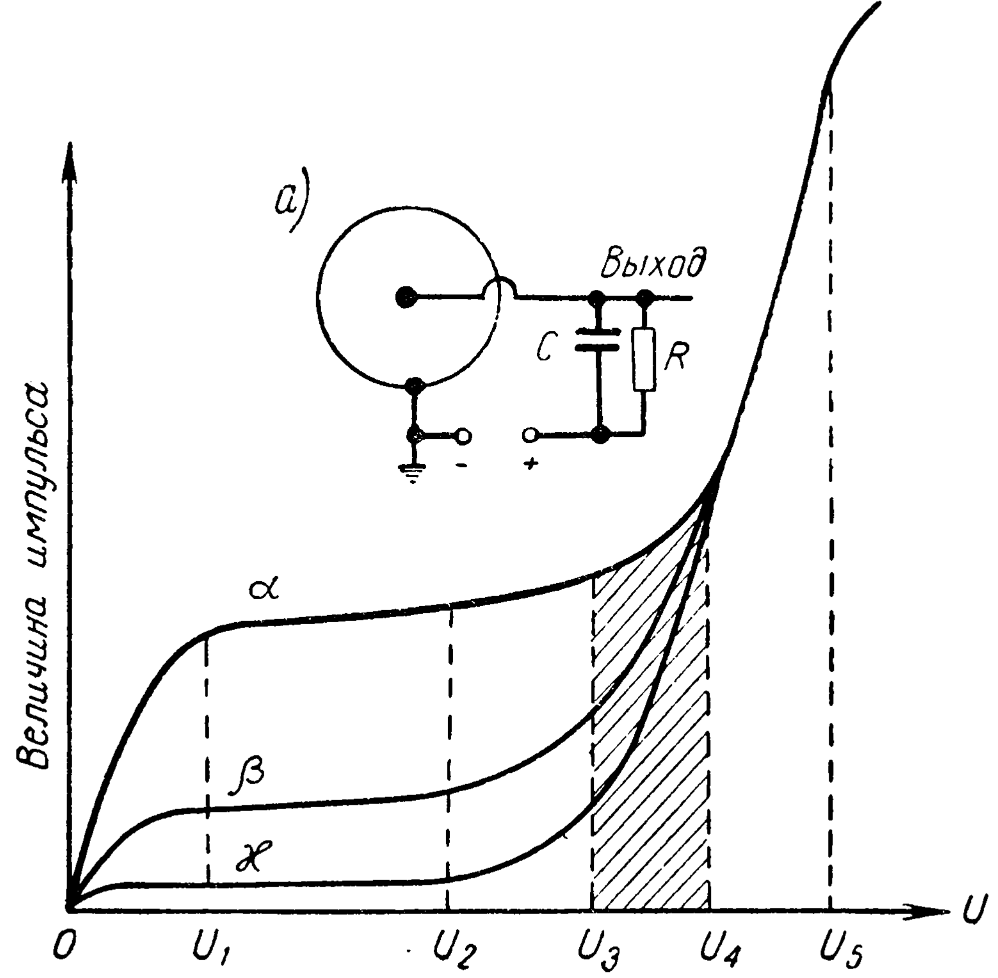


Рис. 35-5. Схема включения (*а*) и рабочая характеристика (*б*) газоразрядной трубки: α — случай сильной колонной ионизации от α-частицы; β — случай относительно слабой ионизации от электрона; ϰ — слабая ионизация от космического фона; U_3 U_4 — область искаженной ограниченной пропорциональности; $U > U_5$ — область непрерывного разряда (темный самостоятельный разряд)

Интервал напряжения на электродах трубки от $U = 0$ до $U = U_1$ соответствует начальной проводимости газа, для которой справедлив закон Ома (см. рис. 35-5). Область рабочей характеристики между U_1 и U_2 соответствует току насыщения и, следовательно, работе трубки в качестве импульсной ионизационной камеры. На участке от U_3 до U_4 происходит ударная ионизация с более или менее одинаковым коэффициентом газового усиления, так что импульсы тока пропорциональны начальным ионизациям, производимым частицами (область пропорционального счета). В интервале от U_4 до U_5 коэффициент газового усиления обратно пропорционален начальной ионизации и, значит, импульсы усиленного тока одинаковы при любых начальных ионизациях, так что в этом режиме счетная трубка является счетчиком любых проникающих частиц (например, α- или β-частиц) и их энергии (область счета Гейгера).

По мере возрастания разности потенциалов между электродами ($U > U_5$) электронное нарастание μ достигает значения, равного единице, и тогда несамостоятельный лавинный ток перейдет в самостоятельный ионный ток в газе. Газовый счетчик может быть испорчен. При сильном развитии ударной ионизации все молекулы газового промежутка практически будут ионизированы и образуется то электрическое состояние газа, которое называют плазмой.

Лекция 36

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ГАЗОВ

Для возбуждения самостоятельного разряда в газовом промежутке необходимо, чтобы разность потенциалов на электродах достигла такого значения, при котором ионизационное нарастание μ становится равным единице, т. е.

$$\mu = \gamma (e^{\beta a} - 1) = 1. \qquad (36,1)$$

При этом, согласно (35,21), ионизационный ток может иметь конечное значение при $i_0 = 0$ или при $\nu = 0$, т. е. в отсутствии внешнего ионизатора. Потенциал зажигания самостоятельного разряда между холодными электродами следует, таким образом, установить исходя из соотношения (36,1). Очевидно, что

$$\beta a = \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right). \qquad (36,2)$$

Если обозначить через λ длину свободного пробега электрона в газе, то $\frac{1}{\lambda}$ представит собой число столкновений, претерпеваемых им на единице пути. Ионизация произойдет лишь в том случае, когда энергия ударяющего электрона будет больше, чем работа ε_i, необходимая для образования в газе пары ионов. Вероятность ионизации определится относительным числом столкновений, при которых энергия электрона будет больше ε_i, т. е. множителем $e^{-\frac{\varepsilon_i}{eE\lambda}}$, где $eE\lambda$ — средняя энергия, приобретаемая электроном e в однородном поле E на длине свободного пробега λ. Таким образом

$$\beta a = \frac{a}{\lambda} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_i}{eE\lambda}}. \qquad (36,3)$$

Из кинетической теории газов известно, что давление газа p и длина пробега λ электрона в нем связаны соотношением

$$p\lambda = \text{const}, \qquad (36,4)$$

в то же время при возникновении разряда $E = \frac{U_{\text{заж}}}{a}$, так что по выражению (36,3) имеем

$$\beta a = A \cdot p \cdot a \cdot e^{-B\frac{p \cdot a}{U_{\text{заж}}}} = \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \qquad (36,5)$$

где A и B — характеристические постоянные газа. Из формулы (36,5) следует, что

$$U_{\text{заж}} = B\frac{p \cdot a}{\ln\frac{A \cdot p \cdot a}{\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}} = B\frac{p \cdot a}{c + \ln(p \cdot a)} = \varphi(p \cdot a), \qquad (36,6)$$

причем $c = \ln A - \ln \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$. Как видно, потенциал зажигания является функцией произведения двух оперативных параметров газового промежутка: давления газа p и расстояния между электродами a. При разных p и a, но постоянном значении произведения pa потенциал зажигания самостоятельного разряда будет одинаковым. В этом заключен закон подобия (закон Пашена) для газоразрядных промежутков (рис. 36-1). Кривая на этом рисунке построена по (36,6) для плоских электродов (однородное поле) в воздухе. Чтобы

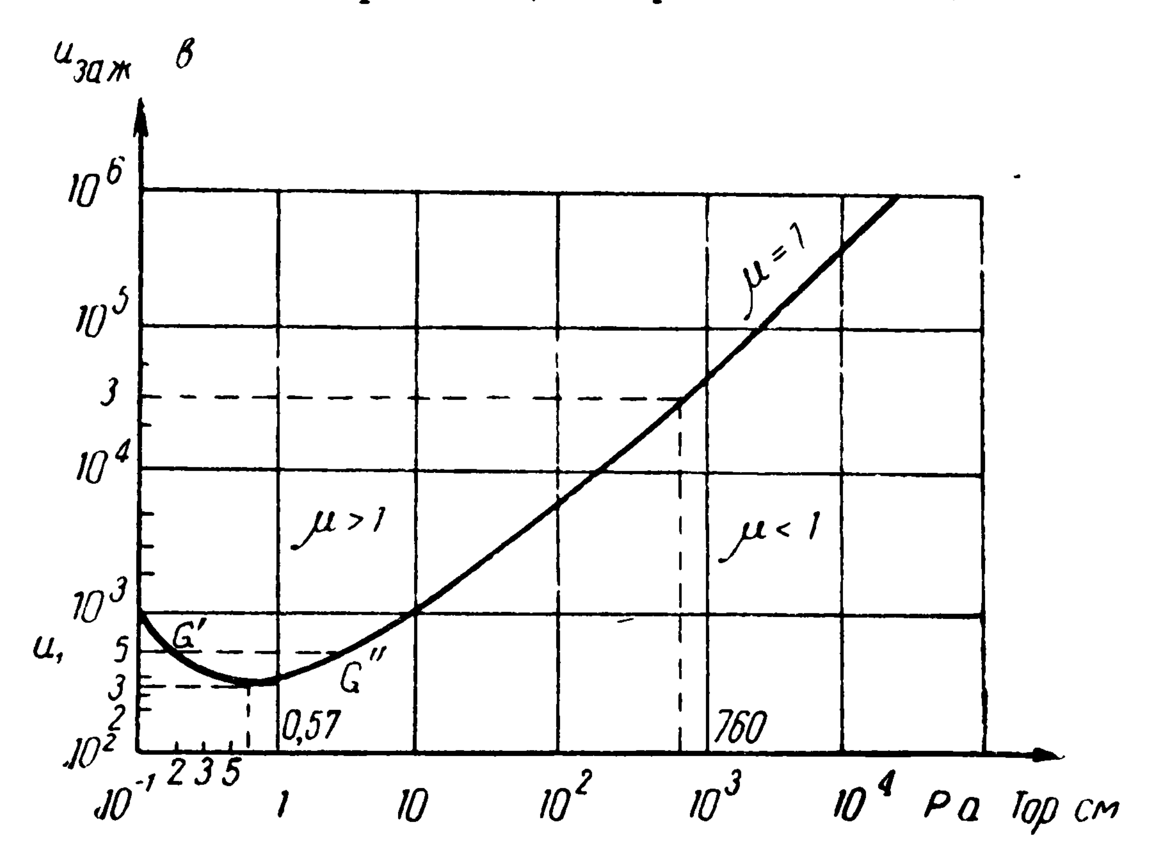


Рис. 36-1. Зависимость $U_{заж} = \varphi(pa)$ для воздуха, вычисленная по формуле (36,6), в которой $A = 15$ Тор$^{-1}$ *см*$^{-1}$; $B = 400$ *в*· Тор$^{-1}$ *см*$^{-1}$ и $\gamma = 0{,}02$

Пробивной потенциал слоя атмосферного воздуха в 1 *см* ($pa = 760$ Тор. *см*) составляет $U_{заж} \approx 30$ *кв*.

найти минимум потенциала зажигания и соответствующее ему значение pa, в выражении (36,6) приравняем произведение pa нулю и подставим сюда $pa_{мин}$, т. е.

$$pa_{мин} = \frac{e}{A} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{2{,}718}{A} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \qquad (36,7)$$

тогда

$$(U_{заж})_{мин} = \frac{B}{A} e \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = 2{,}718 \frac{B}{A} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right). \qquad (36,8)$$

Для воздуха экспериментальные значения

$$A \approx 15 \text{Тор}^{-1}\ \text{см}^{-1}; \quad B \approx 40 \text{в} \cdot \text{Тор}^{-1}\ \text{см}^{-1}, \ \gamma \approx 0{,}02,$$

где 1 Тор $\approx$ 1 *мм рт. ст.* В этом случае

$$pa_{мин} \approx 0{,}57 \text{ Тор см}$$

и

$$(U_{заж})_{мин} = 330 \text{ в}.$$

В табл. 20 приведены минимальные значения потенциала зажигания и соответствующие ему произведения pa для различных газов и паров.

Таблица 20

Газ	$(U_{заж})_{мин}$ *в*	$(pa)_{мин}$ Тор·*см*
Кислород (O_2)	450	0,70
Углекислый газ (CO_2) . . .	420	0,54
Воздух ($0{,}7N_2 + 0{,}3\ O_2$)	330	0,57
Водород (H_2)	270	1,15
Гелий (He)	156	4,00

Вдоль кривой, выражающей закон Пашена (см. рис. 36-1), ионизационное нарастание $\mu = 1$; область сверху кривой соответствует $\mu > 1$, а снизу $\mu < 1$. Искажения поля не меняют общего хода зависимости

$$U_{заж} = \varphi\,(p \cdot a).$$

Можно проследить те физические явления, которые вызывают кривые $U_{заж} = \varphi(p \cdot a)$, ход которых показан на рис. 36-1. Если от больших значений pa переходить к малым, изменяя только p, то с уменьшением давления газа будет возрастать длина пробега электрона в газе и, следовательно, для сохранения условия $\mu = 1$ потребуется меньшая разность потенциалов (ветвь справа от минимума). Однако при значительной откачке заметно убывает число молекул газа и, следовательно, убывает число столкновений электронов с молекулами. Для сохранения условия $\mu = 1$ потребуется более высокое напряжение на электродах газового промежутка (левая ветвь кривой).

Аналогично, уменьшая только a, будем иметь сначала возрастание напряженности поля и, следовательно, снижение необходимого потенциала зажигания разряда, а затем при малых a — снижение числа молекул в газовом промежутке и, значит, уменьшение числа тех столкновений, которые приводят к ионизации. Для сохранения $\mu = 1$ потребуется повысить энергию электронов при их соударениях с атомами газа, т. е. повысить разность потенциалов на электродах (левая ветвь кривой). Каждому значению pa отвечает одно значение $U_{заж}$, однако обратное утверждение не будет справедливым. Как показано на рис. 36-1, заданному значению потенциала зажигания, например U_1, соответствуют два возможных значения pa: большее (точка G'') и меньшее (точка G'), чем $(pa)_{мин}$. Устойчивому току будет соответствовать только меньшее значение pa (левая ветвь кривой, точка G'). Действительно, зажигание связано с увеличением числа объемных зарядов, что, согласно выражению (36,7), влечет за собой уменьшение действующего расстояния между электродами, т. е. уменьшение pa; при постоянном напряжении U_1 это соответствует переходу с правой ветви кривой (из точки G'') в область $\mu > 1$ и, следовательно, дальнейшему развитию разряда вплоть до точки G' на левой ветви кривой. Последующий переход с кривой был бы уже в область $\mu < 1$, т. е. вызывал бы реакцию, восстанавливавшую нарушенный режим. Ток, текущий через газ, определяется не только оперативными параметрами газового про-

межутка, но и электрическими параметрами прочих участков цепи и, прежде всего, значениями электродвижущей силы источника питания $\mathscr{E}$ и сопротивления R в цепи газоразрядного промежутка. При протекании тока на электродах газового промежутка будет разность потенциалов $U = \mathscr{E} - IR$, которая на диаграмме $U = f(I)$ представлена прямыми сопротивлений $-\frac{dU}{dI} = +R$, имеющими тот или иной наклон к оси тока. При самостоятельном токе режим в газоразрядном промежутке соответствует статической вольт-

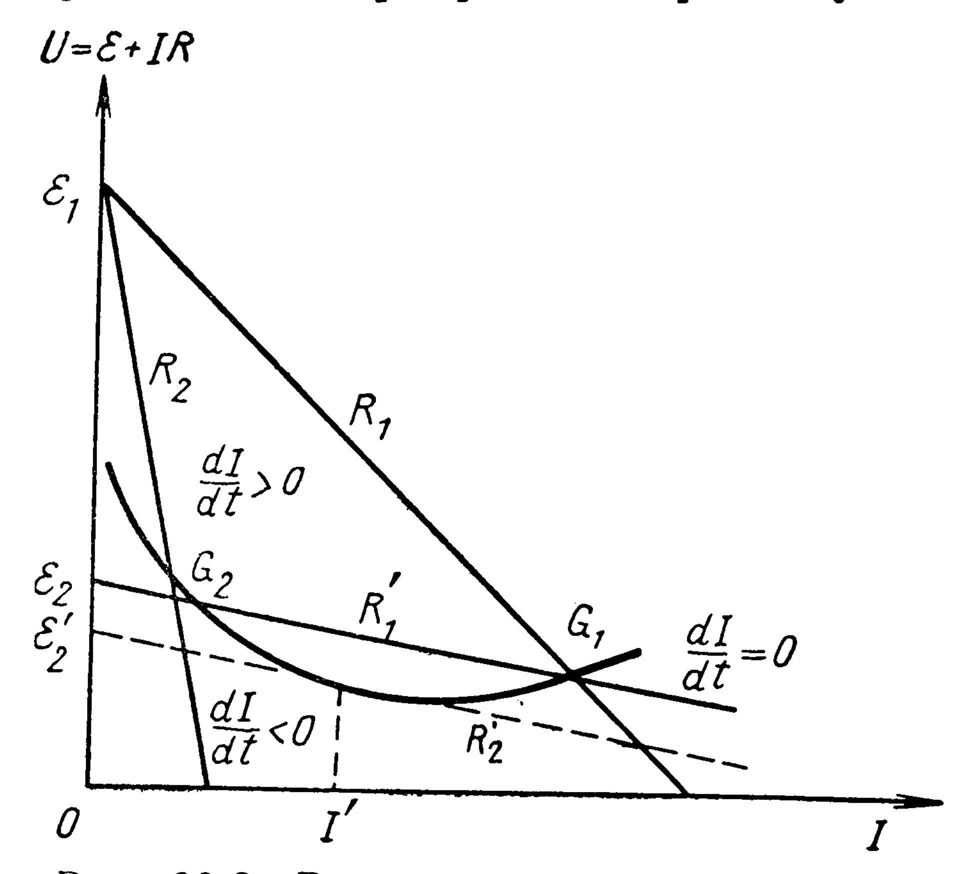


Рис. 36-2. Вольтамперная характеристика газоразрядного промежутка.

$\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_2'$ — электродвижущие силы источников питания; R_1, R_2 — сопротивления в цепи $\mathscr{E}_1$; R_2' — сопротивление в цепи $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_2'$. Точка G_1 соответствует устойчивому режиму, так как $\frac{dU}{dI} > 0$; точка G_2—устойчивому режиму в цепи $\mathscr{E}_1$, R_2, но неустойчивому в цепи $\mathscr{E}_2$, R_1'

Рис. 36-3. Полная вольтамперная характеристика самостоятельного разряда в газе.

Участок $A'B'$ соответствует нормальному тлеющему разряду. Возрастание тока после точки C приводит либо к кратковременному искровому разряду при наличии большого сопротивления в цепи, либо к дуговому разряду при горячем катоде и мощном источнике питания. На оси абсцисс отложены значения $I_а$

амперной характеристике $U = f(I)$ (рис. 36-2). Вдоль кривой $U = f(I)$ имеем $\frac{dI}{dt} = 0$. Каждой точке этой кривой отвечает определенное значение нелинейного сопротивления газового промежутка $\frac{dU}{dI} \gtrless 0$. Область выше кривой соответствует нарастанию тока во времени, а ниже кривой— его убыванию. По мере развития самостоятельного разряда сопротивление газового промежутка убывает из-за возрастания ионной концентрации в газе и постепенного увеличения поперечного сечения тока проводящего канала в газе (покрытие разрядом всей поверхности электродов). В результате изменения ионной концентрации вольтамперная характеристика самостоятельного разряда в газе является нелинейной и изображается кривой, имеющей спадающие и восходящие ветви (рис. 36-3). Рас-

сматривая график рис. 36-3, на котором представлен участок AB вольтамперной характеристики газоразрядного промежутка, можно установить, что устойчивому режиму протекания самостоятельного тока в газе отвечают только такие электрические параметры цепи и газового промежутка, при которых возрастанию тока соответствует переход по прямой сопротивления из области $\frac{dI}{dt} > 0$ в область $\frac{dI}{dt} < 0$ (на рис. 36-2 точка G_1 при параметрах $\mathscr{E}_1 R_1$ и $\mathscr{E}_2 R_1'$ и точка G_2 только при $\mathscr{E}_1 R_2$). Иначе говоря, условия устойчивости режима самостоятельного тока можно записать в виде

$$-R < \frac{dU}{dI}$$

или

$$R + \frac{dU}{dI} > 0. \tag{36,9}$$

При уменьшении электродвижущей силы источника питания прямая сопротивления смещается вниз, оставаясь параллельной самой себе $\mathscr{E}_2' R_2'$. Точка касания с вольтамперной характеристикой соответствует при этом наименьшему возможному току I' устойчивого режима при заданных параметрах цепи. Дальнейшее понижение напряжения питания (или разведение электродов) влечет прекращение тока (потухание разряда). На восходящей ветви вольтамперной характеристики (рис. 36-2), которая соответствует полному покрытию разрядом электродов газового промежутка, возрастание тока dI возможно лишь путем увеличения напряжения dU; следовательно, $\frac{dU}{dI} > 0$, так что условие (36,9) всегда выполняется. При этом наступает фотоионизация газа, которая может вызвать появление самораспространяющегося от анода к катоду потока положительных ионов пространственного заряда (стример). С увеличением напряжения на электродах газового промежутка возрастает кинетическая энергия тяжелых положительных ионов, достигающих катода. При некотором значении разности потенциалов, соответствующем точке C полной вольтамперной характеристики самостоятельного разряда (см. рис. 36-3), локальный нагрев катода (катодного пятна) будет достаточен для термоэлектронной эмиссии, в результате чего весь ионный режим в газе изменяется. Вольтамперная характеристика становится вновь падающей. Разрядный ток возрастает при резком снижении разности потенциалов на электродах газового промежутка, и разряд переходит либо в дуговой, либо в искровой, в зависимости от величины балластного сопротивления цепи. Разогрев катода может быть осуществлен не только бомбардировкой ионами, но и путем контактирования электродов с последующим их разведением (электрическая дуга Петрова). Эмиссия электронов может быть осуществлена и с холодного катода (автоэмиссия), однако только при очень сильных полях ($E = 10^6$ *в/см* $= 10^8$ *в/м*), которые возникают у катода при очень малых (моле-

кулярных) расстояниях между электродами. Все виды самостоятельных разрядов в газе принято подразделять по их внешней форме на искровые, тлеющие и дуговые. Первые возникают в газах нормальной и повышенной плотности, если источники питания обладают большими внутренними сопротивлениями и резко падающими вольтамперными характеристиками $U = f(I)$. Молния, разряд конденсатора, скользящие поверхностные разряды на изоляторах и внутренний пробой диэлектрика являются примерами искрового разряда.

Тлеющий разряд возникает между электродами газового промежутка при пониженном давлении газа. Он используется, например, в устройствах с холодными электродами (газосветные лампы и плазмовые радиолампы), в диодах с горячим катодом (газотроны) и триодах с горячим катодом и управляющей сеткой (тиратроны).

Дуговой разряд в газе происходит при горячем катоде и мощном источнике питания. Напряжение между электродами дуги определяется экспериментальным соотношением Айртон

$$U = \alpha + \beta a + \frac{\gamma + \delta a}{I}, \qquad (36,10)$$

где α, β, γ, δ — характеристические параметры дуги, a — длина газового промежутка (оперативный параметр). Из выражения (36,10) следует, что мощность UI, потребляемая дугой, линейно зависит от тока и возрастает с увеличением газового промежутка a, т. е.

$$P_{\text{дуги}} = U \cdot I = (\alpha + \beta a) I + (\gamma + \delta a) = f(a) \cdot I + \varphi(a). \qquad (36,11)$$

В случае полей высокой частоты в атмосферном воздухе нормальной плотности может быть создан особый вид тлеющего разряда, называемый факельным, а в трубках с газом при пониженном давлении — безэлектродные разряды. При высоких напряжениях в атмосферном воздухе вокруг тонких проводов и около острых выступов, т. е. в тех местах, где напряженность электрического поля превышает пробивной градиент потенциала, равный для воздуха 30 *кв/см*, происходит локальный пробой воздуха в виде коронного или кистевого разряда. Этот тип разряда является промежуточным между искровым и тлеющим. При этом области возникновения самостоятельной проводимости газа (короны, кисти) ослабляют поле у острия и как бы продолжают поверхность проводника, несущего высокое напряжение, до такой величины, при которой градиент потенциала становится ниже пробивного.

Области технического применения газовых разрядов необычайно обширны. Длины искрового промежутка в свободном воздухе согласно закону Пашена определяют подводимое напряжение, и поэтому искровые разрядники служат для измерения высоких напряжений. По форме скользящего разряда может быть установлена полярность электродов, а по размеру и виду искры — величина и знак потенциала (клидонографы). Локальный пробой газа используется в газовых счетных трубках Гейгера, регистрирующих проникающие

ионизирующие частицы. Искровой разряд, сопровождающийся локальным нагревом выступов, используется также для чистовой обработки поверхностей металлических деталей.

Коронный разряд применяется для очистки газов от пыли (каттерели) и для дезинфекции воды в закрытых водоемах. Наконец, искра используется для возбуждения высокочастотных затухающих колебаний в радиоустановках местного значения. Тлеющий разряд вследствие малого расхода энергии на единицу светового потока служит экономичным источником света в газосветных лампах всевозможного назначения (осветительные, рекламные, сигнальные лампы). По длине факельного свечения определяют частоту и мощность поля, создаваемого высокочастотными генераторами. Шнуровая плазма (полностью ионизированный газ) газового разряда встречается в современных установках для исследований управляемых термоядерных реакций.

Технические применения дугового разряда в газе вытекают из следующих свойств дуги: а) выпрямлять ток, так как пропускным направлением будет та полярность электродов, при которой горячий электрод является катодом (ртутные и игнотронные выпрямители); б) создавать высокую локальную температуру; в) излучать свет большой яркости (кратер дуги), что используется в прожекторах и проекционных установках; г) возбуждать колебания высокой частоты в электрических колебательных контурах благодаря падающей вольтамперной характеристике (дуговые генераторы).

Самостоятельный разряд успешно служит средством защиты и предохранения силовых сетей от перенапряжений. Такими предохранителями снабжаются высоковольтные линии передач и трансформаторы.

При соответствующем режиме тлеющего разряда происходит распыление материала катода, таким путем осуществляется металлизация поверхностей для получения малых зеркал и полупрозрачных пластин.

Разрядные трубки, наполненные газами при различных давлениях, широко используются в лабораторной практике для осциллографирования и стабилизации напряжений, для устройства реле и возбуждения высокочастотных колебаний (тиратроны, магнетроны) в качестве вакуумных приборов для разгона ионов (камеры циклотронов, разрядные трубки) и для спектрографических анализов.

Лекция 37

МАГНИТНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Движение электрического заряда означает перемещение присущего заряду электрического силового поля. Кинетика потенциального электрического поля проявляется в форме возникающего вихревого магнитного поля, охватывающего ток. Для обнаружения

магнитного поля в качестве индикатора может служить ферромагнитный стержень, обладающий свободой вращения (например, магнитная стрелка), или вспомогательный подвижной контур тока (рис. 37-1).

Подобно электрическому полю, магнитное вихревое поле также характеризуют напряженностью H, однако определение этого понятия связано уже не с зарядом, как это было в случае потенциального электрического поля, а с током, т. е. движением электричества. Пусть, например, положительный точечный заряд движется в диэлектрической среде с относительной скоростью v, составляющей некоторую долю $\beta = \frac{v}{c}$ от скорости c возникновения электрического поля. С такой же относительной скоростью происходит и перемещение электрического поля заряда. В некоторой точке на расстоянии r от заряда электростатическое поле характеризуется вектором диэлектрического смещения $D = \frac{e}{r^2}$. Представляя магнитное поле как отображение движения (изменения) электрического поля и учитывая ориентировку стрелочного магнитного индикатора, вектор магнитной напряженности можно записать в виде (см. рис. 37-1)

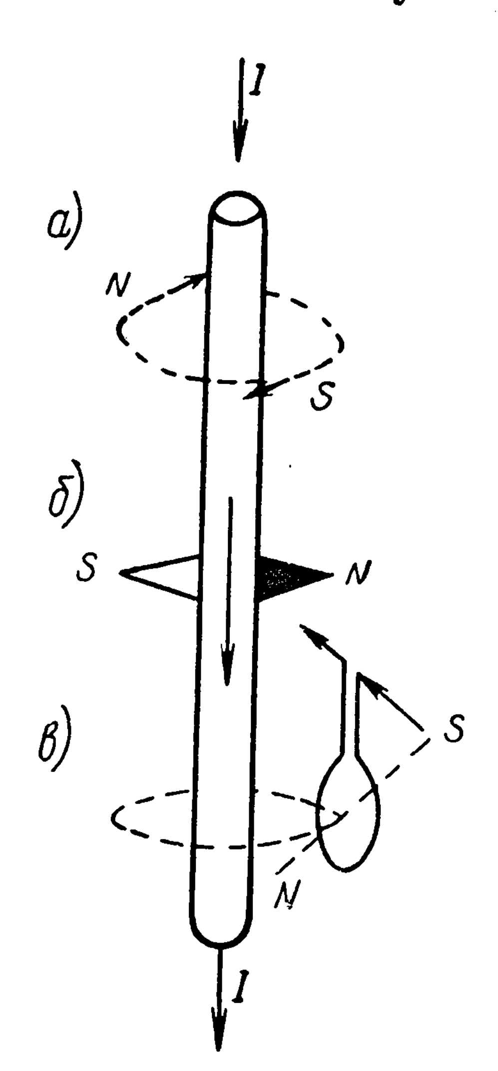


Рис. 37-1. Магнитное поле тока:

а) вихревая магнитная линия; *б*) положение магнитной стрелки относительно тока; *в*) положение вспомогательной рамки с током I

$$\vec{H} = \left[\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{D}\right] = \left[\frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{e}{\vec{r^2}}\right]. \qquad (37,1)$$

Отсюда

$$H = \frac{v}{c} \cdot \frac{e}{r^2} \cdot \sin\left(\frac{v}{c}\widehat{,\ D}\right), \qquad (37,2)$$

где e и H выражены в абсолютной электростатической системе единиц (а. э. е.). Распределение магнитной напряженности по сфере радиуса r, окружающей движущийся заряд e, и направление линий напряженности магнитного поля показаны на рис. 37-2.

В случае движения не одиночного точечного заряда, а направленного перемещения многих зарядов, т. е. при протекании за время dt некоторого количества электричества $dq = Idt = iS\,dt$ соотношение (37,2) в той же системе единиц примет вид

$$dH = \frac{iS\,dl}{c \cdot r^2} \cdot \sin(\widehat{i,\ r}) = \frac{dV}{cr^3}[\vec{i} \cdot \vec{r}], \qquad (37,3)$$

где $dV = S \cdot dl$ — элемент объема, содержащий движущийся заряд dq. Выбирая для измерения электрического тока единицу в $c = 3 \cdot 10^{10}$ раз более крупную, чем электростатическая единица тока, т. е. полагая одну абсолютную электромагнитную единицу

тока (а. э. м. е.) равной $3 \cdot 10^{10}$ а. э. е. тока, или равной 10 *а*, получим равенство (37,3) в виде

$$dH = \frac{Idl}{r^2} \cdot \sin \alpha \qquad (37,4)$$

— формула Лапласа, где I выражено в абсолютной электромагнитной системе единиц (а. э. м. е.).

Таким образом, направленное поступательное перемещение зарядов и вихревое магнитное поле, отображающее движение электрического поля этих зарядов, представляют собой две стороны единого электромагнитного процесса, называемого электрическим током. Это единство выражается экспериментальным законом Био и Савара, по которому при наличии тока для любой точки окружающего пространства справедливо соотношение

$$H = kI, \qquad (37,5)$$

где k — коэффициент, зависящий от конфигурации контура тока, расстояния до линии тока и выбора единиц измерения.

Линейный проводник с током является важным практическим случаем образования магнитного поля.

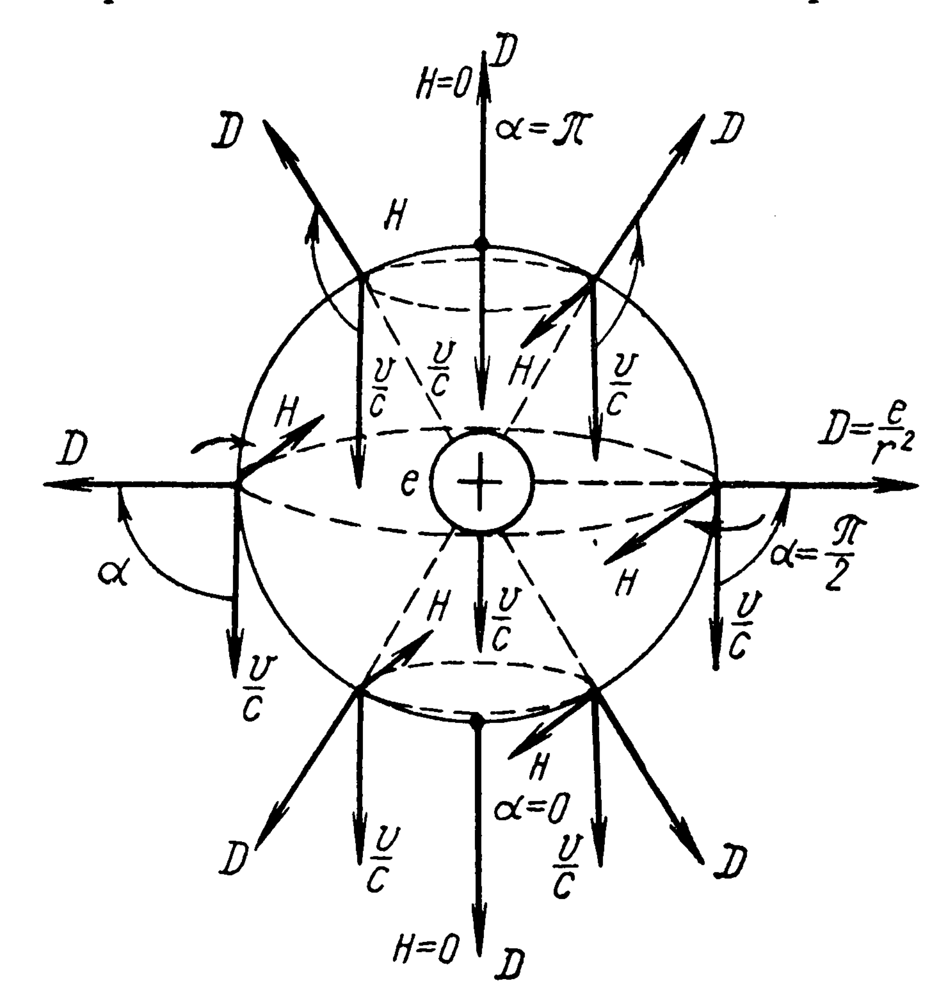


Рис. 37-2. Магнитное поле вокруг движущегося заряда *e*

Для прямолинейного, бесконечно длинного и тонкого проводника (рис. 37-3, *а*) имеем $r = \frac{r_0}{\cos \varphi}$ и $l = r_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi$, так что

$$dl = \frac{r_0}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Имея в виду, что $\sin \alpha = \cos \varphi$, после подстановки этих значений в (37,4) получим

$$dH = \frac{I}{r_0} \cos \varphi \, d\varphi \qquad (37,6)$$

или после интегрирования (37,6) в границах изменения угла φ от $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ до $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ находим

$$H = \frac{I}{r_0} \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2I}{r_0}, \qquad (37,7)$$

где I выражена в а. э. м. е., или

$$H = \frac{0{,}2I}{r_0},$$

где I в амперах.

Полагая в формуле (37,7) $r = 1$ *см* и $I = 0{,}5$ а. э. м. е. $= 5a$, определяем единицу магнитной напряженности в системе (а. э. м. е.) — 1 эрстед (*э*).

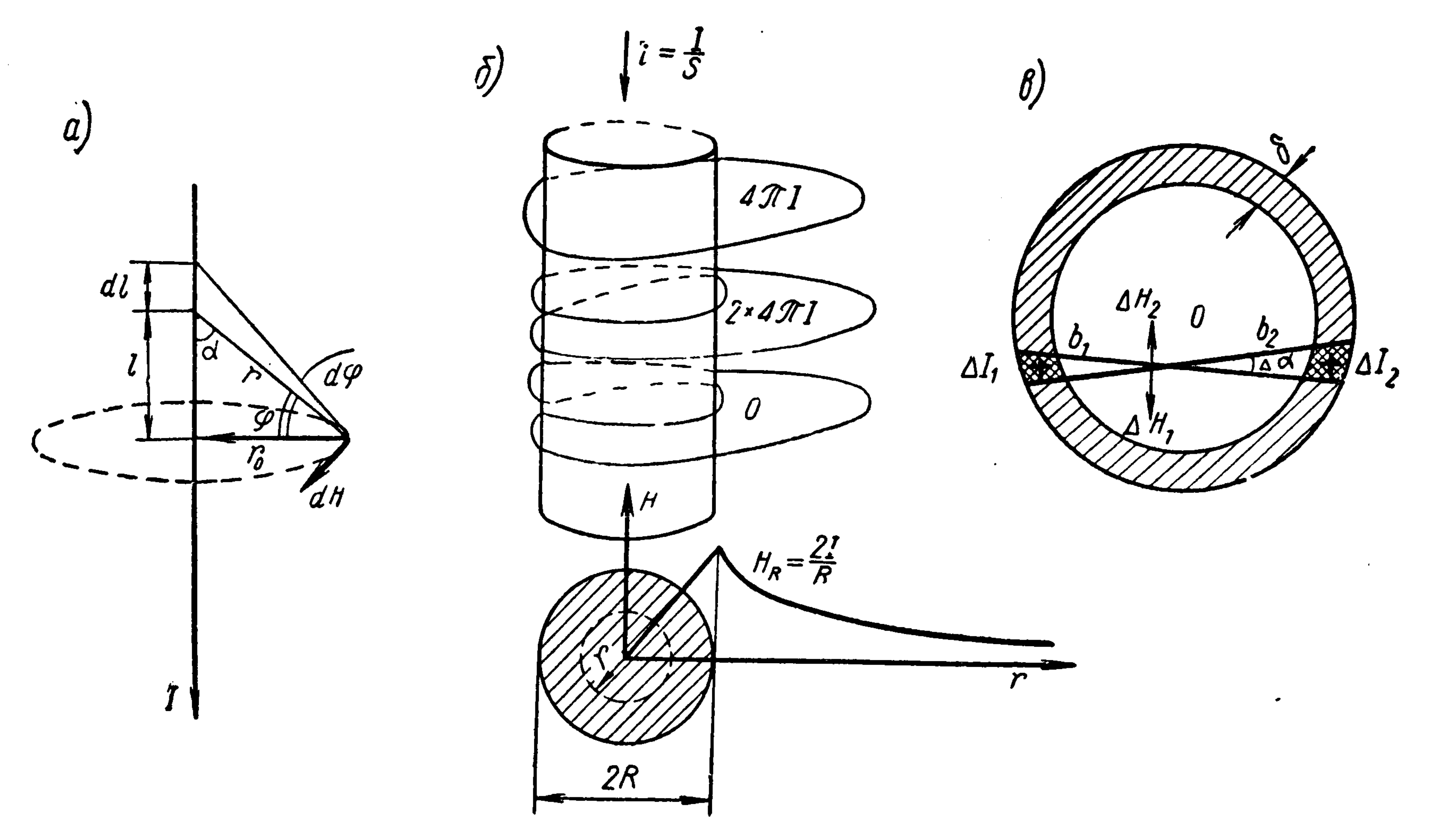


Рис. 37-3. Магнитное поле прямого тока:

а) линейный бесконечно длинный провод; *б*) цилиндрический провод; *в*) трубчатый провод (ток течет от нас)

В системе СИ *, в которой четвертой независимой единицей для электромагнитных явлений принят ампер, единицей напряженности магнитного поля будет

$$1\,\frac{a}{м},\quad \text{или}\quad 1\,\frac{ампер \cdot виток}{метр} = 4\pi \cdot 10^{-3}\ э.$$

Направление вектора H может быть найдено по правилу вращения правовинтового штопора при его поступательном перемещении вдоль направления вектора плотности тока (рис. 37-2, 37-3). Распространение электромагнитной энергии также происходит в направлении поступательного движения штопора, если его рукоятку вращать в пределах прямого угла от вектора D к вектору H (см. рис. 37-2).

Вихревой характер магнитного поля проявляется также при определении циркуляции вектора напряженности поля. В потен-

* Международная система единиц сокращенно обозначается СИ (система интернациональная).

циальном электрическом поле эта величина равна нулю для любого замкнутого контура.

Выбрав в магнитном поле тока произвольный контур, охватывающий ток, получим

$$\oint_l H dl = 2I \int_0^{2\pi} d\alpha = 4\pi I \text{ (а. э. м. е.)}. \qquad (37,8)$$

Таким образом, циркуляция вектора H определяется значением тока, охватываемого избранным контуром и числом охватов тока. Если прямолинейный цилиндрический проводник с током (рис. 37-3, *б*) имеет достаточно большой диаметр $2R$, то, пользуясь соотношением (37,8), можно найти $H(r)$ для значений $r \leqslant R$. Согласно формулам (37,7), (37,8) для любого значения r $(0 < r < R)$ имеем

$$H_r \cdot 2\pi r = 4\pi I \frac{r^2}{R^2}, \qquad (37,9)$$

или

$$H_r = \frac{2I}{R^2} r. \qquad (37,10)$$

Таким образом, внутри цилиндрического проводника магнитная напряженность линейно возрастает от $H=0$ при $r=0$ до $H_R = \frac{2I}{R}$ при $r = R$ (рис. 37-3, *б*). Выбирая в произвольной точке просвета трубчатого проводника (рис. 37-3, *в*) достаточно малый секторный угол $\Delta\alpha$ при $i = \text{const}$, найдем

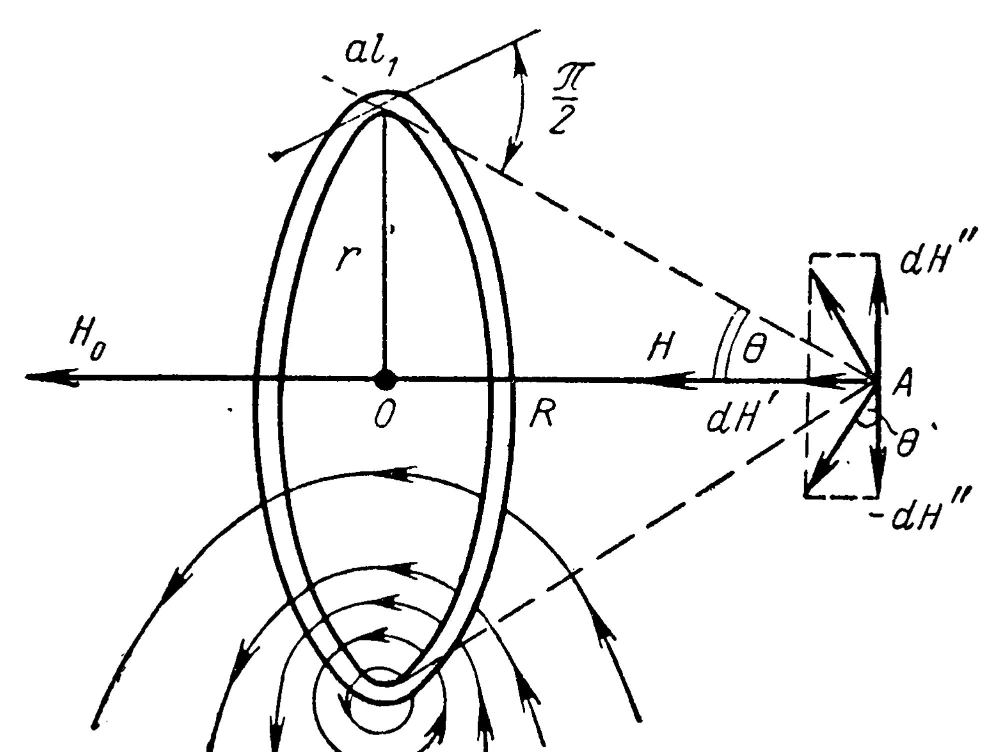


Рис. 37-4. Магнитное поле кругового тока

$$\frac{\Delta I_1}{b_1} = \frac{\Delta I_2}{b_2} \quad \text{или} \quad \Delta\vec{H}_1 + \Delta\vec{H}_2 = 0.$$

Вне проводов остается справедливым соотношение (37,7), в котором отсчет расстояния r_0 производится от оси проводника. Другим практически важным случаем является магнитное поле кругового тока (рис. 37-4).

Рассмотрим магнитную напряженность по оси кругового тока радиуса r в расстоянии R от его центра. Согласно формуле Лапласа (37,4) имеем

$$dH' = dH \sin\theta = \frac{I_r}{(R^2 + r^2)^{3/2}} dl, \qquad (37,11)$$

так как

$$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

После интегрирования (37,11) получаем

$$H_R = \frac{2\pi I r^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \qquad (37,12)$$

Для точки в центре кругового тока ($R = 0$)

$$H_0 = \frac{2\pi I}{r} \text{ (а. э. м. е)} = \frac{I}{2r} \cdot 10^3 \ \frac{а}{м}, \qquad (37,13)$$

а для расстояний $R \gg r$

$$H = \frac{2I\pi r^2}{R^3} = \frac{2IS}{R^3} = \frac{2M_\mu}{R^3} \text{ (а. э. м. е.)} = \frac{I \cdot S}{2\pi R^3}\left(\frac{а}{м}\right). \qquad (37,14)$$

Вектор $M_\mu = IS$ играет роль магнитного момента контура. Таким образом, круговой ток представляет собой магнитный диполь, или элементарный магнитный листок. Та сторона плоскости контура, на которой ток представляется текущим против часовой стрелки, будет соответствовать полюсу N, а обратная (ток течет по часовой стрелке) — полюсу S.

Пользуясь выражением (37,14), можно сопоставить магнитный и механический моменты для орбитального и собственного спинового вращения электрона в атоме.

В случае орбитального кругового движения электрона магнитный момент

$$M_\mu = I \cdot S_0 = \frac{ev}{c \cdot 2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2c} \text{ (а. э. м. е.)}, \qquad (37,15)$$

где e выражено в (а. э. е.); импульс механического момента

$$M_{\text{мех}} = m_0 v r. \qquad (37,16)$$

Отсюда магнито-механическое, или гиромагнитное, соотношение для орбитального вращения электрона получим в виде

$$\left(\frac{M_\mu}{M_{\text{мех}}}\right)_0 = \frac{e}{2m_0 c} = \text{const}. \qquad (37,17)$$

Для собственного вращения электрона по квантовой механике имеем в той же системе единиц

$$\left(\frac{M_\mu}{M_{\text{мех}}}\right) = \frac{\frac{1}{2}\hbar \frac{e}{m_0 c}}{\frac{1}{2}\hbar} = \frac{e}{m_0 c} = 2\frac{M_\mu}{M_{\text{мех}}} = g\left(\frac{M_\mu}{M_{\text{мех}}}\right)_0. \qquad (37,18)$$

Постоянство соотношения между магнитным и механическим моментами системы было подтверждено опытами Эйнштейна и де-Гааза, в которых была обнаружена намагниченность ферромагнитного стержня при его вращении вокруг продольной оси. Для любой другой частицы с большой массой покоя спиновое магнито-механическое соотношение будет соответствовать значению $g > 2$.

Внутри материала имеется большое число замкнутых электронных контуров тока, каждый из которых обладает собственно магнитным моментом. В зависимости от результата наложения этих полей в пределах атомных, молекулярных и других структурных элементов вещества материалы приобретают различные магнитные свойства.

Лекция 38

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

Закон Био и Савара устанавливает прямую пропорциональность между током I и магнитной напряженностью H в избранной точке поля вне зависимости от свойств среды. Однако в любом веществе имеются микроконтуры токов, создаваемые собственным вращением электронов и их обращением вокруг атомных ядер, а также спинами самих атомных ядер. Взаимодействие таких микроконтуров тока с внешним магнитным полем определяет результирующее магнитное поле тока в среде. При макрохарактеристике магнитного поля влияние среды учитывается специфической для вещества величиной, называемой магнитной проницаемостью среды μ_c*, поэтому макроскопической характеристикой магнитного поля в среде является не вектор магнитной напряженности H, а вектор магнитной индукции

$$B = \mu H, \tag{38,1}$$

который выражается в гауссах по системе (а. э. м. е.) и в теслах по системе СИ (с размерностью $MT^{-2}I^{-1}$), причем 1 *тл* = 10^4 *гс*. Обозначим через α угол между вектором B и нормалью к произвольно выбранной площадке dS, тогда элементарный поток вектора магнитной индукции, или, иначе, магнитный поток, приходящийся на эту площадку, будет равен

$$d\Phi = B \cos\alpha \cdot dS = B_n \cdot dS. \tag{38,2}$$

Магнитный поток представляет собой скалярную величину, которая в системе (а. э. м. е) выражается в максвеллах, и для конечной площади S составляет

$$\Phi = \int_S B_n \cdot dS, \tag{38,3}$$

---

* В абсолютной электромагнитной системе единиц μ_c считается безразмерной величиной, для вакуума равной единице.

В Международной системе единиц (СИ) магнитная проницаемость вакуума принимает значение $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{н}{а^2}$, поэтому абсолютная магнитная проницаемость среды, содержащей вещество, будет равна $\mu_c = \mu_0 \cdot \mu$, где μ — относительная магнитная проницаемость.

где интегрирование распространено на всю рассматриваемую площадь. Магнитный поток в системе СИ вычисляется в веберах (с размерностью $L^2MT^{-2}I^{-1}$), причем 1 *вб* $= 10^8$ *мкс* $= 1$ *тл* $\cdot$ *м*^{2}. Так как магнитное поле представляет собой вихревое поле, то линии магнитной индукции всегда являются замкнутыми. Магнитный поток Ф может быть охарактеризован общим числом линий индукции; в неразветвленной магнитной цепи остается постоянным вдоль всего пространственного пути, по которому замыкаются линии магнитной индукции. При переходе вдоль линий индукции из среды с магнитной проницаемостью μ_1 в среду с проницаемостью $\mu_2 \neq \mu_1$

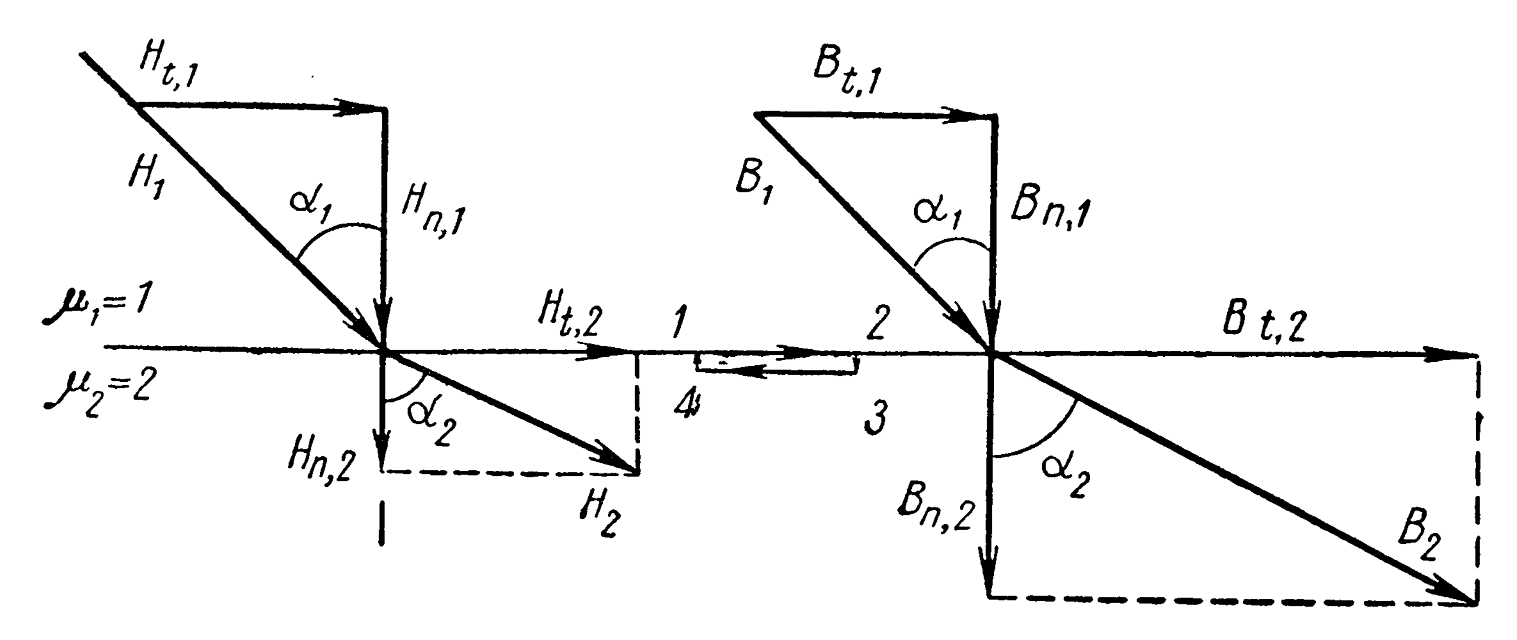


Рис. 38-1. Изменение направления вектора магнитной индукции B при переходе из одной среды в другую

нормальная составляющая вектора индукции не изменяется (рис. 38-1), так что

$$B_{n,1} = B_1 \cos\alpha_1 = B_2 \cos\alpha_2 = B_{n,2}. \qquad (38,4)$$

Если нет токов, текущих вдоль поверхности раздела, то для замкнутого контура *1 2 3 4* (см. рис. 38-1) у поверхности раздела имеем

$$\oint H_t \cdot dl = 0$$

или

$$H_{t,1} = H_{t,2}, \qquad (38,5)$$

в то время как

$$\frac{B_{t,1}}{B_{t,2}} = \frac{B_1 \sin\alpha_1}{B_2 \sin\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (38,6)$$

Таким образом, на границе этих сред выполняется условие

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \qquad (38,7)$$

В вакууме нет атомных микроконтуров тока и, следовательно, отсутствует добавочное влияние среды, так что в абсолютной электромагнитной системе единиц для вакуума $B = H_0$ и $\mu_0 = 1$. Однако в любой другой системе единиц магнитная проницаемость вакуума

уже не будет безразмерной величиной, равной единице; например, в системе СИ

$$[H]=\left[\frac{a}{м}\right] \quad и \quad [\mu_0]=\left[\frac{в\cdot сек}{a\cdot м}\right],$$

и, следовательно,

$$[B]=\left[\frac{в\cdot сек}{м^2}\right],$$

т. е.

$$[B]\neq[H_0].$$

В этой системе уравнения рационализованы в отношении множителя 4π и магнитная проницаемость вакуума составляет

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\left[\frac{в\cdot сек}{a\cdot м}\right]$$

и называется магнитной постоянной вакуума. В системе абсолютных электромагнитных единиц для вектора магнитной индукции принята единица с другим наименованием по сравнению с магнитной напряженностью H. По выражению (38,1) 1 *гс* представляет собой магнитную индукцию в вакууме при магнитной напряженности в нем, равной 1 *э*, а по формуле (38,2) единица магнитного потока — максвелл соответствует магнитному потоку при $B_n = 1$ *гс* и $S = 1$ *см*^{2}. Чтобы достичь однообразия в числовом выражении магнитной проницаемости среды, обычно приводят не абсолютные μ', а относительные значения этой величины $\mu=\frac{\mu'}{\mu_0}$, которые не зависят от выбора единиц измерения. Согласно (37,3) и (38,1), полная магнитная индукция в любой точке магнитного поля тока I выразится формулой

$$B=\mu I\oint_l\frac{[\vec{dl}\times\vec{r}]}{r^3}=\mu\oint_V\frac{[\vec{i}\times\vec{r}]}{r^3}dV, \qquad (38,8)$$

поскольку элемент тока $Idl=idV$, где $i=\frac{dI}{dS}$ — вектор плотности тока. Магнитный поток является той реальной величиной, которая используется при расчетах электромеханических устройств (электромагниты, реле, генераторы, двигатели) и при эксплуатации линий передач (трансформаторы). В общем случае выяснение конфигурации магнитного потока, который зависит как от магнитных свойств, так и от расположения окружающих тел, затруднительно. Чтобы установить основную зависимость магнитного потока от тока и окружающей среды, рассмотрим простейший случай. Пусть, например, T (рис. 38-2) — тороид сечением S и осевой длиной l из материала с магнитной проницаемостью μ, охваченный n витками тока. Так как каждый виток представляет собой элементарный магнитный листок, то при достаточно плотном расположении витков весь тороидальный соленоид представится магнитным кольцом с

однородной магнитной напряженностью H внутри тороида. Согласно выражению (37,8), циркуляция вектора магнитной напряженности вдоль замкнутой осевой линии тороида в системе (а. э. м. е.) будет представлена в виде

$$Hl = 4\pi In \tag{38,9}$$

или после умножения обеих частей на μS и после соответствующих преобразований получим

$$\Phi = \mu HS = \frac{4\pi In}{\frac{l}{\mu S}} \tag{38,10}$$

— формула Гопкинсона. Она может быть записана в виде, аналогичном закону Ома в цепи электрического тока, т. е.

$$\Phi = \frac{F_\mu}{R_\mu}, \tag{38,11}$$

где $F_\mu = 4\pi In$ называют намагничивающей силой, выражаемой в системе (а. э. м. е.) в гильбертах и в системе СИ в ампер-витках, причем $1\ гб = \frac{10}{4\pi}\ ав$; $R_\mu = \frac{l}{\mu S}$ — сопротивлением магнитному потоку, или сопротивлением магнитопровода в *гб/вб* (система СИ).

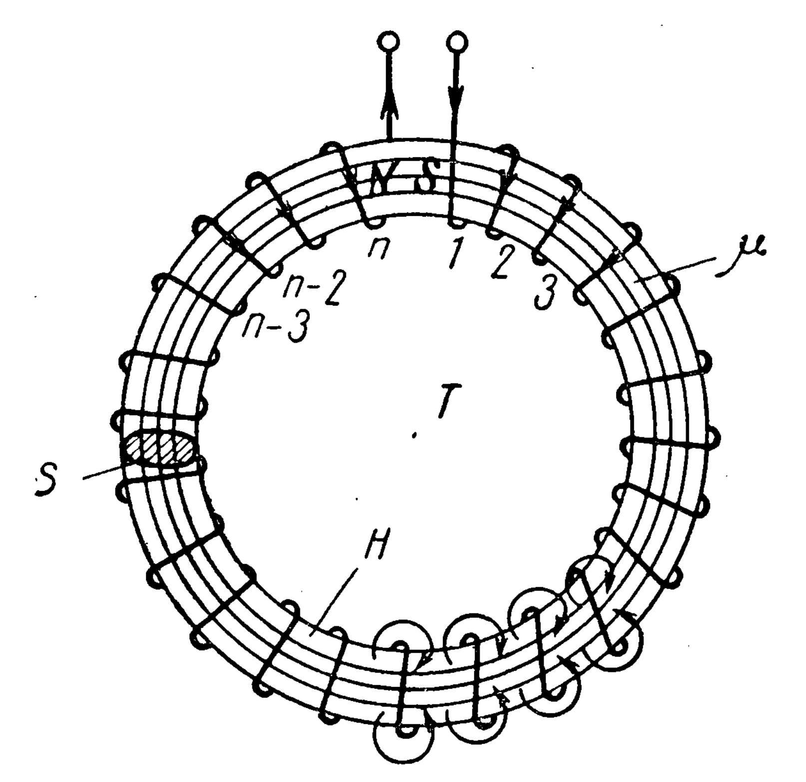


Рис. 38-2. К выводу закона магнитной цепи

Расчет по формуле (38,10) возможен лишь в тех случаях, когда определена конфигурация магнитной цепи (магнитного потока) и выяснены магнитные характеристики применяемых материалов. В частности, соотношение (38,10) без значительных погрешностей может быть применено к длинным (по сравнению с диаметром витков) соленоидам без ферромагнитных сердечников. За длину магнитной цепи в этом случае может быть принята длина соленоида. В случаях коротких катушек возбуждения магнитного потока, надетых на замкнутые, или почти замкнутые ферромагнитные сердечники, формула Гопкинсона может быть представлена в виде

$$F_\mu = \sum_{1}^{z} F_{\mu,\, i}, \tag{38,12}$$

где $F_{\mu,\, i}$ — намагничивающая сила, необходимая для создания магнитного потока на i-м участке магнитной цепи. При отсутствии разветвлений в магнитной цепи, т. е. при выполнении условия $\Phi = \mathrm{const}$, с учетом зависимости магнитной проницаемости μ ферромагнетика для различных магнитных индукций в материале, при одном и том же токе I (протекающем в одном и том же направлении

по всем виткам катушек возбуждения) и при малом воздушном зазоре λ, для которого $\mu = 1$, закон магнитной цепи можно записать в виде

$$F_{\mu} = 4\pi I n = \Phi\left(\sum_{1}^{z-1} \frac{l_i}{\mu_i S_i} + \frac{\lambda}{S_{\text{в}}}\right) = \sum_{1}^{z} F_{\mu, i} \qquad (38,13)$$

Так как магнитная проницаемость ферромагнетиков в сотни раз превышает значение той же величины для воздуха, то при неизменном сечении магнитного потока магнитное сопротивление 1 *мм* воздушного зазора эквивалентно сопротивлению нескольких десятков сантиметров длины ферромагнетика. Для коротких катушек без замкнутых сердечников формула (38,10) совсем неприменима. Так как магнитное сопротивление определяется зависимостью, подобной электрическому сопротивлению проводов, а закон магнитной цепи—зависимостью, подобной закону Ома, то могут рассматриваться как последовательные, так и параллельные соединения магнитных сопротивлений отдельных участков магнитных цепей (рис. 38-3).

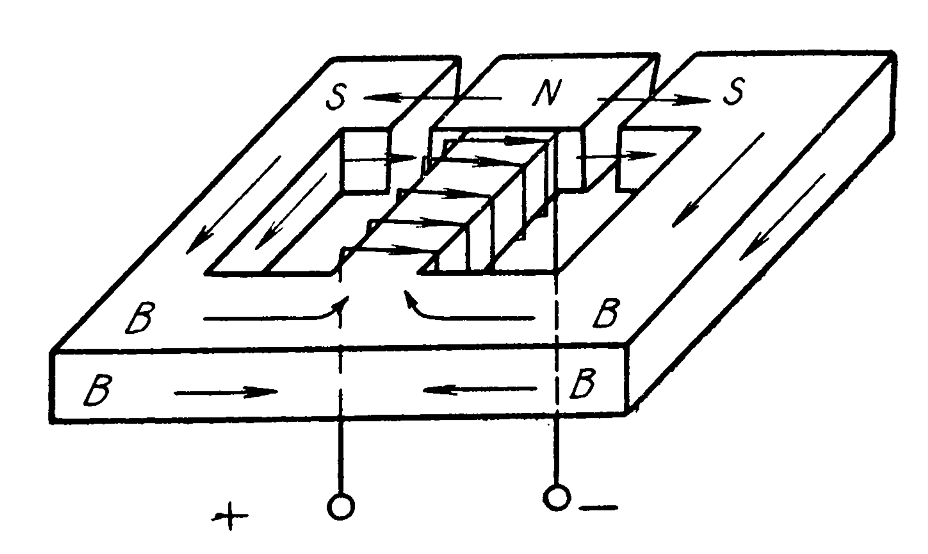


Рис. 38-3. Параллельно-последовательное распределение магнитного потока

Лекция 39

МАГНИТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРИАЛОВ

В основе реакции, которую вызывает в любой среде внешнее магнитное поле, лежит явление электромагнитной индукции. Оно создает диамагнитный эффект, вытекающий из правила Ленца, в атомных индукционных процессах. В тех случаях, когда магнитные моменты молекул среды не равны нулю (магнитно-дипольные молекулы), на диамагнитный эффект накладывается парамагнитный. Он заключается в появлении механического момента, под действием которого носители элементарных магнитных моментов ориентируются по внешнему полю.

Для простоты рассмотрим классический случай (рис. 39-1) обращения отдельного электрона в атоме вокруг ядра с циклической частотой ω_0 по круговой орбите радиуса r, плоскость которой расположена нормально к вектору магнитной напряженности H внешнего магнитного поля ($\Theta = 0$). В результате электромагнитной индукции радиус орбиты, с точностью до первого порядка относительно H, остается неизменным (теорема Лармора); происходит из-

менение скорости движения электрона в соответствии с правилом Ленца. Центростремительная сила, действующая на электрон в новых условиях его движения ($F_{ц1} = m\omega_1^2 r$), будет равна сумме первоначальной центростремительной силы

$$F_{ц\,0} = \frac{e^2}{r^2} = m\omega_0^2 r$$

и пондеромоторной силы электромагнитного происхождения (Лоренцова сила), возникающей от движения электрона во внешнем поперечном магнитном поле и равной

$$F_{э.\,м} = HIl = -H\,\frac{e\cdot\omega_1}{c\cdot 2\pi}\cdot 2\pi r = -\frac{1}{c}He\omega_1 r, \qquad (39,1)$$

т. е.

$$F_{ц\,1} = F_{ц\,0} + F_{э.\,м} \qquad (39,2)$$

или

$$m\omega_1^2 r = m\omega_0^2 r \pm \frac{1}{c}He\omega_1 r,$$

откуда

$$\omega_1 = \pm\frac{eH}{2mc} \pm \sqrt{\left(\frac{eH}{2mc}\right)^2 + \omega_0^2}. \qquad (39,3)$$

Для всех реальных магнитных напряженностей вплоть до самых больших порядка $10^4 э \approx 10^6 \frac{ав}{м}$

$$\frac{e}{2mc}H \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{mr^3}}, \qquad (39,4)$$

так что

$$\omega_1 \approx \omega_0 \pm \frac{e}{2mc}\cdot H = \omega_0 \pm \omega_н \gtrless \omega_0.$$

Здесь $\omega_н = \frac{e}{2mc}H$ представляет собой ларморовскую циклическую частоту, зависящую от величины воздействия внешнего поля на орбитальное движение электрона в атоме.

Если напряженность внешнего магнитного поля составляет с нормалью к плоскости орбиты угол $\Theta \neq 0$, то диамагнитный эффект от внешнего поля также определяется величиной $\omega_н$, однако в этом общем случае $\omega_н$ представляет уже частоту возникающей ларморовской прецессии электронной орбиты вокруг направления вектора H (см. рис. 39-1).

Магнитный момент, соответствующий ларморовской прецессии, согласно правилу Ленца, направлен против внешнего поля и, согласно выражению (37,15), составляет

$$M_\mu = M_{орб} = IS_{орб} = \frac{e\omega_н}{c\cdot 2\pi}\cdot S_{орб} = \frac{e^2 S_{орб}}{4\pi mc^2}H. \qquad (39,5)$$

Для атома при сферической симметрии электронной оболочки из Z электронов имеем $S_{орб} = \pi\overline{r_i^2}$, где $\overline{r_i}$ — изменяющаяся во времени

проекция радиуса орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную $H\left(\bar{r}_i^2 = \frac{2}{3}\bar{r}^2 Z^2\right)$. Таким образом,

$$M_{\text{ат}} = -\frac{Ze^2H}{6mc^2}\bar{r}^2. \qquad (39,6)$$

Результирующий магнитный момент J единицы объема вещества называют вектором намагниченности. Для несильных стационарных полей J принимают пропорциональным H, так что

$$J = \sum_{1}^{n} M_{\text{ат}} = \chi H, \qquad (39,7)$$

где χ — магнитная восприимчивость среды. Пользуясь теоремой Остроградского — Гаусса, для потока вектора намагниченности J (направленного вдоль H), приходящегося на площадь в 1 $см^2$, имеем

$$B = H + 4\pi J = H + 4\pi\chi H = \mu H \qquad (39,8)$$

и, значит,

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \qquad (39,9)$$

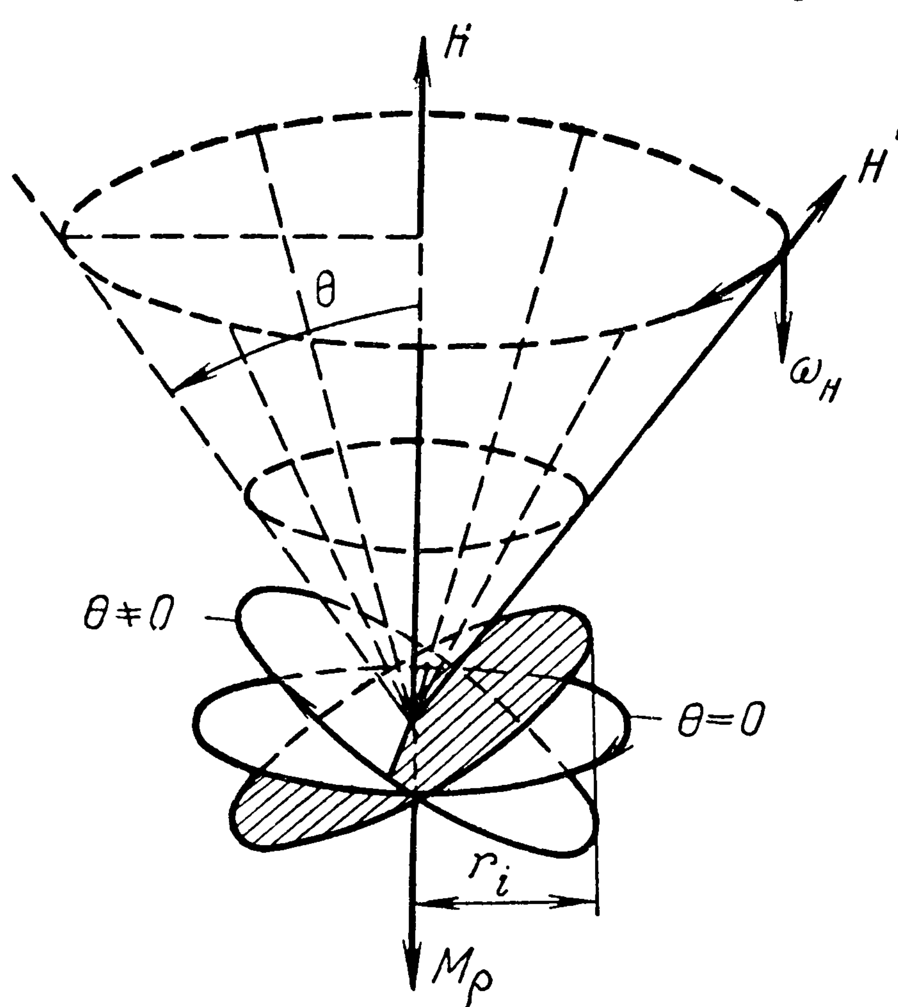


Рис. 39-1. Прецессия электронной орбиты атома в магнитном поле

Магнитная восприимчивость среды $\chi = \frac{J}{H} \gtrless 0$ является исходным характеристическим параметром, изменяющимся при воздействии на вещество среды внешним магнитным полем. Из выражений (39,6), (39,7) следует, что для диамагнетиков магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{nZe^2}{6mc^2}\cdot\bar{r}^2 \qquad (39,10)$$

— формула Ланжевена, где $\bar{r}^2$ — не зависящий от температуры квадрат среднего расстояния электрона от центра атома. Полагая $\bar{r}^2 \approx 10^{-16}$ $см^2$, получим для грамм-атомной восприимчивости $\chi_а \approx \approx 10^{-6}Z$ (рис. 39-2, кривая *1*).

Как уже отмечалось, в электрической цепи без сопротивления (например, в случае контура тока при орбитальном движении электрона в атоме) или при сверхпроводимости материала индуцированный ток протекает все время, пока существует возбудившее его внешнее динамическое магнитное поле. Магнитный момент, связанный с этим индуцированным током, есть температурно независимый

диамагнитный момент, который возникает во всех веществах под действием внешнего магнитного поля.

В тех случаях, когда направление внешнего магнитного поля не совпадает с осью симметрии молекулярной системы или когда атомы и молекулы обладают некоторым результирующим магнитным моментом, наряду с диамагнитным (индукционным) эффектом будет наблюдаться и парамагнитный (ориентационный) эффект. В зависимости от того, какой из этих эффектов значительнее, вещество будет диамагнетиком ($\chi < 0$; $1 - \mu = 10^{-5} \div 10^{-7}$) или парамагнетиком ($\chi > 0$; $\mu - 1 = 10^{-3} \div 10^{-6}$).

Все технические материалы, за исключением ферромагнетиков, которые обладают свойством самопроизвольной намагниченности, принадлежат к диа- или парамагнетикам, т. е. имеют магнитную проницаемость, близкую к единице.

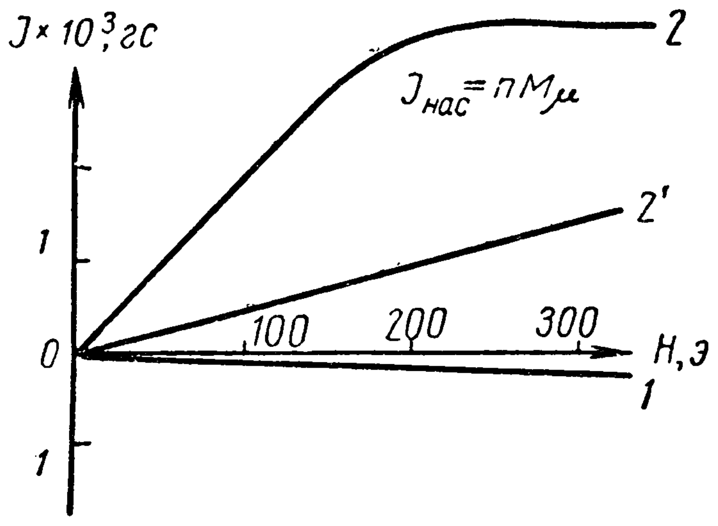


Рис. 39-2. Зависимость намагниченности J от магнитной напряженности H поля:

1 — для диамагнетика; 2 — для парамагнетика при T, близких к 0° К; 2′ — для парамагнетика при $T = 300°$ К

Характерным и необходимым признаком парамагнитного состояния вещества является наличие у атомов магнитных моментов при отсутствии внешнего магнитного поля. Однако эти моменты недостаточны для самопроизвольной упорядоченной ориентации в условиях беспорядочного температурного движения молекул.

Электронным спиновым парамагнетизмом обладают атомы и молекулы, имеющие нечетное число электронов, поскольку в этом случае спин всей системы не может быть равен нулю (например Na, NO, органические свободные радикалы).

Кроме того, парамагнетизм свойствен атомам и ионам с незаполненным внутренним слоем электронной оболочки, например, ионам Mn^{2+}, Cd^{3+}, U^{4+}, молекулярному кислороду (O_2), органическим бирадикалам, щелочным металлам, редкоземельным элементам, так называемым благородным металлам, солям железа, кобальта и никеля, а также и самим этим металлам при достаточно высоких температурах.

Спиновый магнитный момент электрона составляет

$$M_\mu = \frac{\hbar e}{2mc} \approx 10^{-20} \text{ (а. э. м. е.).} \qquad (39,11)$$

В сильном магнитном поле напряженностью $H \geqslant 10^4$ *э* энергия атомного диполя, обладающего таким моментом, будет равна

$$E_\mu = M_\mu \cdot H \geqslant 10^{-16} \text{ эрг} = 10^{-23} \text{ дж.}$$

Средняя кинетическая энергия беспорядочного движения молекул при комнатной температуре T по порядку величины соответствует

$$3\,kT = 10^{-13} \text{ эрг} = 10^{-20} \text{ дж,}$$

так что даже в очень сильных полях

$$\frac{E_\mu}{3kT} \approx 10^{-3} \ll 1.$$

В таком случае допустимо считать, что при n диполях в единице объема намагниченность парамагнетика

$$J = nM_\mu \frac{E_\mu}{3kT} = \frac{nM_\mu^2 H}{3kT} \qquad (39,12)$$

и, значит, магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{J}{H} = \frac{nM_\mu^2}{3k} \cdot \frac{1}{T} = \frac{C}{T}, \qquad (39,13)$$

где $C = \frac{nM_\mu^2}{3k}$ — постоянная Кюри.

Соотношение (39,13) представляет собой уравнение Ланжевена для парамагнетиков и выражает закон Кюри о зависимости магнитной восприимчивости от температуры.

Для парамагнитных кристаллов с ионной решеткой вследствие действия электрического поля кристалла на электроны соседних ионов более справедливо равенство

$$\chi = \frac{C}{T + \Delta}.$$

— формула Кюри—Вейса, где $\Delta \gtrless 0$.

При низких температурах, когда в сильных полях $\frac{M_\mu^2 H}{3kT} \to 1$, прямая пропорциональность между намагниченностью J и магнитной напряженностью H нарушается и намагниченность $J_{нас} = nM_\mu$ стремится к предельному значению, соответствующему магнитному насыщению (рис. 39-2, кривые *2,2'*). Атомные ядра имеют магнитные моменты примерно в тысячу раз меньшие, чем спиновый магнитный момент электрона. Магнитный момент протона

$$M_p = \frac{e\hbar}{2m_p c}$$

называют ядерным магнетоном. Так как $m_p = 1836 m_э$, то магнитный момент ядер создает в миллион раз меньшую магнитную восприимчивость.

Своеобразную форму спинового парамагнетизма проявляют ферромагнетики, т. е. вещества, обладающие свойством самопроизвольного намагничивания. К ним принадлежат железо, кобальт, никель, гадолиний и их сплавы, а также сплавы некоторых парамагнитных металлов. Связь между намагниченностью J и магнитной напряженностью H для ферромагнетиков представляется сложной, нелинейной и неоднозначной зависимостью, так что магнитная восприимчивость, как и магнитная проницаемость, являются функциями магнитной напряженности (рис. 39-3).

Магнитная напряженность $H_д$ в ограниченном образце ферромагнетика меньше, чем в отсутствии ферромагнетика, из-за размагничивающего действия его концов, на которых образуются некомпенсированные магнитные полюсы.

В абсолютной электромагнитной системе единиц, следовательно, имеем

$$H_д = H_0 - NJ, \tag{39,14}$$

где N — размагничивающий фактор, зависящий от формы ферромагнетика.

Таблица 21

Форма ферромагнетика	N
Тонкий диск нормально к полю	4π
Длинный цилиндр перпендикулярно к полю. .	2π
Сфера	$^4/_3\,\pi$
Эллипсоид $a_{\parallel}/b_{\perp} = 3{,}2$	$0{,}4\,\pi$
» $a_{\parallel}/b_{\perp} = 16$	$0{,}04\,\pi$
Длинный цилиндр вдоль поля	0

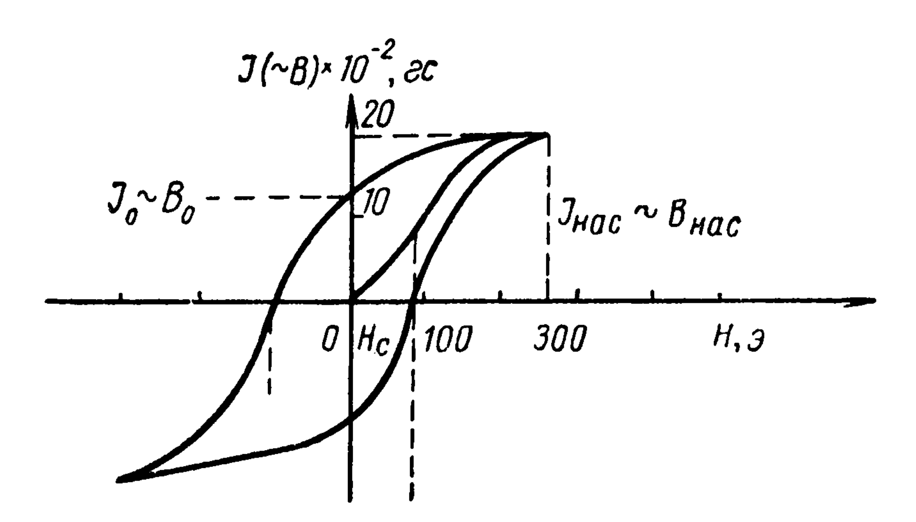


Рис. 39-3. Гистерезисная петля ферромагнетика: $B_{нас}$ — максимальная магнитная индукция (насыщение); B_0 — остаточная индукция; H_c — коэрцитивная сила

Из выражения (39,14) и (39,13) следует, что

$$H_д = \frac{1}{1+\chi N} H_0$$

и, значит,

$$J = \chi \cdot H_д = \frac{\chi}{1+\chi N} H_0 = \chi_{обр} H_0. \tag{39,15}$$

Отсюда магнитная восприимчивость образца (коэффициент при H_0, а не при $H_д$) зависит не только от вещества ферромагнетика, но и от формы образца.

Намагниченность ферромагнетиков, а следовательно, и магнитная индукция, не являются однозначными функциями магнитной напряженности H (рис. 39-3); они зависят от предшествующих состояний ферромагнетика (явление гистерезиса). Изменение намагниченности J происходит с отставанием по сравнению с изменением магнитной напряженности H. Намагниченность при $H = 0$ называют остаточной; ей соответствует остаточная индукция $B_0 = 4\pi J_0$, сохраняющаяся в намагниченном образце после исчезновения внешнего поля.

Магнитная напряженность (см. рис. 39-3), которая необходима для размагничивания образца, т. е. для уничтожения в нем остаточной индукции, обычно называется коэрцитивной силой H_c.

Намагниченность насыщения и максимальная магнитная индукция

$$B_{нас} = H_{д} + NJ_{нас}$$

являются предельными для данного ферромагнетика.

По аналогии с электрическим полем объемная плотность энергии магнитного поля

$$w_{м} = \frac{1}{8\pi} \mu H^2,$$

откуда при изменении магнитной индукции получаем

$$dw_{м} = \frac{1}{8\pi} HdB \text{ (а. э. м. е.)}.$$

Перемагничивание образца ферромагнетика сопровождается работой против молекулярно-магнитных сил, действующих внутри ферромагнетика (нагрев ферромагнетика). За один цикл перемагничивания единицы объема вещества эта работа составляет

$$A = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{-B_{нас}}^{+B_{нас}} H \cdot dB \; (э \cdot гс) \tag{39,16}$$

и на графике $B = f(H)$ она представляется площадью гистерезисной петли (см. рис. 39-3).

Эксперименты по гиромагнитным эффектам показали, что намагниченность ферромагнетиков определяется, главным образом, спиновыми моментами атомных электронов, причем магнито-механический фактор (см. 37,18) $g = (1{,}85 \div 2{,}0)$.

Взаимная связь молекулярных спиновых магнитных моментов в ферромагнетике может быть учтена, если рассматривать внешнее действующее магнитное поле $H_{д}$ и согласованное с ним дополнительное внутреннее молекулярное поле $H_{м}$, создаваемое взаимосвязанными ориентированными молекулярными диполями (поле Вейса), так что $H = H_{д} + H_{м}$.

Магнитная напряженность молекулярного поля в ферромагнетиках, которое пропорционально вектору намагниченности образца, настолько велика ($H_{м} \approx 10^6 э \gg H_{д}$), что ее ориентирующий эффект превосходит дезориентацию, вносимую беспорядочным движением молекул при всех температурах ниже некоторой температуры, называемой точкой Кюри T_c.

Если принять, что $H_{м} = \lambda J$, где λ — постоянная молекулярного поля ферромагнетика, то, согласно закону Кюри (39,13), для

суммарного поля ферромагнетика имеем

$$\frac{J}{H_д + \lambda J} = \frac{C}{T} \qquad (39,17)$$

или

$$\chi = \frac{J}{H_д} = \frac{C}{T - C\lambda} = \frac{C}{T - T_c}. \qquad (39,18)$$

Выражение (39,18) при температурах выше точки Кюри ($T > T_c$) соответствует формуле Кюри—Вейса для парамагнетиков. Таким образом, T_c — это та температура, выше которой магнетик теряет свои ферромагнитные свойства и становится парамагнетиком (рис. 39-4).

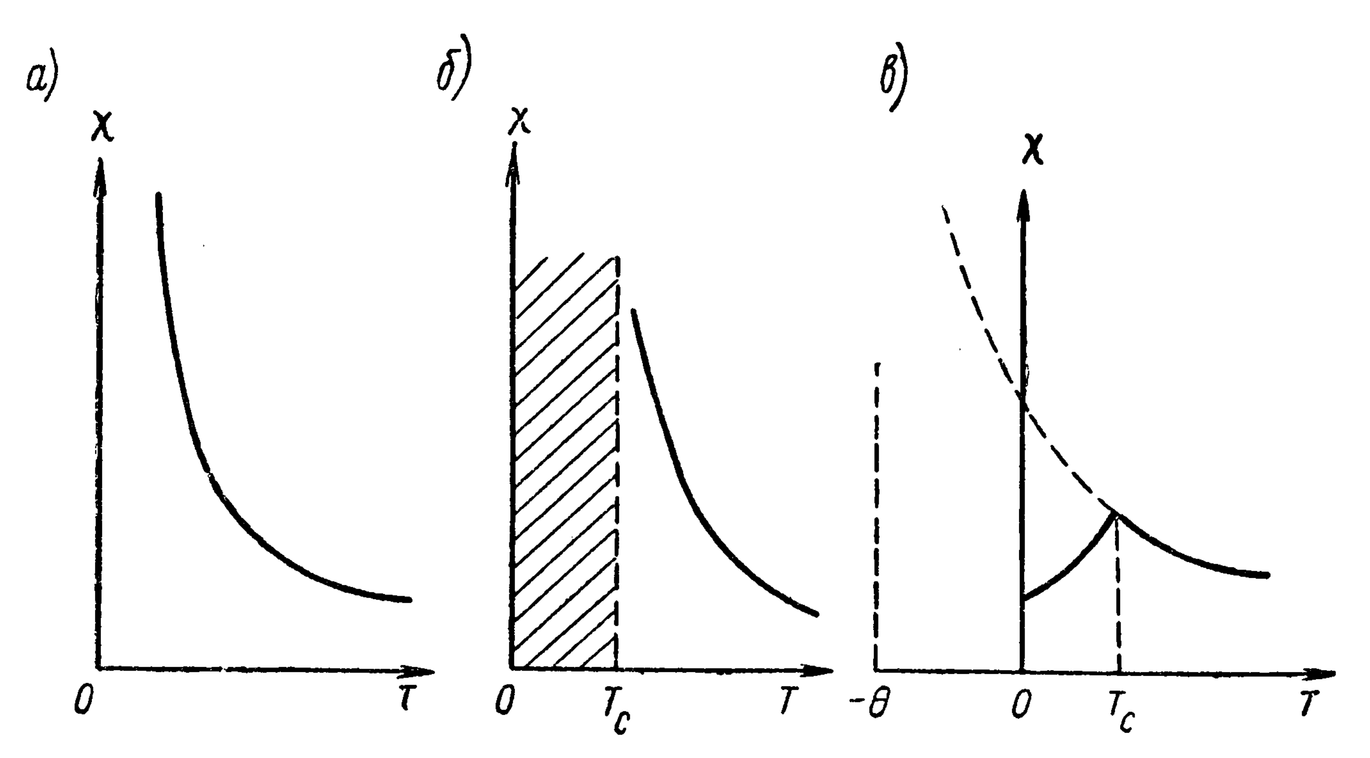


Рис. 39-4. Температурная зависимость магнитной восприимчивости:

а) для парамагнетиков $\left(\chi = \frac{C}{T}\right)$; *б*) для ферромагнетиков $\left(\chi = \frac{C}{T - T_c}\right)$; *в*) для антиферромагнетиков $\left(\chi = \frac{C}{T + \theta}\right.$ для $T > T_c$; $\left.\theta \approx 1{,}5T_c\right)$

Если парамагнитный или ферромагнитный образец, находящийся в сильном постоянном магнитном поле $H_z > 5000$ *э*, подвергнуть поперечному воздействию высокочастотного переменного магнитного поля (рис. 39-5), то ориентированные спиновые, ядерные и полные векторы магнитных моментов будут прецессировать относительно направления статического поля.

Энергия наложенного в поперечном направлении переменного магнитного поля напряженностью $H_x = H \sin \omega_н t$ поглощается образцом.

При резонансе, т. е. при совпадении частоты изменений $\omega_н = 2\pi f_н$ поперечного переменного магнитного поля с ларморовской частотой электронной $\left(\omega_э = \frac{e}{2m_э c} \cdot H_z\right)$ или ядерной $\left(\omega_я = \frac{e}{2m_р c} \cdot H_z\right)$ прецессии, поглощение энергии будет особенно заметно (рис. 39-6, *а*).

Из условия

$$2\pi f_{\text{н}} = g \frac{e}{2mc} H_z, \qquad (39,19)$$

где g — магнито-механический фактор, вытекает, что



$$\frac{f_{\text{н}}}{H_z} = g \frac{e}{4\pi mc}. \qquad (39,20)$$

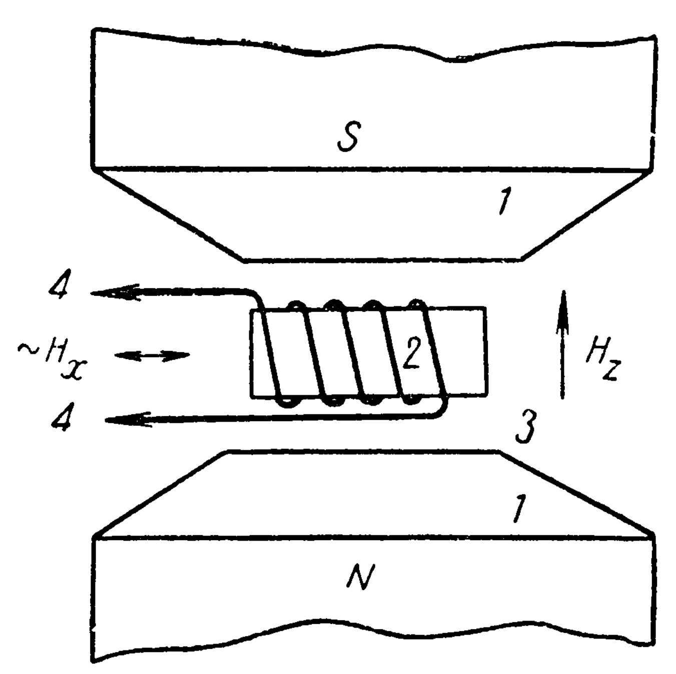


Рис. 39-5. Схема измерений спинового резонансного поглощения энергии магнитного поля:

1 — полюса постоянного электромагнита; *2* — образец пара- или ферромагнетика; *3* — катушка для протекания переменного тока высокой частоты; *4* — концы к питающей и регистрирующей аппаратуре, H_z — постоянная магнитная напряженность, H_x — переменная высокочастотная магнитная напряженность

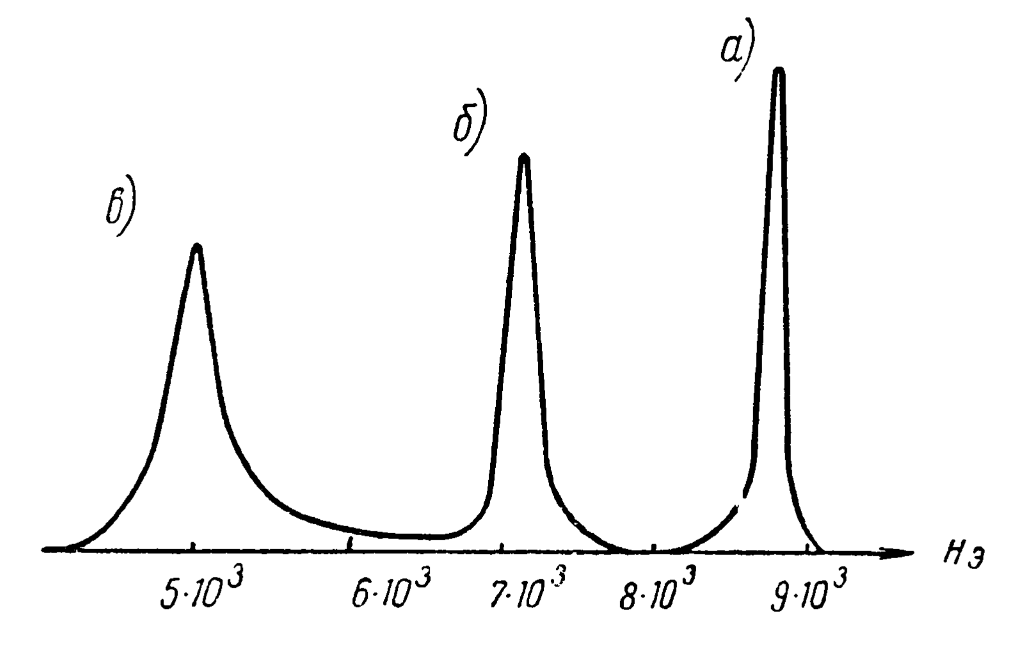


Рис. 39-6. Резонансное поглощение энергии переменного магнитного поля, изображенного на рис. 39-5:

а) электронное спиновое резонансное поглощение в свободных радикалах органических соединений при $H = 8600$ *э* и $f = 24446$ *Мгц* $\left(\frac{f_{\text{н}}}{H_z} = 2{,}8 \frac{\textit{Мгц}}{\textit{э}}\right)$; *б*) протонное спиновое резонансное поглощение в растворе азотнокислого железа при $H = 7050$ *э* и $f = 30$ *Мгц* $\left(\frac{f_{\text{н}}}{H_z} = 4{,}3 \frac{\textit{кгц}}{\textit{э}}\right)$; *в*) ферромагнитное резонансное поглощение в супермаллое при $H_z = 4850$ *э* и $f_{\text{н}} = 24000$ *Мгц*

Для электронного спинового резонанса ($g = 2$; $m = m_э$) имеем

$$\frac{f_{\text{н}}}{H_z} = 2{,}8 \frac{\textit{Мгц}}{\textit{э}};$$

а для протонного ($g = 2{,}7$; $m = m_p$), соответственно (рис. 39-6, *б*),

$$\left(\frac{f_{\text{н}}}{H_z}\right)_{\text{я}} = 4{,}3 \frac{\textit{кгц}}{\textit{э}}.$$

Для тонких образцов ферромагнетика, расположенных плоскостью вдоль статического магнитного поля H_z, в связи с размагничивающим действием концов резонансная формула ферромагнитного поглощения принимает вид

$$\frac{f_{\text{н}}}{\sqrt{BH_z}} = g \frac{e}{4\pi mc}, \qquad (39,21)$$

где $B = H_z + 4\pi J_{\text{нас}}$.

Метод ядерного магнитного резонанса является одним из наиболее точных лабораторных способов измерения напряженности постоянных магнитных полей H_z.

При температурах ниже точки Кюри магнитные моменты атомных электронов в отдельных микрообластях ферромагнетика (доменах) будут самоориентироваться в некотором направлении. Однако суммарный вектор намагниченности может оказаться значительно меньше суммы магнитных моментов единицы объема ве-

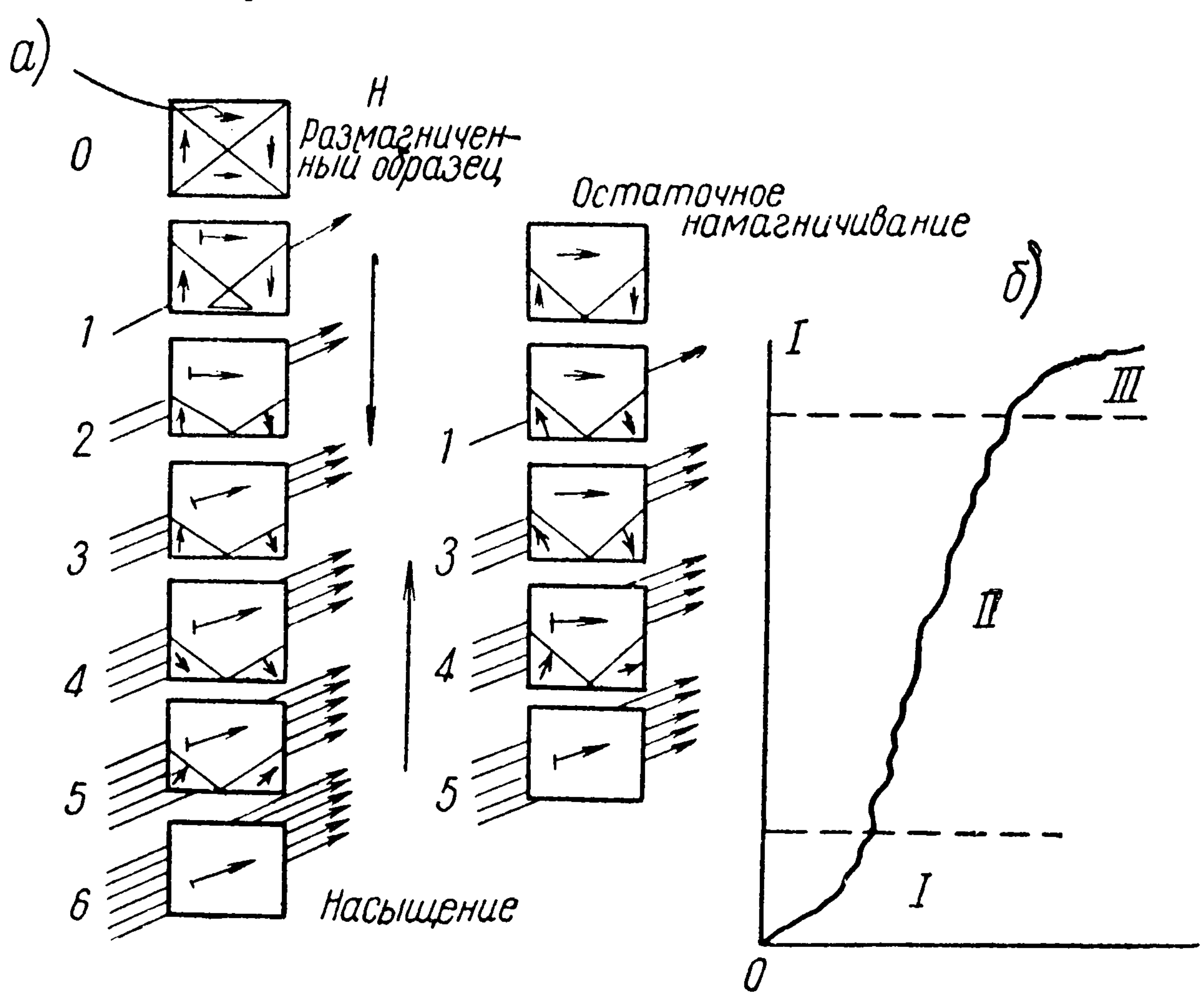


Рис. 39-7. Схема намагничивания ферромагнетика:

а) доменные преобразования; *б*) скачкообразные изменения состояния намагниченности (I — область обратимых смещений границ доменов; II — область необратимых смещений; III — область поворотов векторов намагниченности доменов) На оси ординат (рис. *б*) отложены значения вектора намагниченности

щества при насыщении, поскольку направления векторов намагниченности отдельных домен не параллельны друг другу.

Под воздействием внешнего магнитного поля (рис. 39-7) в ферромагнетике будет происходить, во-первых, увеличение домен, имеющих согласное с внешним полем направление вектора намагниченности (слабое внешнее поле), во-вторых, поворот векторов намагниченности во всех прочих доменах ближе к направлению внешнего магнитного поля (сильные внешние поля). Существование доменов подтверждается не только ступенчатостью кривой намагничивания (рис. 39-7, *б*), но и непосредственно микрофотографиями порошковых фигур на поверхности ферромагнитных кристаллов (полосы Акулова—Биттера; рис. 39-8). Доменная структура монокристалла ферромагнетика определяет его магнитные оси, т. е. направления легкого и трудного намагничивания. Между доменами с противо-

положными направлениями векторов намагниченности имеются переходные слои шириной в несколько сотен постоянных решетки ($10^{-5} \div 10^{-6}$ *см*) (см. рис. 39-8). Домены являются хранителями магнитной энергии, объемная плотность которой для железа составляет около 10^3 *эрг* · *см*$^{-3}$ = 10^2 *дж* · *м*$^{-3}$. Размеры доменных слоев (в направлении трудного намагничивания) для железа составляют

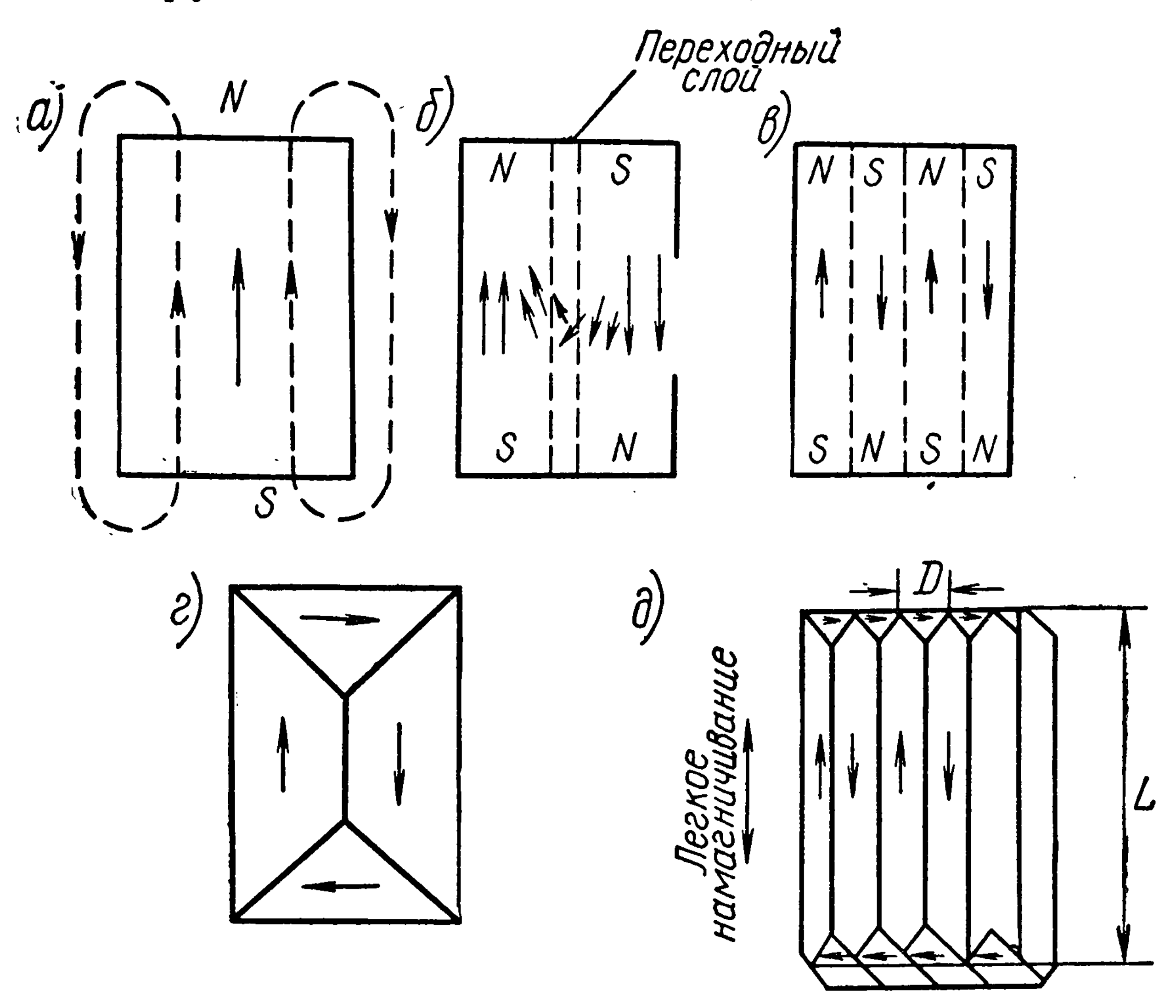


Рис. 39-8. Схемы расположения доменных структур:
а) насыщенная конфигурация, соответствующая одному домену; *б*) конфигурация, соответствующая двум доменам с переходным слоем; *в*) конфигурация, соответствующая N доменам с антипараллельными векторами намагниченности и энергией, равной $\frac{1}{N}$ части магнитной энергии для случая *а*); *г*) конфигурация, соответствующая бесполюсной доменной структуре с магнитной энергией, равной нулю; *д*) схема расположения замыкающих доменов шириной D в магнитно-одноосном кристалле длиной L

около $3 \cdot 10^{-3}$ *см*. С доменной структурой кристаллов ферромагнетика связано явление магнитострикции, т. е. изменение размеров ферромагнетика при намагничивании и значений коэрцитивных сил у различных магнитных материалов.

Значительная по величине коэрцитивная сила порошковых материалов (например, Mn—Bi, для которого $H_c > 12000$ *э*) объясняется тем, что частицы диаметром менее $10^{-4} \div 10^{-5}$ *см* содержат только один домен, и их перемагничивание не может происходить за счет процессов смещения границ доменов. Вместо этого должен изменить направление на обратное вектор намагниченности частицы, на что требуются большие поля.

Таблица 22

Название	Основной состав	$\mu_н$	$\mu_{макс}$	$H_с$ э	$4\pi J_{нас} \times 10^{-4}$ гс	$B_0 \times 10^{-4}$ гс	$(B \cdot H)_{макс} \times 10^{-6}$ гс · э	$\rho \times 10^6$ ом·см	$T_с°$ C
	Магнитомягкие материалы								
Железо	Fe (99,9)	$2 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	1,0	2,2	—	—	10	770
Супермаллой	Fe (15) Ni (80) Mo (5)	10^5	10^6	0,004	0,8	—	—	60	400
Ферриты	CuO (Fe_2O_3); ZnO (»); CdO (»)	$10 \div 10^3$	—	$0,01 \div 3$	1,0	—	—	10^{13}	—
	Магнитожесткие материалы								
Сталь углеродистая	Fe (98,5) C (0,65)	—	—	42	2,0	1,0	0,20	—	—
Сталь кобальтовая	Fe (54) C (1,0) Co (35)	—	—	250	1,6	0,9	0,95	—	—
Сплав изотропный (альнико)	Fe (61) Al (10) Ni (17) Co (12)	—	—	560	1,8	0,7	1,7	—	—
Сплав анизотропный (алькомакс)	Fe (51) Al (8) Ni (14) Co (24) Cu (3)	—	—	775	1,2	1,2	5,0	—	—
Сплав парамагнитного состава (сильманал)	Ag (86) Mn (8,8) Al (4,4)	—	—	5500	1,0	0,6	0,08	—	—
	Порошковые материалы								
Вектолит	Fe_2O_3 (30) Fe_2O_4 (44) Co_2O_3 (26)	—	—	900	0,6	0,2	0,5	—	—
Тромалит	Fe (50) Al (9) Co (19) Ni (18) Tl (4)			800	0,6	0,4	1,0	2,2	—

Если при температуре ниже точки Кюри электронные спины приобретают упорядоченное антипараллельное расположение, то магнитная восприимчивость материала убывает не только с ростом температуры в области $T > T_c$, но и с уменьшением температуры в области $T < T_c$. Такие материалы, имеющие максимальную магнитную проницаемость при $T = T_c$, называют антиферромагнетиками (рис. 39-4, кривая *в*).

Антиферромагнетиками являются вещества, магнитные свойства которых обусловлены отрицательными электрическими обменными взаимодействиями между элементарными носителями магнитного момента. Простейшая модель антиферромагнетика представляется в виде структурно упорядоченной решетки (гранецентрированная или объемноцентрированная кубическая решетка) парамагнитных ионов, состоящей из двух вставленных друг в друга систем *A* и *B*, так что все ближайшие соседи каждого иона системы *A* являются ионами системы *B* (см. рис. 24-4, *a*); например, MnO, MnS, FeO, CoO, NiO.

Переход от антиферромагнитного состояния в парамагнитное происходит при температуре Θ, при которой тепловое молекулярное движение разрушает области самопроизвольного антиферромагнитного состояния.

Большое техническое значение имеют материалы, называемые ферритами. Они принадлежат к группе соединений, общая химическая формула которых имеет вид: $MOFe_2O_3$, где *M* — ион двухвалентного металла (Mn, Co, Ni, Mg, Zn). Ферриты обладают большим удельным электрическим сопротивлением.

В табл. 22 приведены магнитные характеристические величины для некоторых ферромагнетиков.

Лекция 40

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Электрическое и магнитное поля динамически связаны (см. 37,1). Относительное движение электрического поля порождает поле магнитное и вместе с тем относительное движение магнитного поля порождает поле электрическое (электромагнитная индукция).

Пусть, например, положительный заряд *e* движется в вакууме поперек магнитного поля напряженностью *H* с относительной скоростью $\frac{v}{c}$ (рис. 40-1, *a*). Относительность движения позволяет считать, что магнитное поле перемещается по отношению к заряду со скоростью $-\frac{v}{c}$. Это означает, что в месте нахождения заряда, согласно правилу Ленца, возникает напряженность электрического поля, определяемая векторным произведением $\left[\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}\right]$, т. е.

$$\vec{E}=\left[\vec{H}\times\frac{\vec{v}}{c}\right], \quad \text{или} \quad E=H\cdot\frac{v}{c}\cdot\sin(\widehat{v, H}). \qquad (40,1)$$

На заряд e действует при этом отклоняющая пондеромоторная сила Лоренца

$$F_л = Ee = He \cdot \frac{v}{c} \sin \alpha, \qquad (40,2)$$

где e выражен в системе (а. э. е).

Из формулы (40,2) следует, что заряд, движущийся вдоль магнитного поля ($\alpha = 0$), не подвержен действию пондеромоторной силы.

Путем подстановки количества электричества $dq = I \cdot dt$ в системе (а. э. м. е.) вместо заряда e в (а. э. е.) и подстановки скорости дрейфа электронов в проводнике $v = \frac{dl}{dt}$ вместо скорости движения заряда $\frac{v}{c}$

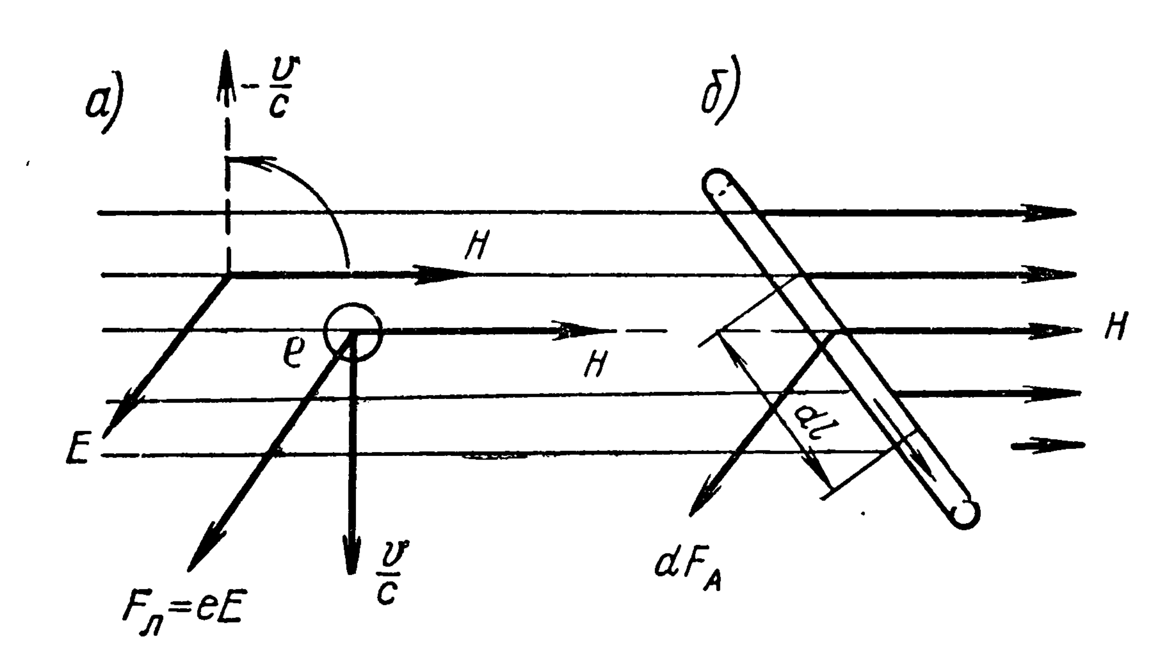


Рис. 40-1. Пондеромоторные силы взаимодействия тока и внешнего магнитного поля:

а) лоренцова сила, отклоняющая движущийся заряд; *б*) амперова сила, выталкивающая проводник с током

из выражения (40,2) получаем формулу Ампера для пондеромоторной силы, действующей на элемент проводника с током (рис. 40-1, *б*), помещенный в однородное магнитное поле с магнитной индукцией B, т. е.

$$dF_A = BIdl \sin \alpha. \qquad (40,3)$$

Направления пондеромоторных сил Лоренца и Ампера легко определяются по известному правилу левой руки. Эти силы перпендикулярны направлению скорости движения зарядов, поэтому всегда являются только отклоняющими, но не разгоняющими. Сила Ампера вызывает перемещение проводника с током в магнитном поле и является той механической силой, которая используется в электродвигателях. Сила Лоренца действует на отдельный движущийся заряд и широко используется для магнитной фокусировки потока электронов (кинескоп), для анализа масс заряженных частиц (масс-спектрограф) и для циклического разгона заряженных частиц (циклотрон).

Принцип фокусировки (рис. 40-2) основан на двух соотношениях: 1) $eU = \frac{1}{2} m v_{II}^2 \left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ и 2) $F_л = H \cdot e v_\perp \cdot \frac{1}{c}$, вытекающих из формулы (40,2). Так как при $U = \text{const}$ для всех электронов пучка $v_{II} = \text{const}$, то траекторией движения отдельного заряда в однородном магнитном поле (лабораторная система отсчета) будет винтовая линия, радиус которой вытекает из условия $F_л = F_ц$ (рис. 40-2, *а*), т. е.

$$He\frac{v_\perp}{c} = \frac{mv_\perp^2}{r}, \tag{40,4}$$

так что $r = \frac{mc}{e} \cdot \frac{v_\perp}{H}$, откуда

$$\frac{1}{r} \sim \frac{e}{mv_\perp}. \tag{40,5}$$

Электроны, испускаемые эмиттером, имеют разные $v_\perp$, следовательно, в одном и том же магнитном поле они будут двигаться по винтовым линиям различных радиусов (рис. 40-2, *б*). Однако время полного оборота $T = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{e} \cdot \frac{c}{H}$ не зависит от радиуса винтовой линии и для данной напряженности H магнитного поля есть величина постоянная. Поэтому спустя один период все электроны, вылетевшие из одной точки эмиттера, вновь сфокусируются в одну точку на расстоянии $l = v_{II} \cdot T$ от эмиттера (рис. 40-2, *б*). Практически в телевизорах используются короткие магнитные линзы с регулируемым неоднородным магнитным полем. Для магнитных линз оказываются справедливыми соотношения, подобные тем, какие имеют место в оптике видимого света для тонких стеклянных линз.

Анализ масс заряженных частиц и разделение изотопов осуществляются путем совместного воздействия на поток частиц поперечными электрическим и магнитным полями (рис. 40-3).

Например, чтобы определить массу электрона, на поток моноэнергетических электронов в электронно-лучевой трубке воздействуют одновременно обоими упомянутыми поперечными полями, причем так, что в каждый момент времени

$$F_э + F_л = 0, \quad \text{т. е.} \quad eE_к = H_к e\frac{v}{c}.$$

При выполнении условий компенсации светлое пятно на флюоресцирующем экране остается на месте и, значит, по известным значениям $E_к$ и $H_к$ может быть определена скорость электронов в потоке по формуле

$$v = c \cdot \frac{E_к}{H_к}. \tag{40,6}$$

По вычисленному таким образом значению v после устранения одного из полей, например магнитного, можно измерить отклонение

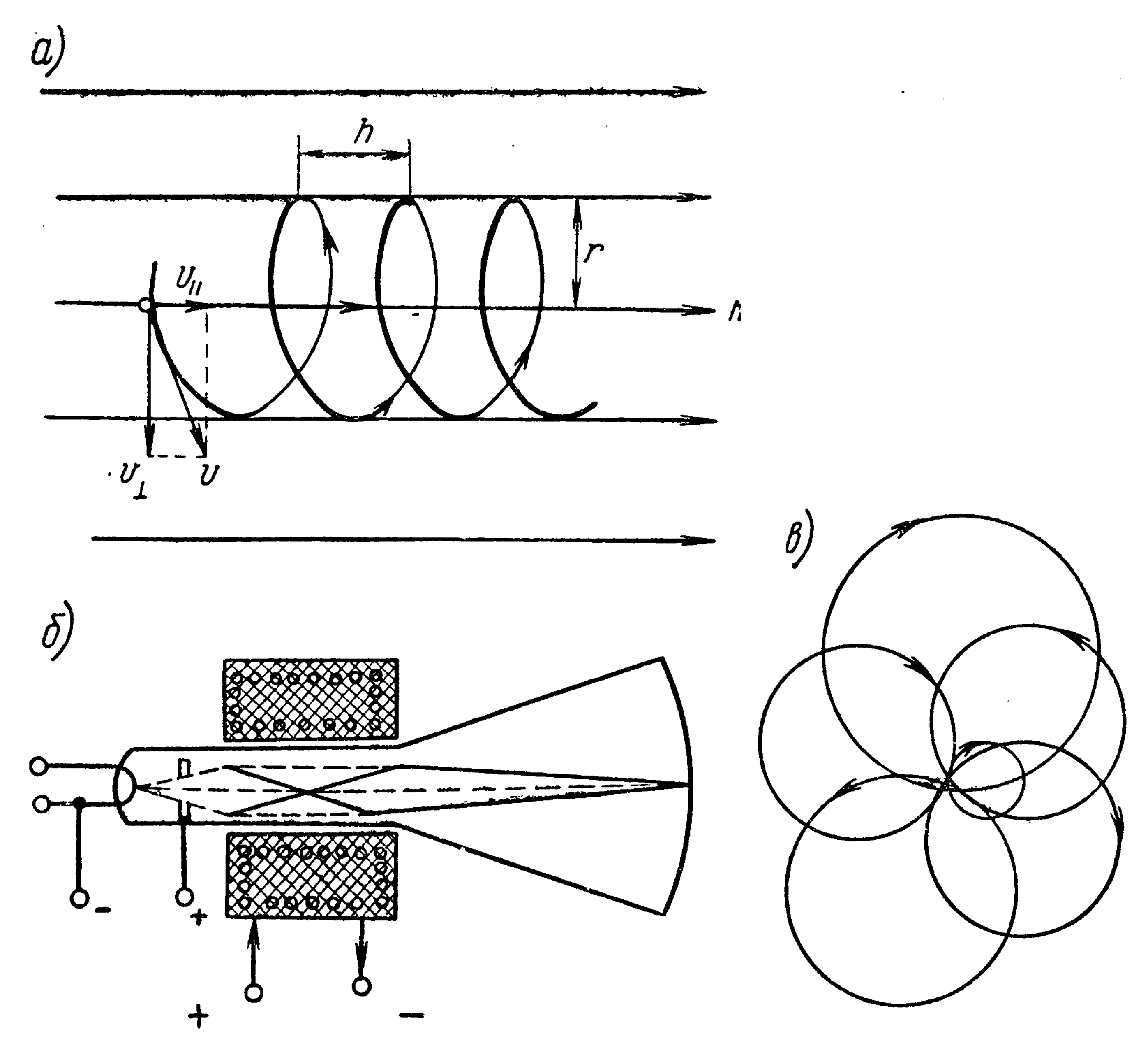


Рис. 40-2. Движение электрона в магнитном поле:
а) траектория движения в однородном магнитном поле; *б*) электронный пучок в фокусирующей магнитной линзе кинескопа; *в*) торцевая розетка траекторий пучка электронов в однородном магнитном поле

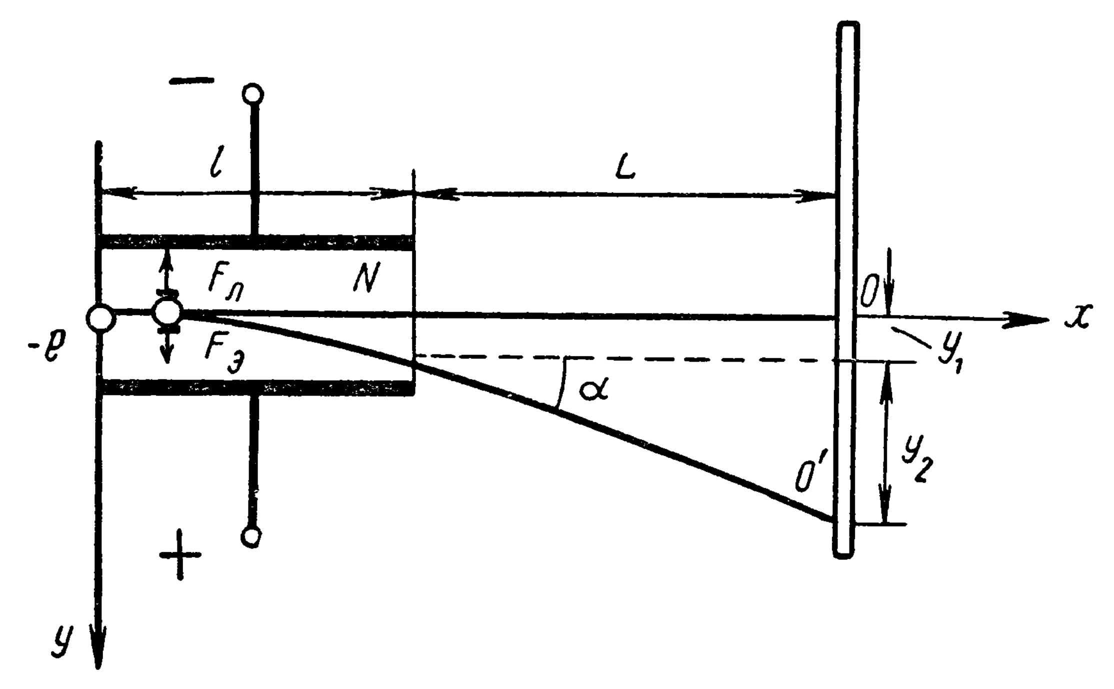


Рис. 40-3. Схема компенсационного принципа определения массы электрона

Магнитное поле перпендикулярно плоскости чертежа

y светлого пятна на экране и найти значение массы электрона, поскольку (см. рис. 40-3).

$$y = y_1 + y_2 = \frac{a\tau^2}{2} + L \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{el^2}{2v_0^2 \cdot m} E + L \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=l} =$$
$$= \frac{eE}{mv_0^2} l \left(L + \frac{l}{2}\right), \tag{40,7}$$

где τ — время пролета электрона в электрическом поле и, следовательно,

$$m = \frac{el}{yv_0^2} \cdot E\left(L + \frac{l}{2}\right). \tag{40,8}$$

Измеренные таким способом массы электронов при различных значениях их относительной скорости движения $\beta = \frac{v}{c}$ полностью соответствуют значениям, вытекающим из выражения (4,15) релятивистской механики.

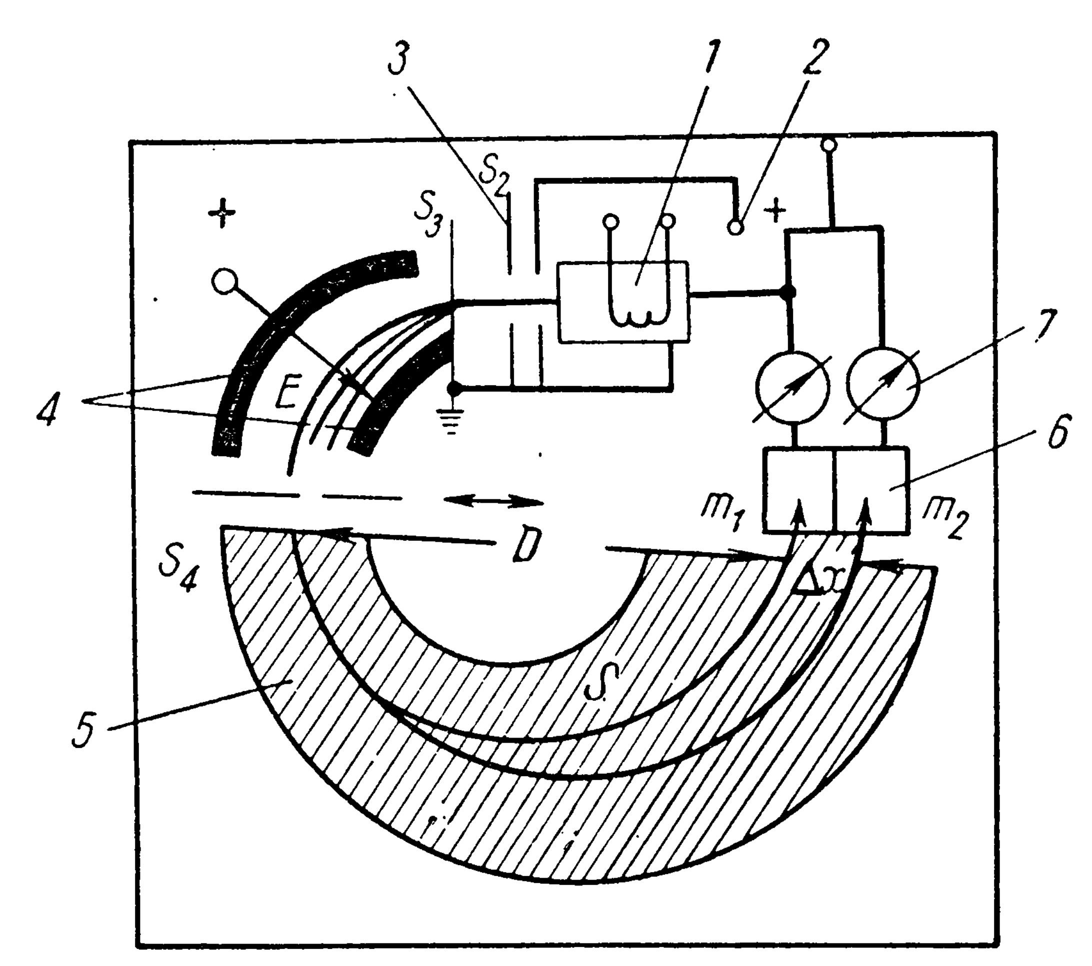


Рис. 40-4. Схема масс-спектрометра:
1 — источник ионов; *2* — генератор ускорения ионов; *3* — ограничительные диафрагмы S_2, S_3; *4* — электроды электростатического селектора; *5* — отклоняющий электромагнит; *6* — коллекторы; *7* — индикаторы заряда

Для анализа масс заряженных микрочастиц (масс-спектрография) и для разделения изотопов используется принцип последовательного действия поперечными электрическим и магнитным полями (рис. 40-4).

Электрическое поле E в сочетании с двумя диафрагмами неподвижной (входной) S_3 и смещаемой (выходной) S_4 представляет собой энергетический селектор частиц. В зависимости от положения выходной щели S_4, согласно формуле (40,7), выходной пучок будет содержать все те частицы, которые имеют равные значения $\frac{e}{mv^2}$, т. е. при одинаковых зарядах e одинаковую кинетическую энергию, равную

$$W_к = \frac{1}{2} mv^2 = eU. \tag{40,9}$$

Диаметр круговой траектории в поперечном магнитном поле (направлено перпендикулярно плоскости чертежа), согласно выраже-

нию (40,5), составляет

$$D = 2R = \frac{2c}{H}\sqrt{\frac{2m\cdot W_к}{e}} = \frac{2\sqrt{2}}{H}c\sqrt{\frac{W_к}{e}}\sqrt{m} =$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{c}{H}\sqrt{U}\cdot\sqrt{m} = C\cdot\sqrt{m}, \qquad (40,10)$$

где U — ускоряющая разность потенциалов, которая по формуле (40,9) соответствует избранному значению $W_к$.

При отклонении заряженных частиц в магнитном поле на угол 180° (см. рис. 40-4) для H = const и U = const ширина разделения Δx, т. е. расстояние между местами выхода масс m_1 и m_2, будет равна

$$\Delta x = \Delta D = D_1 - D_2 = C(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}). \qquad (40,11)$$

Тонкие ионные пучки допускают хорошую изоляцию частиц друг от друга. При малом рассеянии ионов остаточным воздухом камеры разделение ионов, или ядер изотопов элементов, по массам может быть очень точным.

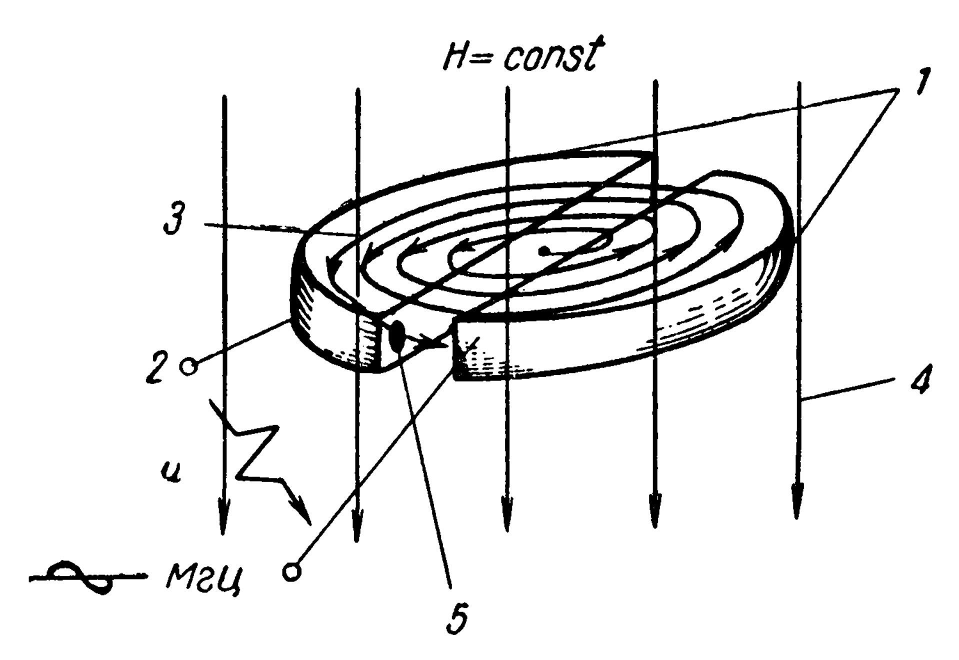


Рис. 40-5. Схема циклотрона:
1 — дуанты; 2 — электроды высокочастотного питания; 3 — траектории разгоняемых частиц; 4 — магнитное поле; 5 — мишень

Циклические ускорители тяжелых заряженных частиц (протонов, дейтронов, альфа-частиц) работают также на принципе одновременного воздействия на частицы постоянным поперечным отклоняющим магнитным полем и высокочастотным разгоняющим электрическим полем (рис. 40-5).

Электрическое поле, создаваемое высокочастотным генератором в зазоре между дуантами (полыми цилиндрическими полукоробками осевого сечения), ускоряет заряженные частицы всякий раз при их пролете из полости одного дуанта в полость другого. Круговые траектории частиц в полостях дуантов возникают благодаря лоренцовой центростремительной силе, действующей при движении заряда в поперечном постоянном магнитном поле. Время τ оборота на 180° не будет зависеть от скорости движения частицы v, если только массу m можно считать постоянной $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$. Согласно (40,5),

$$\tau = \pi\frac{r}{v_\perp} = \frac{mc}{e}\cdot\frac{1}{H}.$$

После облета z витков по спиралевидной траектории при синхронном ускорении электрическим полем высокочастотного генератора на каждом пересечении зазора между дуантами частицы

приобретают кинетическую энергию, соответствующую суммарному ускоряющему потенциалу $U = 2z \cdot \Delta U$.

Принцип действия наиболее распространенных электроизмерительных приборов, а именно магнито-электрических индикаторов тока (гальванометров, микроамперметров, милливольтметров), основан на вращении подвижной рамки с током в однородном магнитном поле. Рассматривая плоский контур тока I произвольной формы в поле с магнитной индукцией B, можно выделить элементы длины dl проводника путем проведения равноотстоящих dh секущих, параллельных полю (рис. 40-6). При обходе контура тока, согласно (40,3), для противоположных элементов тока имеем $dF_i = -dF_i$, так как

$$dl_i \sin\alpha_i = dh = -dl'_i \sin\alpha'_i. \tag{40,12}$$

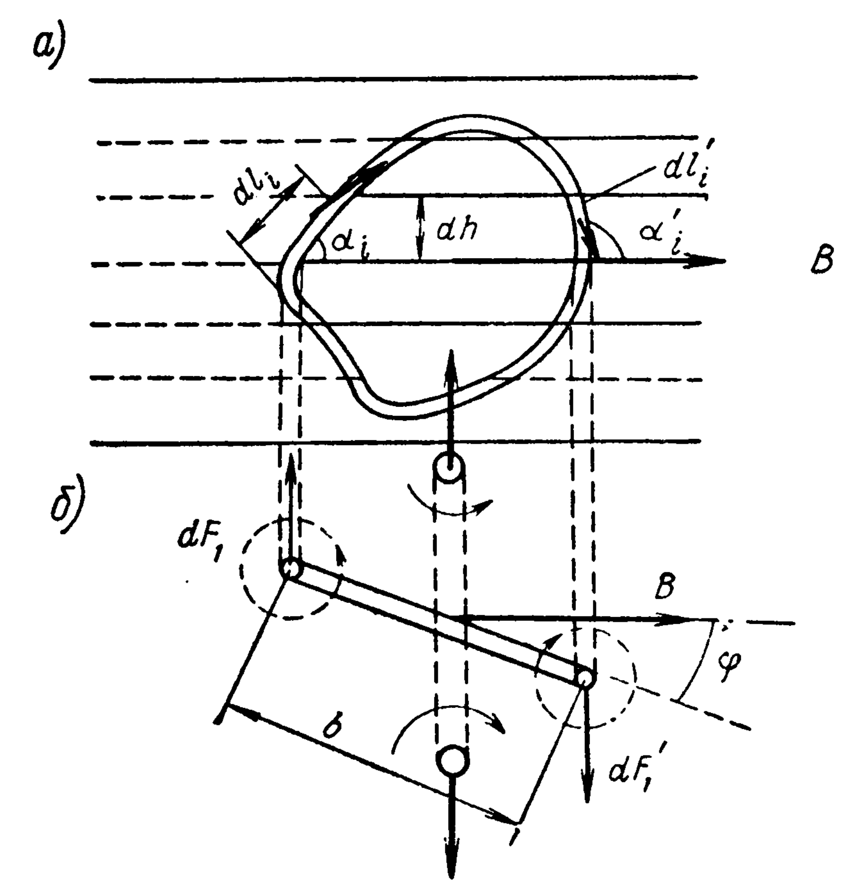


Рис. 40-6. Контур тока в однородном магнитном поле:
а) вид сверху; *б*) вид сбоку

В таком случае равнодействующая всех элементарных сил Ампера будет равна нулю, так как для всех элементов проводника B и I — величины постоянные и, значит,

$$F = BI \int_l dh = 0. \tag{40,13}$$

Этот результат показывает, что поступательного движения контура не будет. Однако элементарные силы Ампера (см. рис. 40-6) представляют собой пары сил, создающие элементарный вращающий момент

$$dM = BI\,dh \cdot b\cos\varphi, \tag{40,14}$$

где b — ширина элемента контура, φ — угол между направлением вектора магнитной индукции B и плоскостью контура тока. Так как bdh — элемент площади контура dS, то

$$M_{вр} = BI\cos\varphi \int_S dS = BIS\cos\varphi \doteq I \cdot \Phi_m \cdot \cos\varphi. \tag{40,15}$$

Как видно, вращающий момент имеет наибольшее значение ($M_{вр} = BIS$) при $\varphi = 0$, т. е. при расположении плоскости контура вдоль магнитного поля, и наименьшее ($M_{вр} = 0$) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. при расположении плоскости контура тока поперек магнитного

поля (см. рис. 40-6). Из выражения (40,15) следует, что элементарная работа dA, совершаемая магнитным полем при повороте контура тока на угол $d\varphi$, будет равна

$$dA = M_{\text{вр}} \cdot dS = I\Phi_m \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = I \cdot d\Phi, \qquad (40,16)$$

так как магнитный поток, пронизывающий контур,

$$\Phi = BS \cdot \sin\varphi = \Phi_m \cdot \sin\varphi.$$

Таким образом, работа (40,16), совершаемая при изменении магнитного поля, пронизывающего контур тока, определяется произведением тока на то изменение магнитного потока, которое при этом происходит.

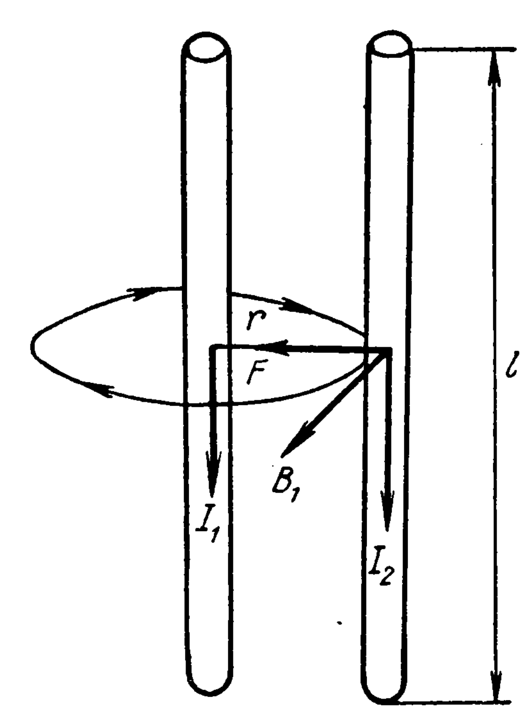


Рис. 40-7. Взаимодействие параллельных токов.

Показана только линия магнитной индукции, создаваемой током I_1 на линии тока I_2.

В том случае, когда внешнее магнитное поле неоднородно или только часть контура тока пронизывается потоком магнитной индукции, равнодействующая всех элементарных сил Ампера не будет равна нулю, и контур будет совершать как поступательное, так и вращательное движение. Контур тока всегда занимает такое положение, при котором его пронизывает наибольший магнитный поток, согласующийся с его собственным магнитным полем. В положении, при котором вращающий момент, действующий на контур тока, становится равным нулю, т. е. при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, амперовы силы будут деформировать этот контур.

На основании измерений силы пондеромоторного взаимодействия токов устанавливается единица тока — ампер, принятый в качестве четвертой независимой единицы для электромагнитных явлений в системе СИ.

В случае параллельных токов одного направления, протекающих на расстоянии r друг от друга (рис. 40-7), согласно выражению (40,3) действует механическая сила их взаимного притяжения, равная

$$F = \frac{2I_1}{r} \mu I_2 l, \qquad (40,17)$$

где l — длина параллельных участков тока, а I_1 и I_2 — токи, выраженные в абсолютных электромагнитных единицах (а. э. м. е.). Формула (40,17) является исходной зависимостью для установления эталона единицы силы тока (так называемых ампер-весов).

Лекция 41

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Явление электромагнитной индукции заключается в том, что всякое «движение» магнитного поля (изменение магнитной индукции во времени и в пространстве) вызывает появление электрического поля, охватывающего изменяющийся поток вектора магнитной индукции.

Если рассмотреть простейшую электрическую цепь (рис. 41-1), содержащую источник питания с электродвижущей силой $\mathscr{E}$ и обладающую сопротивлением R, то, согласно закону сохранения и преобразования энергии, за любой элемент времени dt можно записать

$$\mathscr{E} I_t \cdot dt = I_t^2 R \cdot dt + I_t d\Phi, \quad (41,1)$$

где I_t — мгновенное значение тока в цепи.

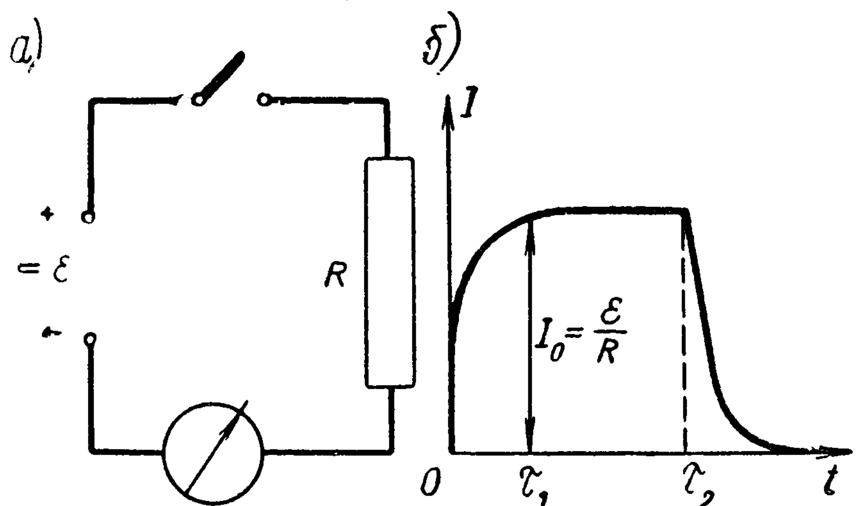


Рис. 41-1. Цепь постоянного тока (*а*) и переходные режимы в этой цепи (*б*) (τ_1 — время установления режима при замыкании цепи; τ_2 — то же при размыкании)

Левая часть этого выражения представляет собой энергию, передаваемую источником в цепь за элемент времени dt; первое слагаемое в правой части — энергию, превращающуюся, согласно закону Джоуля — Ленца, в тепло, и второе слагаемое — энергию, затрачиваемую на изменение магнитного поля контура тока (см. 40,6). Решая уравнение (41,1) относительно I_t, получим

$$I_t = \frac{\mathscr{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (41,2)$$

Как видно, в рассматриваемом контуре, кроме электродвижущей силы источника $\mathscr{E}$, действует также э. д. с. индукции $\mathscr{E}_i$, обусловленная изменением во времени магнитного потока, пронизывающего контур, и для отдельного контура, равная

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (41,3)$$

В случае замыкания цепи ($dt > 0$; $d\Phi > 0$) $\mathscr{E}_i$ имеет знак, обратный знаку электродвижущей силы источника и, следовательно, задерживает нарастание тока. В случае размыкания цепи ($dt > 0$; $d\Phi < 0$) знак $\mathscr{E}_i$ совпадает со знаком электродвижущей силы источника и, следовательно, задерживает исчезновение тока в контуре.

Выражение (41,3) указывает на инерционность электромагнитной индукции. Электродвижущая сила индукции возникает (пра-

вило Ленца) при изменениях магнитного потока, когда $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$. Для простейшей цепи постоянного тока влияние э. д. с. индукции будет сказываться только в течение кратковременных переходных режимов нарастания (за время τ_1) и исчезновения (за время τ_2) постоянного тока в цепи (см. рис. 41-1).

Магнитное поле является носителем электромагнитной энергии. С помощью взаимной индуктивности оно позволяет осуществлять энергетическую связь между электрическими цепями (рис. 41-2).

Например, если в первичном контуре протекает ток, мгновенное значение которого I_1, то в зависимости от геометрических и магнитных факторов связи контуров часть магнитного потока, сцепленного с первичным контуром, будет пронизывать вторичный контур. В соответствии с законом Био и Савара при сохранении неизменности условий магнитной связи контуров можно записать

$$\Phi_2 = MI_1 \text{ и } \Phi_1 = MI_2, \quad (41,4)$$

где M — взаимная индуктивность рассматриваемых контуров.

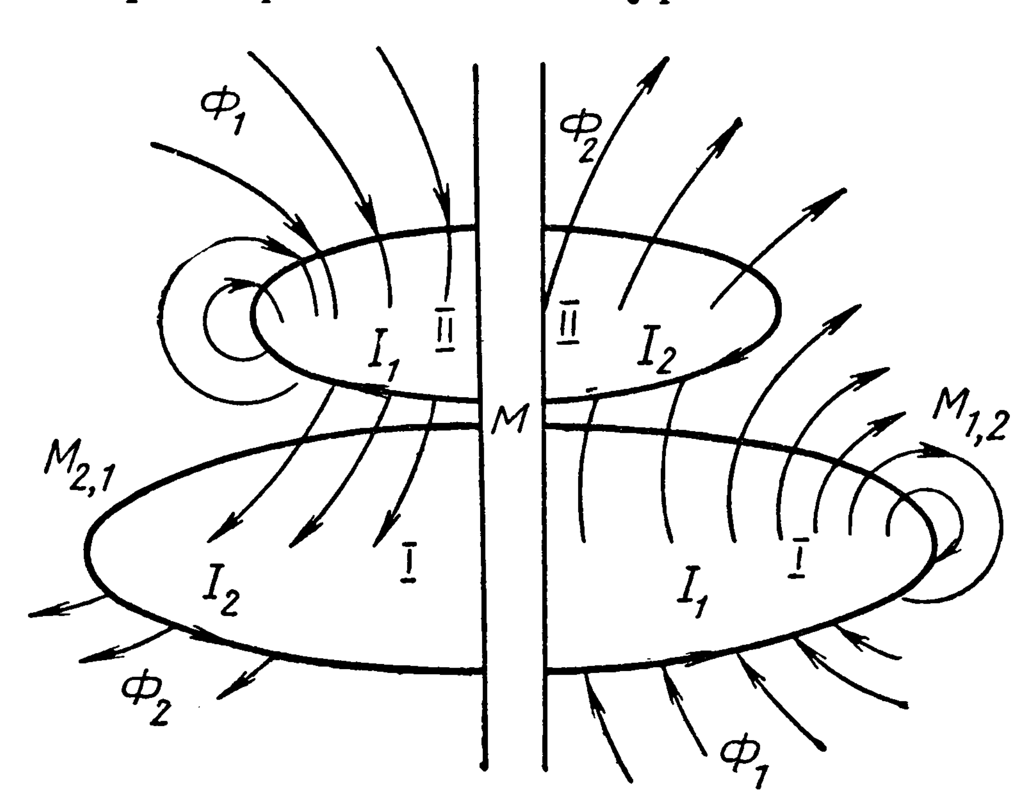


Рис. 41-2. Явление взаимной индукции:

Справа — первичным контуром является контур I; слева — контур II.

На основании (41,3) и (41,4) осуществляются два различных режима трансформации электромагнитной энергии взаимной индукции контуров. Первый (генераторный) режим (рис. 41-3, *а*) характеризуется тем, что $I_1 = \text{const}$ (постоянный ток возбуждения электромагнитов ротора машины), но при этом режиме периодически изменяется взаимная индуктивность контуров $M = \varphi(t)$ (путем вращения ротора), так что

$$\mathcal{E}_2 = -I_1 \cdot \frac{dM}{dt}. \quad (41,5)$$

Второй (трансформаторный) режим (рис. 41-3, *б*) определяется условиями $M = \text{const}$ и $I_1 = f(t)$, так что

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{dI_1}{dt}. \quad (41,5')$$

Если вторичный контур замкнут, то по нему будет протекать вторичный индукционный ток, направление которого определяется правилом Ленца: «Индукционный ток всегда направлен так, что связанное с ним магнитное поле препятствует тому изменению

внешнего магнитного потока, которое возбуждает электродвижущую силу индукции в контуре тока». Таким образом, ток, протекающий при нагрузке во вторичной обмотке трансформатора с n_2 витками, своим магнитным полем уменьшает индуктивность первичного контура.

При коротком замыкании во вторичном контуре это влияние приводит практически к полному размагничиванию замкнутого ферромагнитного сердечника трансформатора. Так как в пределах нормальных нагрузок допустимо считать, что результирующий переменный магнитный поток Ф, связывающий взаимно обе обмотки

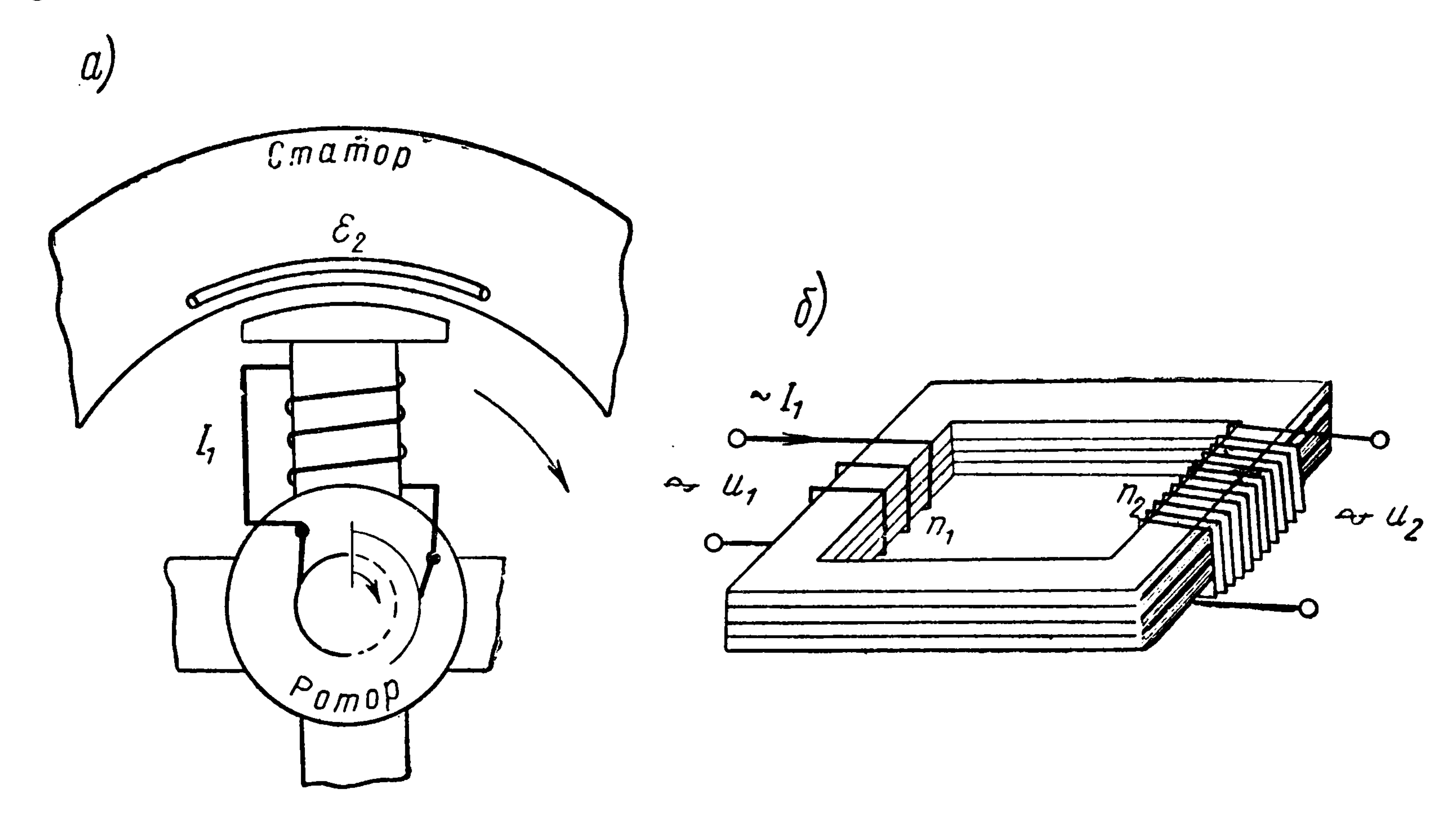


Рис. 41-3. Магнитная связь контуров:
а) генераторный режим; *б*) трансформаторный режим

трансформатора, остается практически одним и тем же, то для трансформатора приближенно справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{E} = \frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (41,6)$$

Мощность, отбираемая первичной обмоткой из питающей сети, незначительно превышает мощность, передаваемую магнитным потоком во вторичную обмотку, а потому допустимо считать, что $P_1 = U_1 I_1 \approx P_2 = U_2 I_1$, и, значит, согласно (41,6),

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (41,7)$$

Из двух электрических цепей трансформатора первичной обмоткой будет та, которая подключается к источнику питания и по которой при режиме работы трансформатора без нагрузки (разомкнутая вторичная обмотка) будет протекать только слабый «ток намагничивания» железа трансформатора.

Электромагнитная индукция проявляется не только между электрическими несвязанными проводящими контурами, но и между отдельными частями одного и того же контура, например между витками одной и той же катушки (автотрансформация). В этом случае явление называется самоиндукцией, и в соответствии с выражением (41,3) можно записать, что

$$\mathscr{E}_c = -n\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (41,8)$$

Здесь Φ — значение магнитного потока, связанного со всеми n витками соленоида, L — характеристика эффективности этой связи, или индуктивность катушки. Индуктивность катушки, так же как и взаимная индуктивность двух контуров, будет зависеть от размеров и конфигурации катушки, числа витков в ней, плотности и порядка их намотки, а также от магнитных свойств окружающей среды. Для соленоида без сердечника (рис. 41-4) при $\frac{D}{l} \ll 1$, согласно формулам (41,8), (38,10), получаем

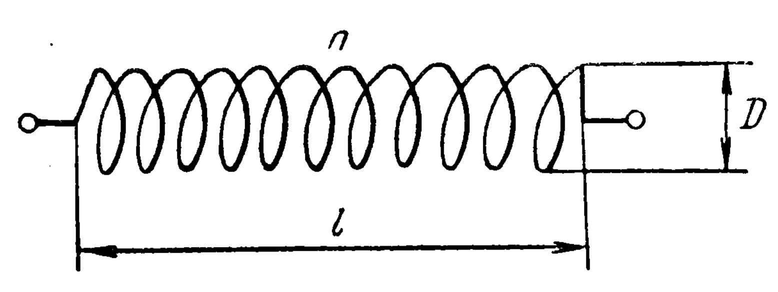


Рис. 41-4. К выводу выражения для индуктивности соленоида

$$L = \frac{4\pi n^2}{l}\mu S = 4\pi\left(\frac{n}{l}\right)^2 V\mu \quad \text{(а. э. м. е.)}. \qquad (41,9)$$

Так как в правую часть входит магнитная проницаемость среды, которая у ферромагнетиков зависит от магнитной напряженности, то индуктивность катушек с ферромагнитными сердечниками косвенно будет зависеть еще и от тока. Единицей индуктивности является генри. Размер этой единицы вытекает из равенства (41,8) и выражает индуктивность такой цепи, в которой при скорости изменения тока в 1 *а/сек* возникает э. д. с. самоиндукции в 1 *в*, очевидно, что 1 *гн* = 10^9 (а. э. м. е.).

Пользуясь формулой (41,8), можно определить энергию, содержащуюся в магнитном поле, связанном с катушкой индуктивности, по которой протекает ток I. Очевидно,

$$W_м = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{E}_c \cdot I(t)\cdot dt = L\int_0^I I(t)\,dI = \frac{1}{2}LI^2. \qquad (41,10)$$

На основании (41,2) и (41,8) могут быть выяснены практически важные закономерности нарастания и исчезновения тока при замыкании и размыкании цепи, содержащей источник электродвижущей силы. Согласно (41,2),

$$I_tR = \mathscr{E} - L\frac{dI_t}{dt},$$

откуда

$$\frac{L\,dI}{\mathscr{E} - I_tR} = dt. \qquad (41,2')$$

Вводя в обе части множитель $-\frac{R}{L}$, после интегрирования (41,2') получаем

$$\ln(\mathscr{E} - I_t R) = -\frac{R}{L} t + \ln C$$

или

$$\mathscr{E} - I_t R = Ce^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (41,11)$$

При замыкании цепи $t = 0$; $\mathscr{E} = \mathscr{E}$ и $I = 0$, следовательно, $C = \mathscr{E}$ на все время переходного режима замыкания, так что закон нарастания тока будет выражаться формулой

$$I_t = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (41,12)$$

При размыкании цепи $t = 0$; $\mathscr{E} = 0$; $I = I_0$, откуда $C = -I_0 R$, и, значит,

$$I_t = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (41,13)$$

Из последних соотношений вытекает, что, чем больше $\frac{R}{L}$ (или чем меньше постоянная времени $\tau = \frac{L}{R}$), тем быстрее завершается переходный режим (рис. 41-5).

На явлении электромагнитной индукции основана работа индукционного разгоняющего электроны аппарата, называемого бетатроном (рис. 41-6, *а*). Переменный магнитный поток создается между фигурными полюсами электромагнита переменным током возбуждения частоты 600 *гц*. В течение интервала времени, когда производная $\frac{d\Phi}{dt}$ сохраняет свой знак (рис. 41-6, *б*), в тороидную вакуумную камеру с помощью электронной пушки вводятся электроны. Согласно (41,3), в круговом контуре трассы движения электронов индуктируется разгоняющее вихревое электрическое поле. Разность потенциалов на один оборот составит

$$\Delta U = -\frac{d\Phi}{c \cdot dt} = -2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}, \qquad (41,14)$$

и, значит,

$$E = \frac{r}{2c} \cdot \frac{dB}{dt} \quad \text{(а. э. м. е.)}. \qquad (41,15)$$

Введенный в камеру электрон подвержен действию трех сил: разгоняющей электрической силы $F_э = eE$, центростремительной пондеромоторной силы Лоренца, направленной к оси магнита и равной $F_Л = Be\frac{v}{c}$, и центробежной силы инерции $F_ц = \frac{mv^2}{r}$. Устой-

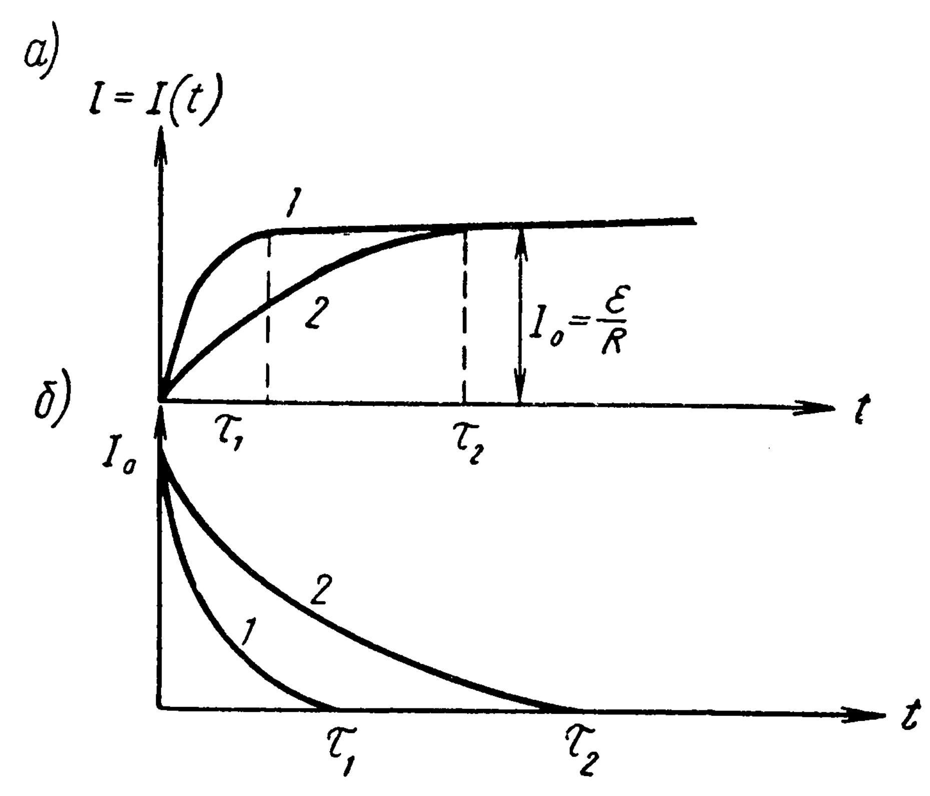


Рис. 41-5. Зависимость тока от времени в переходных режимах:

а) при замыкании цепи; *б*) при размыкании цепи; $\left(\frac{R}{L}\right)_1$ для кривых *1* больше $\left(\frac{R}{L}\right)_2$ для кривых *2*

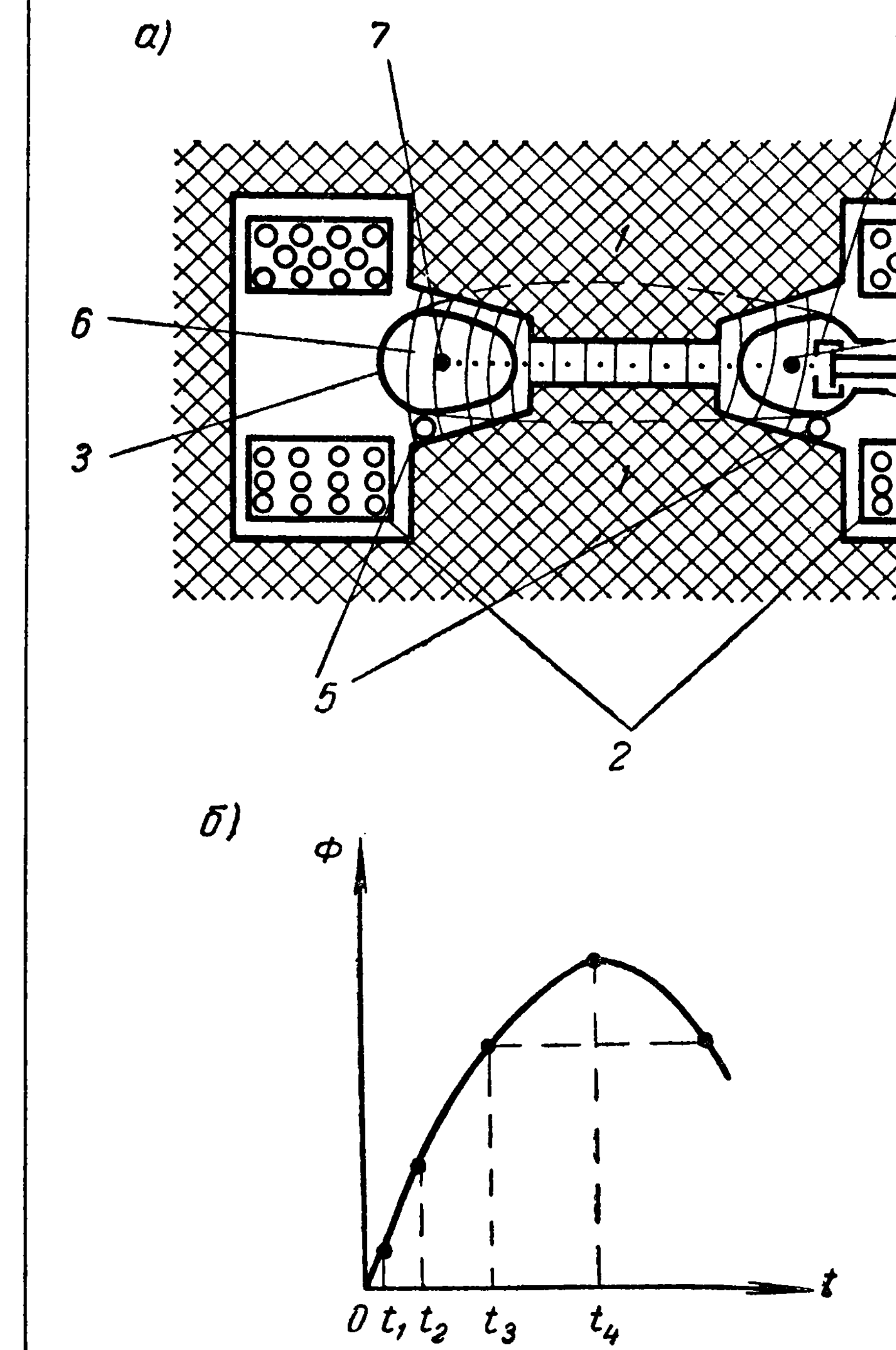


Рис. 41-6. Схематический разрез бетатрона (*а*) и зависимость (*б*) Φ (t)

На рисунке *а*: *1* — полюса электромагнита; *2* — обмотки возбуждения; *3* — тороидная вакуумная камера; *4* — электронная пушка; *5* — смещающая обмотка; *6* — радиальная составляющая поля; *7* — равновесная орбита.

На рисунке *б*: $t_4 = 415$ *мксек* $= \frac{T}{4}$ — время изменения магнитного потока; $t_2 - t_1 \approx 2\% t_4$ — время действия электронной пушки ($t_1 = 0{,}9$ *мксек*; $t_2 = 1{,}6$ *мксек*)

чивость орбиты подчиняется условию $F_Л = F_ц$ или

$$B_0 e \cdot \frac{v}{c} = \frac{mv^2}{r}, \tag{41,16}$$

откуда

$$B_0 = \frac{mv}{er} c, \quad \text{или} \quad B_0 r = \frac{m \cdot c}{e} v. \tag{41,17}$$

Таким образом, скорость электрона определяется произведением $B_0 r$. Так как $\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E_r$, то в соответствии с формулой (41,15)

$$dv = \frac{er}{2mc} dB. \tag{41,18}$$

Отсюда, полагая $m = \text{const}$ и принимая начальные условия $v = 0$, $B = 0$, получаем

$$B = 2 \frac{mv}{er} c = 2B_0, \tag{41,19}$$

где B соответствует среднему по площади равновесной орбиты электрона значению магнитной индукции. Как видно $B = 2B_0$, и, следовательно, в однородном поле была бы нарушена устойчивость, так как $F_Л > F_ц$, и круговая орбита превратилась бы в свертывающуюся спираль. Чтобы этого избежать, магнитное поле бетатрона выполняют бочкообразным (см. рис. 41-6); в таком поле магнитная индукция вдоль радиуса изменяется по закону

$$B(r) \sim \frac{1}{r^n}, \tag{41,20}$$

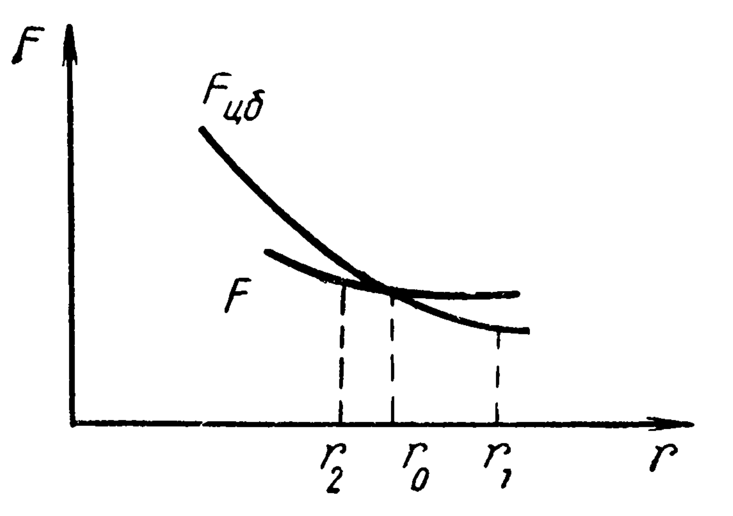


Рис. 41-7. Зависимость изменения центробежной силы $F_{цб}$ и пондеро-моторной силы Лоренца F от радиуса орбиты при показателе изменения магнитной индукции $n < 1$ $(n \approx {}^2/_3)$; $B \sim \frac{1}{r^n}$

где $n < 1 \left(n \approx \frac{2}{3}\right)$. В этом случае всякое нарушение устойчивости орбиты в любую сторону (радиальную или осевую), по сравнению с положением равновесной, вызывает электродинамическую реакцию, восстанавливающую равновесие. При радиальном смещении орбиты восстановление происходит согласно формулам (41,16), (41,20) (рис. 41-7), а при аксиальном смещении — из-за радиальной составляющей магнитного поля H_r во всей области за исключением плоскости равновесной орбиты (рис. 41-6, *а*). Так как масса разгоняемой β-частицы (электрона) одинаково входит в выражения для B_0 (41,17) и B (41,19), то сделанные выводы справедливы и для релятивистских скоростей, однако при определении скорости разгона электрона необходимо в выражение (41,17) ввести релятивистские поправки. Так как $m = m_0 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, то из формулы (41,17)

получим

$$Br = \frac{m_0c^2}{e} \cdot \beta (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (41,21)$$

или

$$Br = \frac{m_0c^2}{e} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\varepsilon}{e} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (41,22)$$

где $\varepsilon = m_0c^2$. Кинетическая энергия движущегося электрона

$$E_к = eU = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \qquad (41,23)$$

В индукционном ускорителе за короткий промежуток времени разгона ($\sim 10^{-3}$ *сек*) электрон совершает путь в несколько сотен километров (до 10^6 оборотов), приобретая энергию до 100 *Мэв*. Предел скорости определяется радиационными потерями энергии, сопровождающими разгон ускоряемого электрона.

Лекция 42

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

Неразрывная электродинамическая связь электрической и магнитной компонент электромагнитного поля, аналогия в понятиях и соотношениях для каждого из этих полей находят свое выражение в уравнениях Максвелла.

Физическое содержание системы этих уравнений выявляется особенно отчетливо при интегральной форме их записи. При этом обычно используется гауссова система единиц измерения электрических и магнитных величин *.

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad \varepsilon = \frac{D}{E} = \varepsilon(\rho, T, \nu, \xi) \\ &2. \quad \mu = \frac{B}{H} = \mu(\rho, T, \nu, \xi) \end{aligned}\right\} \qquad (42,1)$$

Эти выражения определяют специфические характеристики среды в отношении электрической (диэлектрическая проницаемость ε) и магнитной (магнитная проницаемость μ) компонент электромагнитного поля.

---

* В этой системе электрические величины выражаются в абсолютной электростатической системе (а. э. е.), опирающейся на закон электростатического взаимодействия зарядов (закон Кулона), а магнитные величины — в абсолютной электромагнитной системе (а. э. м. е.), основывающейся на электродинамическом взаимодействии токов.

Здесь ν — частота изменения поля, ξ — параметр качества среды, который в общем случае показывает зависимость ε и μ соответственно от E и H.

$$\left.\begin{aligned} &3.\quad \int_S D_n dS = 4\pi \sum_1^n q_i \\ &4.\quad \int_S B_n dS = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (42{,}2)$$

Эти соотношения выражают утверждение о существовании электрических зарядов, порождающих поток электростатической индукции, или диэлектрического смещения, и утверждение об отсутствии магнитных зарядов, или магнитных масс (вихревое поле), но о существовании магнитного потока.

Пятое выражение определяет специфический фактор электрической проводимости среды, т. е. является законом Ома:

$$5.\quad \sigma = \frac{i}{E}. \qquad (42{,}2')$$

Здесь i — плотность тока переноса или тока, осуществляемого конвекцией, дрейфом носителей зарядов в электрическом поле, электронов в вакууме и проводниках, p- и n-центров в полупроводниках, ионов и других заряженных частиц в вакууме и электролитах.

Шестое и седьмое выражения содержат важнейшие утверждения о взаимосвязях и взаимных превращениях электрических и магнитных полей в их динамике.

$$6.\quad \oint_l E_t\, dl = \sum_1^m \mathscr{E}_i - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n dS \sim \mathscr{E} \qquad (42{,}3)$$

— циркуляция вектора напряженности электрического поля. Здесь $\mathscr{E}_i$ — электродвижущие силы источников, содержащихся в рассматриваемом замкнутом контуре l, второе слагаемое правой части — электродвижущая сила, действующая в контуре в результате электромагнитной индукции (рис. 42-1, *а*), $\mathscr{E}$ представляет полную электродвижущую силу, действующую в контуре.

$$7.\quad \oint_l H_t \cdot dl = \frac{4\pi}{c}\sum_1^m I_\text{к} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S D_n dS \sim I \qquad (42{,}4)$$

— циркуляция вектора напряженности вихревого магнитного поля с учетом тока смещения (рис. 42-1, *б*), который по теореме Остроградского — Гаусса составляет:

$$I_\text{см} = \frac{1}{4\pi}\dot{N}.$$

Здесь $I_к$ — токи проводимости и конвекции, охваченные контуром l, I — полный ток, протекающий сквозь площадь, охватываемую тем же контуром.

Таким образом, система уравнений Максвелла объединяет все свойства электромагнитного поля как физического континуума. Эти уравнения, записанные в дифференциальной форме, связывают величины, характеризующие электромагнитное поле в смежных точках пространственно-временной протяженности.

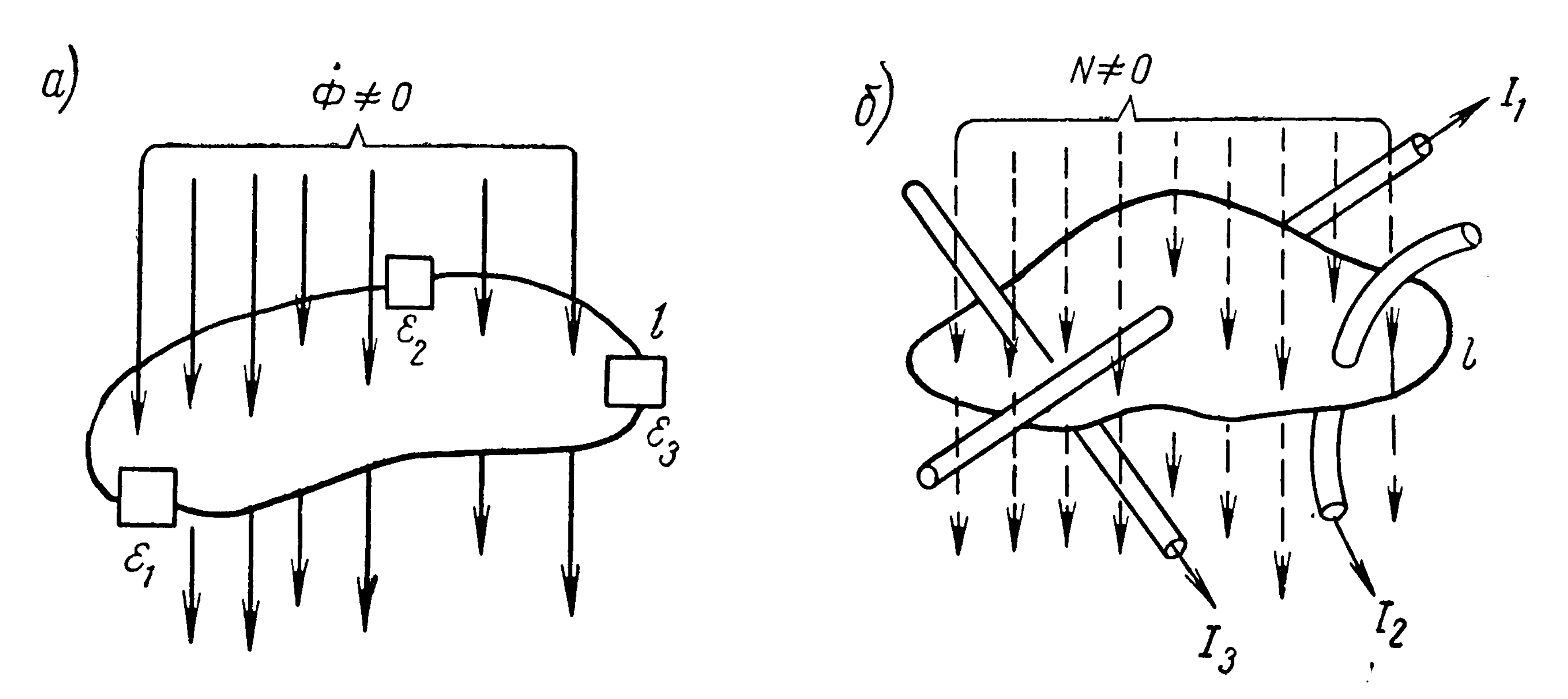


Рис. 42-1. К записи уравнений Максвелла в интегральной форме:
а) к уравнению (42,3) $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ — э. д. с. источников; Φ — изменяющийся во времени магнитный поток, пронизывающий контур l; *б*) к уравнению (42,4) I_1, I_2, I_3 — локальные токи проводимости; N — изменяющийся во времени поток электростатической индукции, пронизывающий контур l

Из выражения (42,3) при направлениях вектора E вдоль оси z, вектора H вдоль оси y и при отсутствии электродвижущих сил источников питания с учетом, что $dS = dzdx$ и $dl = dz$, следует

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}; \tag{42,5}$$

из формулы (42,4) при отсутствии локальных токов и при $dS = dydx$, $dl = -dy$ вытекает, что

$$\frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{42,6}$$

После дифференцирования (42,5) по x, а (42,6) по t получаем волновое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \tag{42,7}$$

Сравнивая его с выражением (11,3), заключаем, что рассматриваемое электромагнитное поле будет распространяться вдоль оси x в направлении поступательного перемещения правовинтового

штопора при вращении от E к H. Скорость распространения фазы колебания E (или H) будет равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{42,8}$$

Электромагнитное поле является носителем электромагнитной энергии, и его распространение представляет собой один из видов передачи этой энергии. На оптических частотах ($\nu > 10^{14}$ *гц*) для всех веществ $\mu = 1$ и, следовательно,

$$\frac{c^2}{v^2} = n_\nu^2 = \varepsilon_\nu \tag{42,8'}$$

— закон Максвелла.

При очень высоких частотах изменения электромагнитного поля ($\nu > 10^{20}$ *гц*) проявляются его дискретные квантовые свойства с возможными преобразованиями массы движения $\frac{h\nu}{c^2}$ в массы покоя частиц, например квантовое превращение с образованием электронных пар.

В сетях проволочной связи провода играют роль направляющих линий для движущейся энергии электромагнитного поля. Эти направляющие поглощают часть передаваемой электромагнитной энергии, так как в них происходит дрейф электронов. При наличии электрического сопротивления такой дрейф приводит к преобразованию электромагнитной энергии в тепло (эффект Джоуля — Ленца).

Передача энергии без проводов (радиоизлучение, свет, γ-кванты) осуществляется в вакууме на очень большие дистанции.

Напряженность электрического поля между проводами обычной цепи постоянного электрического тока содержит две составляющие: нормальную E_n и тангенциальную E_t (рис. 42-2). В соответствии с правилом (E, H) штопора, определяющим направление распространения электромагнитной энергии (см. рис. 42-2), можно отметить следующее: во-первых, распространение энергии (вектор v) происходит от источника к приемнику вдоль проводов и, во-вторых, втекание энергии электромагнитного поля (вектор v') происходит со всех сторон в провода (преобразуется в джоулево тепло). Для создания обратного направления движения электромагнитной энергии от проводов необходимо иметь источник питания, столь быстро изменяющий свою полюсность, что вектор E_t меняет свое направление несколько раньше, чем происходит изменение направления вектора H, которое связано с инерцией электронов, дрейфующих в проводах. В эти короткие интервалы времени вектор v' будет направлен не в провода, а от них. Чем выше частота ν изменений полюсности источника питания, тем больше (пропорционально ν^4) излучаемая в форме волны синфазных колебаний компонент поля электромагнитная энергия. При этом энергия вдоль проводов также будет циркулировать, распространяясь ритмично от источников

к приемнику и в обратном направлении. В излучающей антенне, следовательно, образуются стоячие волны.

Таким образом, передача энергии без проводов связана с созданием высокочастотного источника питания энергией той системы

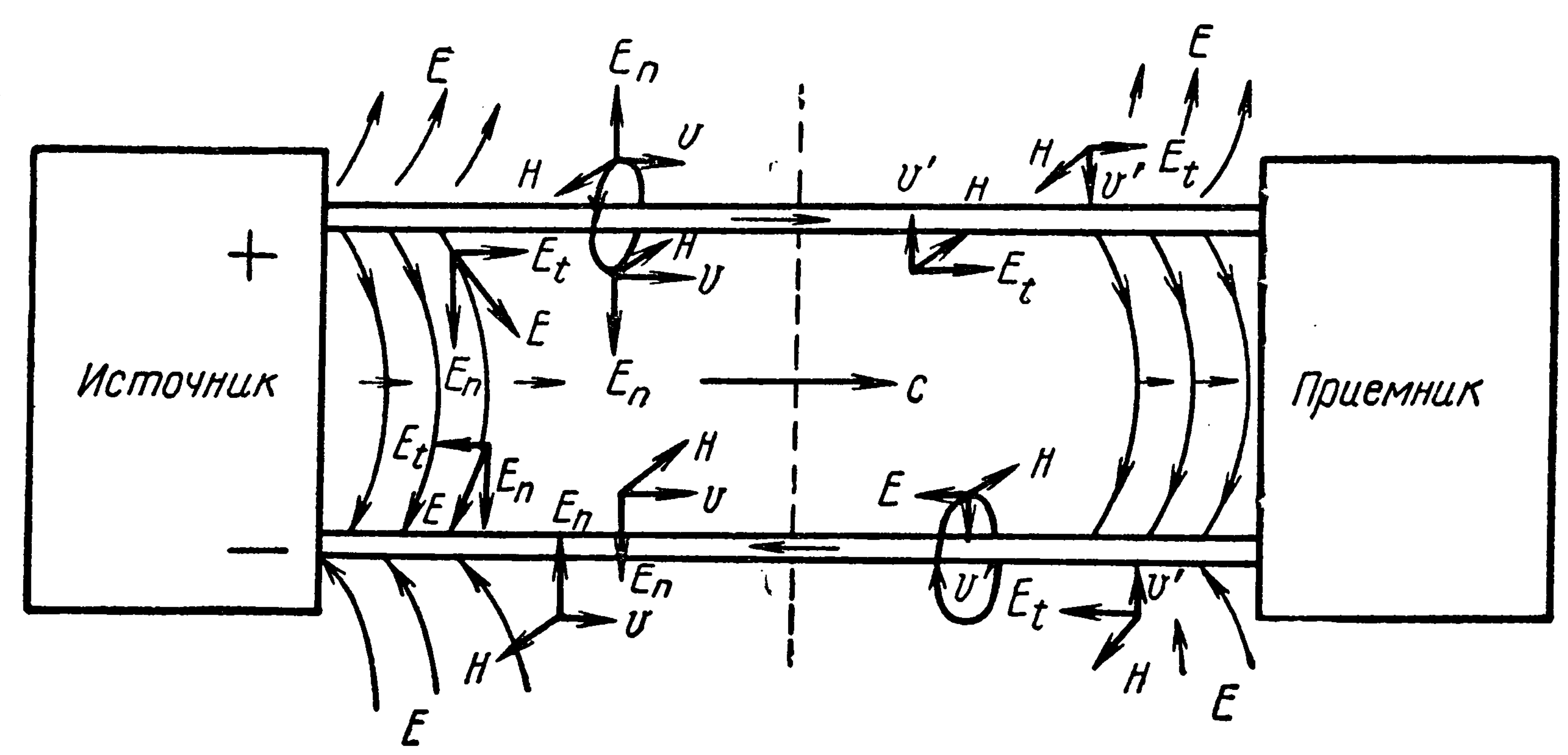


Рис. 42-2. Движение электромагнитной энергии (E_n и E_t — составляющие электрического поля; H — напряженность магнитного поля тока; v и v' — векторы скоростей движения электромагнитной энергии; c — скорость распространения энергии)

проводов, которая предназначена для излучения электромагнитной энергии и которую называют антенной. Объемная плотность излучаемой энергии вследствие равенства средних значений энергии электрической и магнитной компонент поля будет равна

$$w_{э.\,м} = w_э + w_м = = 2w_э = 2w_м, \quad (42,9)$$

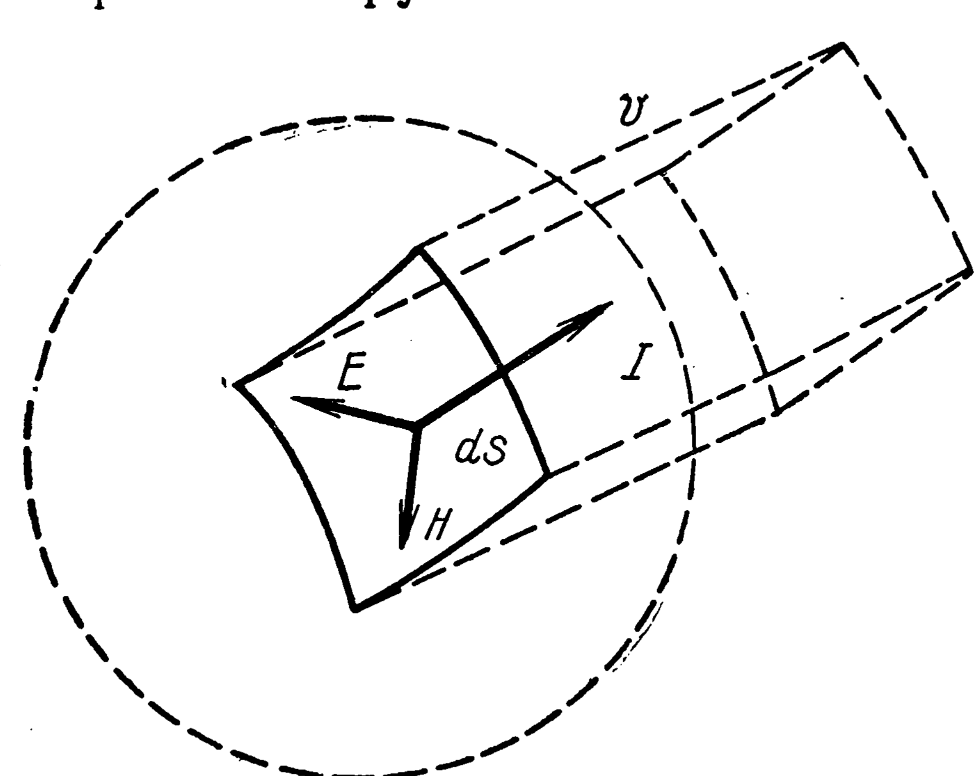


Рис. 42-3. Излучение электромагнитной энергии.

Пунктиром показан объем, в котором заключена ежесекундно излучаемая энергия dP с площадки антенны dS. I — вектор Умова — Пойнтинга

причем

$$w_э = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = w_м \quad \text{или}$$

$$E\sqrt{\varepsilon} = H\sqrt{\mu}. \quad (42,10)$$

В таком случае интенсивность излучения, или энергия, излучаемая в заданном направлении с единицы поверхности антенны в единицу времени, составит (рис. 42-3)

$$I = w_{э.\,м}\,v = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{dP}{dS} \qquad (42,11)$$

— вектор Умова — Пойнтинга, где E и H — действующие значе-

ния синфазно изменяющихся напряженностей полей в испускаемой волне, P — мощность электромагнитного излучения.

Электрон, движущийся с ускорением, также является источником электромагнитного излучения. Создаваемое им в вакууме мгновенное электромагнитное поле характеризуется равными компонентами напряженности, т. е.

$$H' = E' = \frac{e}{rc^2}\ddot{x}\sin\theta, \tag{42,12}$$

где $\ddot{x} = \frac{e}{m}E$ — ускорение электрона.

Действительно, если электрон, движущийся вдоль оси x со скоростью $v \ll c$, в течение весьма короткого времени затормаживается в точке O (рис. 42-4), так что $\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\delta t}$, то в момент $t=0$ поток электрического смещения сквозь площадь круга PQ, нормальную к оси x, составит

$$N = 4\pi e\frac{S_{\text{сегм}}}{S_{\text{сф}}} = 2\pi e(1-\cos\theta). \tag{42,13}$$

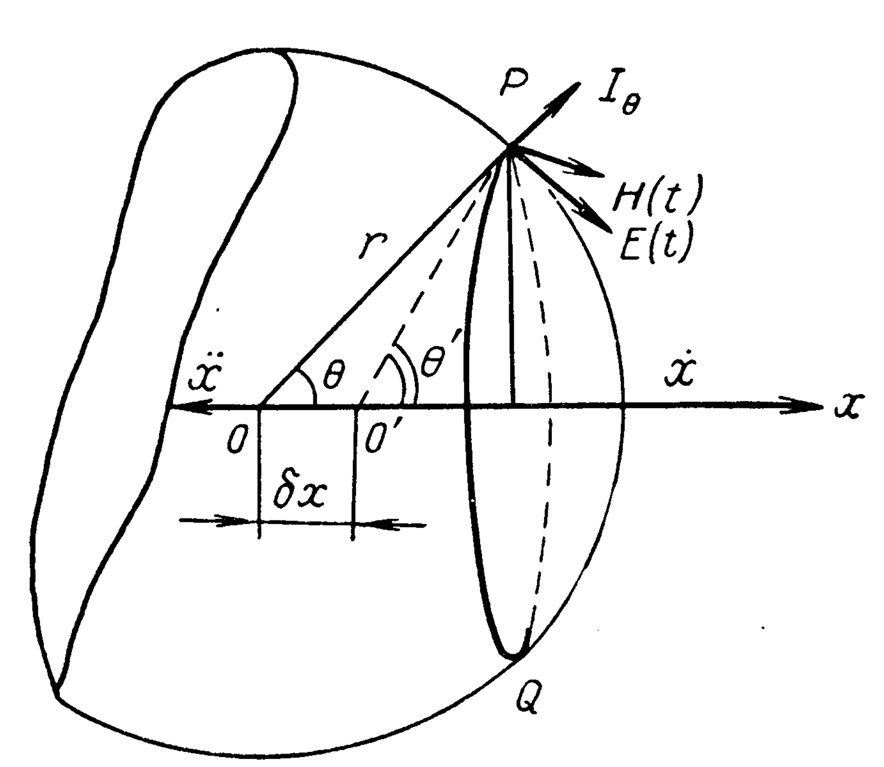


Рис. 42-4. Излучение электромагнитной энергии затормаживаемым электроном

К моменту времени $t = \frac{r}{c}$ напряженность поля в точке P будет соответствовать положению электрона в точке O' при его равномерном движении на расстояние

$$\delta x = \dot{x}\frac{r}{c} \tag{42,14}$$

от точки O.

Спустя промежуток времени торможения δt напряженность поля в точке P примет значение, соответствующее положению электрона в точке O. Таким образом, за время от $t = \frac{r}{c}$ до $t = \frac{r}{c} + \delta t$ поток электрического смещения N сквозь ту же площадь круга будет изменяться со скоростью

$$\frac{\delta N}{\delta t} = 2\pi e\frac{\cos\theta' - \cos\theta}{\delta t}. \tag{42,15}$$

Этот спад потока характеризуется током смещения

$$I_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{1}{2}e\frac{\delta\cos\theta}{\delta t} = -\frac{1}{2}e\sin\theta\frac{\delta\theta}{\delta t}. \tag{42,16}$$

Но $\delta\theta = \frac{\delta x}{r}\sin\theta = \frac{\dot{x}}{c}\sin\theta$, так что $\frac{\delta\theta}{\delta t} = -\frac{\ddot{x}}{c}\sin\theta$ при $\ddot{x} = t\frac{\delta\dot{x}}{\delta t}$. Отсюда

$$I_{\text{см}} = \frac{1}{2}\frac{e\ddot{x}}{c}\sin^2\theta \text{ (а. э. е.).} \tag{42,17}$$

Согласно уравнению Максвелла (42,4),

$$\oint H_t dl = \frac{4\pi}{c} I_{\text{см}},$$

так что для круга PQ (см. рис. 42-4) имеем

$$H' \sin\theta \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{2} \frac{e\ddot{x}}{c} \sin^2\theta,$$

откуда получаем выражение (42,12), т. е.

$$H' = \frac{e\ddot{x}}{rc^2} \sin\theta \, (\text{а. э. м. е.}) = E' \, (\text{а. э. е.}),$$

поскольку для вакуума напряженности электрического (в а. э. е.) и магнитного (в а. э. м. е.) полей численно равны. Как видно, компоненты напряженности электромагнитного поля, обусловленные ускорением движения заряда, изменяются обратно пропорционально первой, а не второй степени расстояния, так что излучение электрона обнаруживается на таких расстояниях, на которых напряженность его электростатического поля исчезающе мала.

Компонентам E и H электромагнитного поля ($E' \perp H'$) затормаживающегося заряда соответствует интенсивность излучения электромагнитной энергии, которая в заданном направлении, согласно (42,11), будет равна

$$I_\theta = \frac{c}{4\pi} (E'_\theta)^2. \qquad (42,18)$$

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лекция 43

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Как было показано (см. рис. 42-2), измерение электромагнитной энергии возможно при наличии высокочастотных колебаний разности потенциалов, создаваемой источником, питающим излучающую систему — антенну.

Для возбуждения таких колебаний служат колебательные CRL контуры (рис. 43-1).

Контур с сосредоточенными параметрами состоит из конденсатора C, катушки индуктивности L и проводов, обладающих электрическим сопротивлением R.

Чтобы возбудить собственные колебания в контуре, необходимо извне создать импульс, при котором в контур была бы передана некоторая электромагнитная энергия. Это может быть выполнено либо предварительной зарядкой конденсатора, либо механическим удалением намагниченного тела от катушки индуктивности. В первом случае введенная в контур энергия представляет собой потенциальную энергию электрического поля заряженного конденсатора, во втором — ту часть энергии магнитного поля ферромагнетика, которая определяется магнитным потоком, охватывающим витки катушки индуктивности.

Рассматривая контур, в котором $R \approx 0$, и принимая первый из упомянутых способов возбуждения колебаний, отмечаем, что в момент $t = 0$ (рис. 42-1, *а*) конденсатор оказывается заряженным до начальной разности потенциала U_0 и, значит, содержит начальную потенциальную энергию

$$W_0 = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_э.$$

В тот же начальный момент времени ток $I = 0$. Контур оказывается в состоянии, аналогичном состоянию математического маятника, отклоненного на угол α_0. Спустя первую четверть периода возникающих колебаний электрического поля (рис. 41-1, *б*) конденсатор

будет разряжен ($U = 0$), а электрический ток достигнет своего максимального значения $I = I_m$, причем кинетическая энергия движения электрического поля будет представлена энергией магнитного поля тока вокруг катушки индуктивности и, согласно выражению (41,10), составит

$$W_м = \frac{1}{2} L I_m^2 = W_0.$$

Механической аналогией этого состояния будет движение маятника — момент прохождения его через положение равновесия. Еще

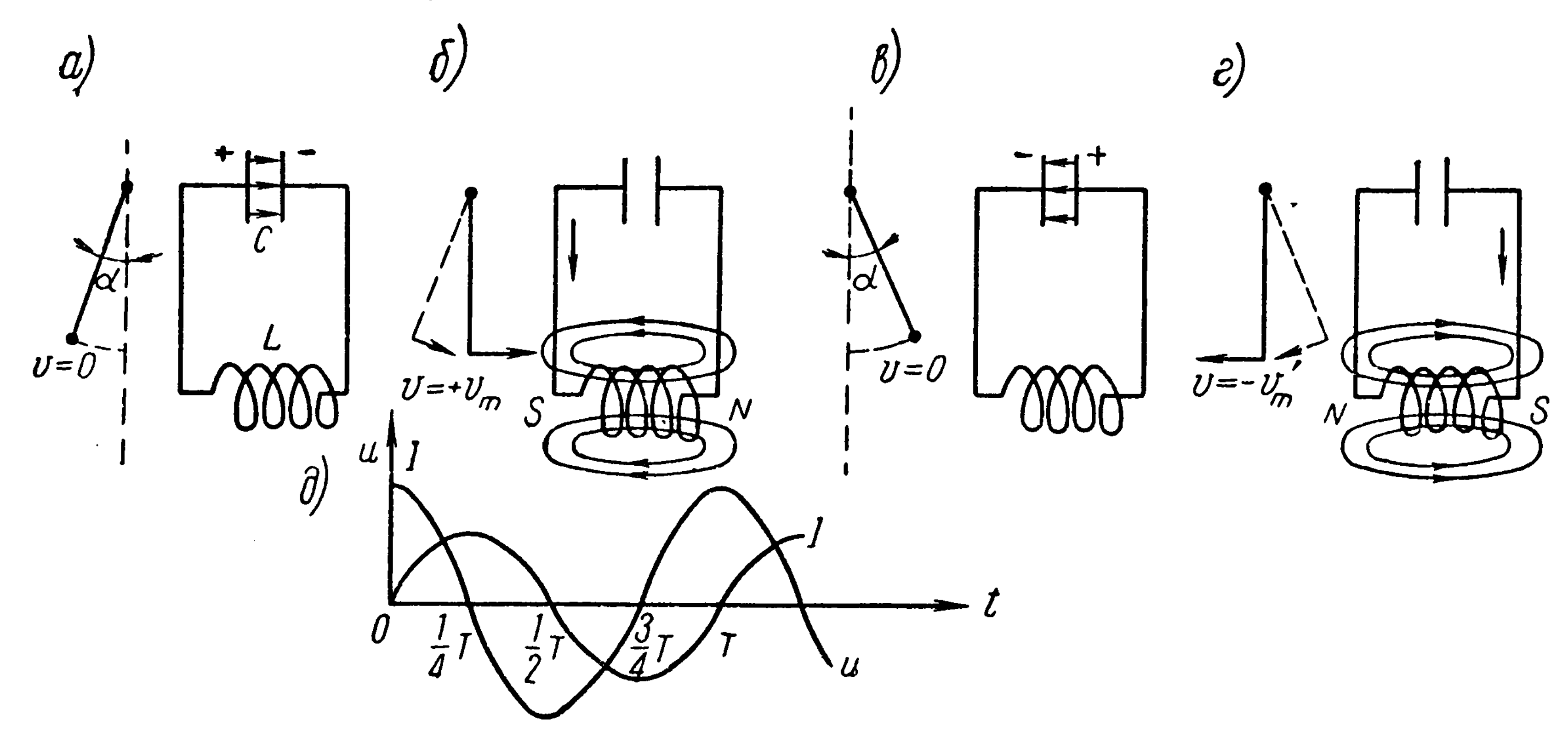


Рис. 43-1. Изменение тока и разности потенциалов в колебательном контуре ($T = 2\pi\sqrt{LC}$):

а) $t = 0$; $U = U_0 = U_{макс}$; $I = 0$; $W_э = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_0$;

б) $t = \frac{1}{4} T$; $U = 0$; $I = I_0 = I_{макс}$; $W_м = \frac{1}{2} L I_0^2 = W_0$;

в) $t = \frac{1}{2} T$; $U = -U_0$; $I = 0$; $W_э = W_0$;

г) $t = \frac{3}{4} T$; $U = 0$; $I = -I_0$; $W_м = W_0$;

д) развертки $U = U(t)$ и $I = I(t)$ при $\beta = 0$

через четверть периода под действием электродвижущей силы индукции, возникающей при исчезновении магнитного поля вокруг катушки индуктивности, конденсатор перезарядится до $U = - U_0$, причем ток в контуре снова будет равен нулю. Аналогией этого состояния служит отклонение маятника в другую сторону от положения равновесия на тот же по величине угол — α (рис. 43-1, *в*). В течение третьей и четвертой частей периода протекают процессы такие же, как и в первые две четверти. Механической аналогией при этом будет возвращение маятника из крайнего правого положения через положение равновесия (рис. 43-1, *г*) в начальное крайнее левое (рис. 43-1, *а*) с тем же запасом энергии, поэтому

$$\frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 = W_0.$$

Применяя уравнение Максвелла (42,3) к рассматриваемому контуру, можно записать

$$U - \mathscr{E} = 0 \quad \text{или} \quad L\ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0. \tag{43,1}$$

Полагая $\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC}$, получим

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{43,1'}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения второго порядка будет представлено суммой двух частных решений [см. (10,2)]:

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \tag{43,2}$$

Значения постоянных интегрирования вытекают из граничных условий: при $t = 0$ $q = q_0$ и $\dot{q} = \dot{q}_0$ и, значит, $C_1 = q_0$ и $C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}$, так что

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \tag{43,2'}$$

Полагая $a \cos \beta = q_0$ и $a \sin \beta = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}$, т. е. принимая, что

$$a = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2} \tag{43,3}$$

и

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{q}_0}{q_0 \omega_0}, \tag{43,4}$$

согласно выражению (43,2'),

$$q = a \cos(\omega_0 t - \beta), \tag{43,5}$$

а так как $q = CU$, то

$$U = \frac{a}{C} \cos(\omega_0 t - \beta) = U_0 \cos(\omega_0 t - \beta) \tag{43,6}$$

и

$$\dot{q} = I = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t - \beta) = -I_m \sin(\omega_0 t - \beta), \tag{43,7}$$

причем, согласно принятому обозначению, $\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC}$, откуда

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \tag{43,8}$$

Таким образом, разность потенциалов на обкладках конденсатора и ток, протекающий в контуре, изменяются по гармоническому закону со сдвигом фаз относительно друг друга на $\pi/2$.

При $R = 0$

$$W_э + W_м = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2(\omega_0 t - \beta) + \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2(\omega_0 t - \beta) = W_0. \tag{43,9}$$

Выражение (43,8), называемое формулой Томсона, показывает, что при $R \approx 0$ период электромагнитных колебаний, возникающих в контуре, определяется исключительно значениями индуктивности и емкости. Согласно (43,8), контур с сосредоточенными параметрами не излучает энергии. Потенциальная энергия электрического поля заряженного конденсатора полностью преобразуется в кинетическую энергию этого поля в форме энергии, запасенной в магнитном поле индуктивности. Если $R \neq 0$, то колебания тока в контуре будут затухать с постепенным преобразованием запасенной вначале электромагнитной энергии в тепло. Для восполнения этих потерь электромагнитной энергии необходим периодически действующий источник питания.

Из формулы (43,8) вытекает, что частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ будет тем больше, чем меньше индуктивность и емкость, присутствующие в контуре.

Последовательный переход неизлучающего колебательного контура с сосредоточенными параметрами в открытый излучающий высокочастотный вибратор Герца с малыми значениями индуктивности и емкости, но с большим затуханием из-за наличия искрового промежутка, показан на рис. 43-2. Эксперименты Герца, установившие идентичность свойств электромагнитных волн и света, послужили толчком к величайшему открытию нашего времени — к открытию А. С. Поповым радиосвязи. На рис. 43-3 изображена картина волнообразования в электромагнитном поле вибратора Герца.

Для приема радиосигналов в качестве чувствительного элемента А. С. Поповым было использовано порошковое сопротивление (когерер), включенное в цепь батареи телеграфного аппарата. Переменное электромагнитное поле проходящей радиоволны вызывало искрообразования на контактах частиц когерера, вследствие чего резко изменялось (уменьшалось) его сопротивление. Последующее срабатывание электромеханического реле вызывало встряхивание когерера и восстановление его сопротивления. Работа отправительных радиостанций, использующих затухающие колебания, сопряжена со значительными понижениями их мощности. Для возбуждения незатухающих колебаний несущей волны необходимо иметь не только источник питания, колебательный контур и антенну, но и устройство, с помощью которого было бы возможно автоматически, своевременно и синхронно с колебаниями в контуре передавать в контур импульсы энергии, покрывающие потери электромагнитной энергии. В случае колеблющегося маятника в часовом механизме такие функции в сочетании с храповым колесом выполняет механическое устройство, называемое анкером (якорем). В радиосхемах такой результат достигается при помощи радиолампы — триода (или кристаллического триода — транзистора) и при наличии обратной электромагнитной связи (емкостной или индуктивной) анодного контура с контуром управляющего электрода (рис. 43-4).

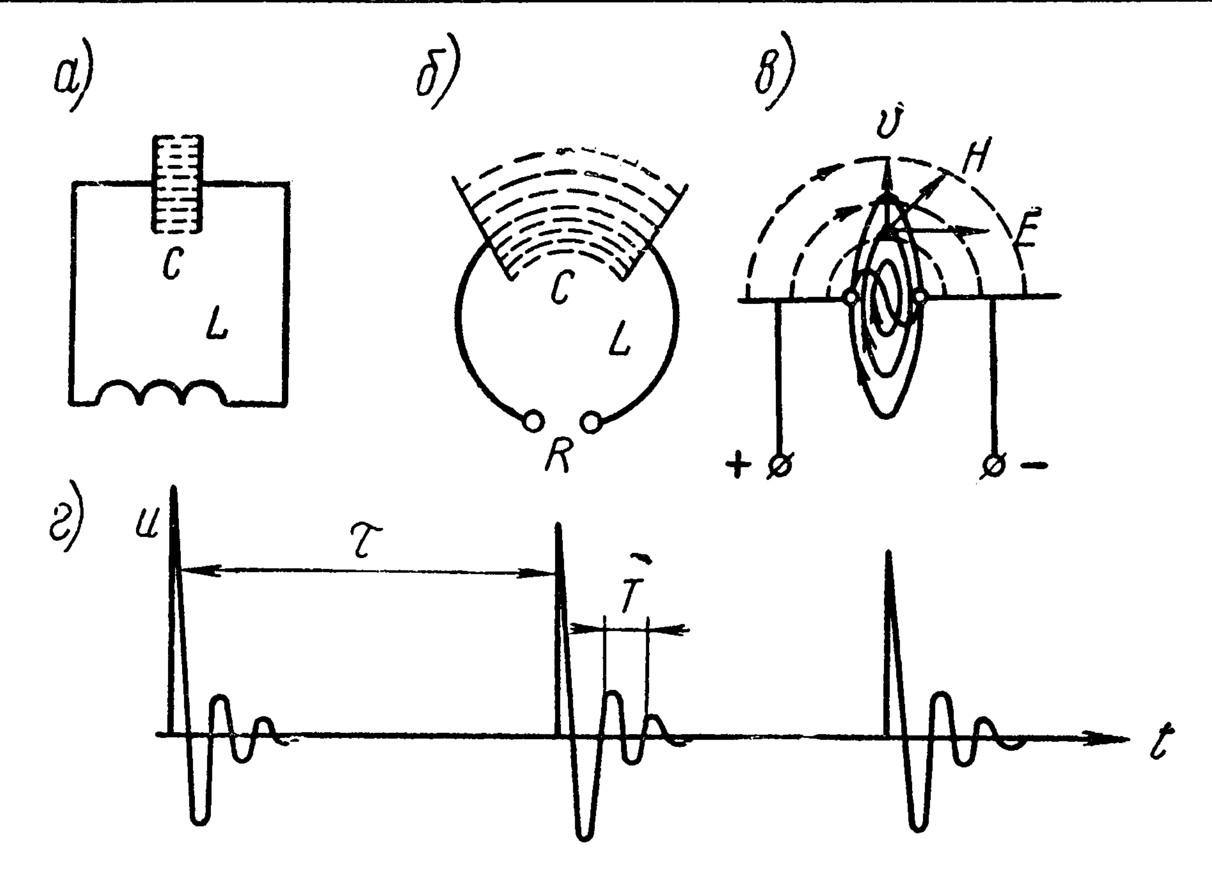


Рис. 43-2. Переход колебательного контура в излучающий вибратор Герца:

а) колебательный контур с сосредоточенными параметрами ($R \approx 0$); *б*) модификация контура путем уменьшения C и L ($R \approx \infty$); *в*) вибратор с питающими вводами ($0 < R < \infty$); *г*) развертка затухающих колебаний вибратора Герца.

τ — время паузы между импульсами питания (пробоя); T — период колебаний.

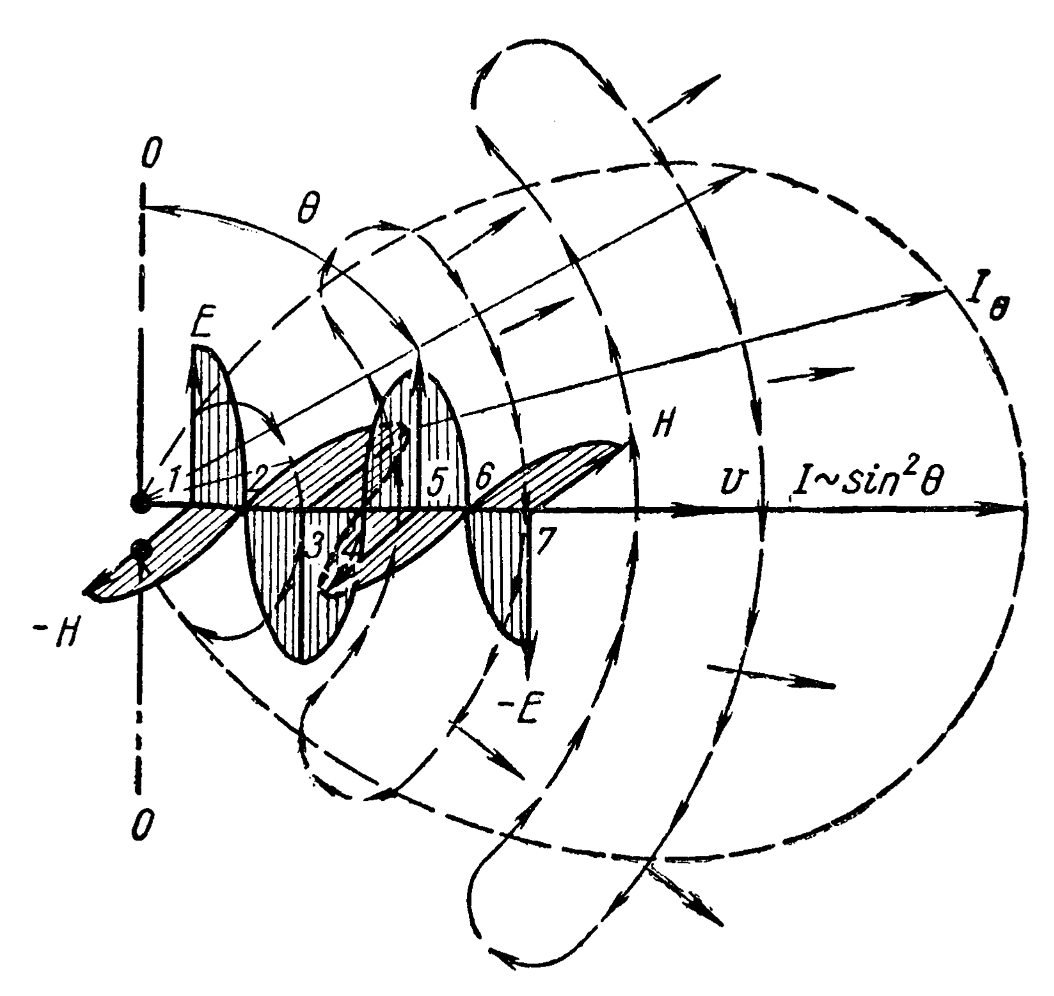


Рис. 43-3. Образование электромагнитной волны.

Тонкими малыми стрелками очерчены контуры распространяющихся силовых линий вихревого электрического поля. Волной показана мгновенная картина значений E и H вдоль луча (E и H — синфазны), E лежит в плоскости, содержащей ось вибратора ОО. Пунктиром очерчена индикатрисса интенсивности излучения в плоскости чертежа

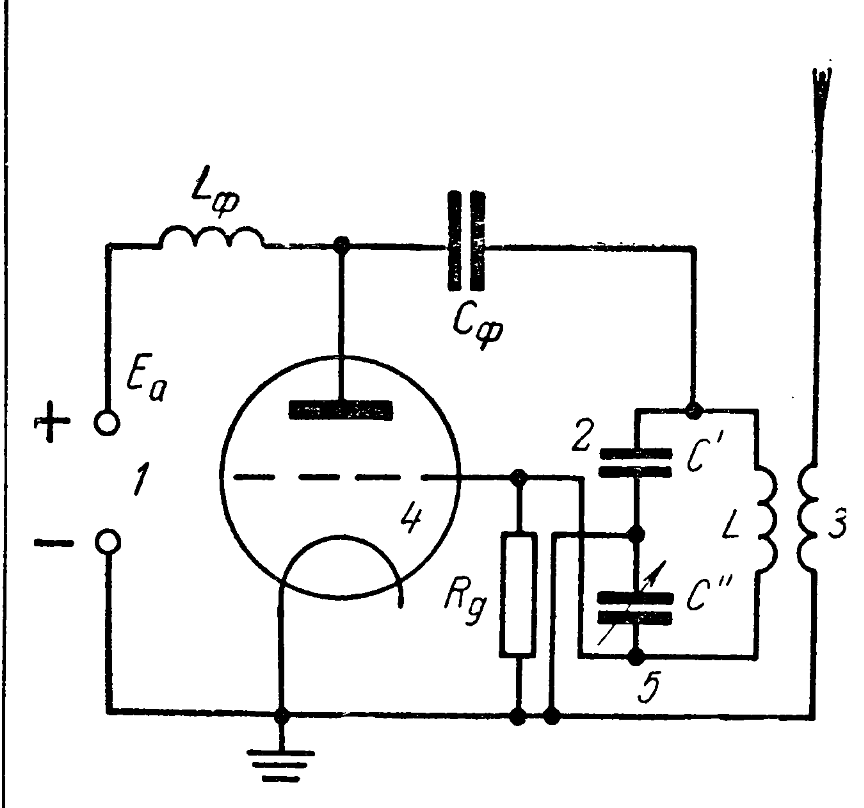


Рис. 43-4. Схема трехточечного генератора высокочастотных незатухающих автоколебаний с емкостной обратной связью ($L_ф$ и $C_ф$ — ограничители в анодной цепи соответственно для высокой и низкой частот):

1 — источник питания; *2* — колебательный контур, определяющий частоту излучаемых колебаний; *3* — излучающий электрод (антенна), *4* — ламповый или кристаллический триод; *5* — емкостная C'' обратная связь с управляющей сеткой

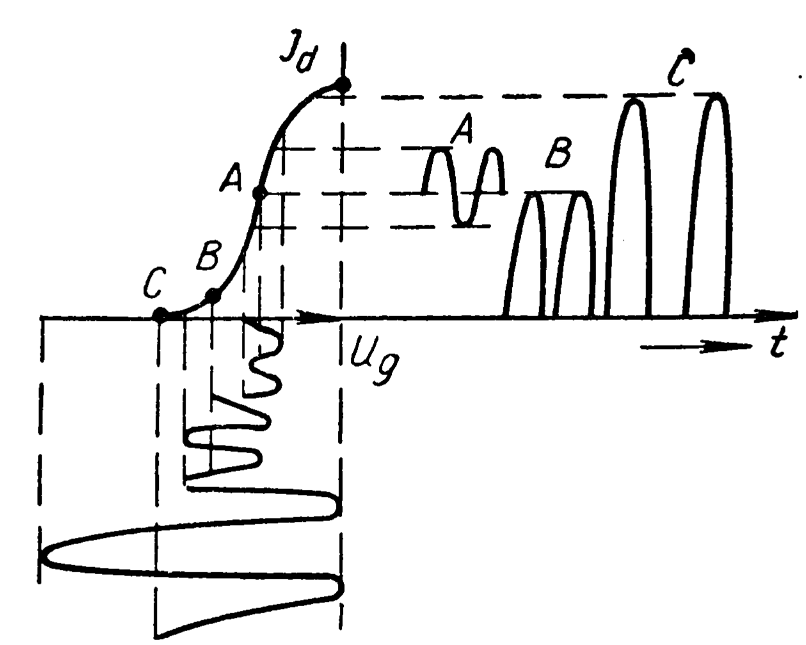


Рис. 43-6. Характеристики триода. Класс *А* характерен для линейных усилителей по напряжению; класс *В* — для усилителей по мощности; класс *С* — для резонансных усилителей

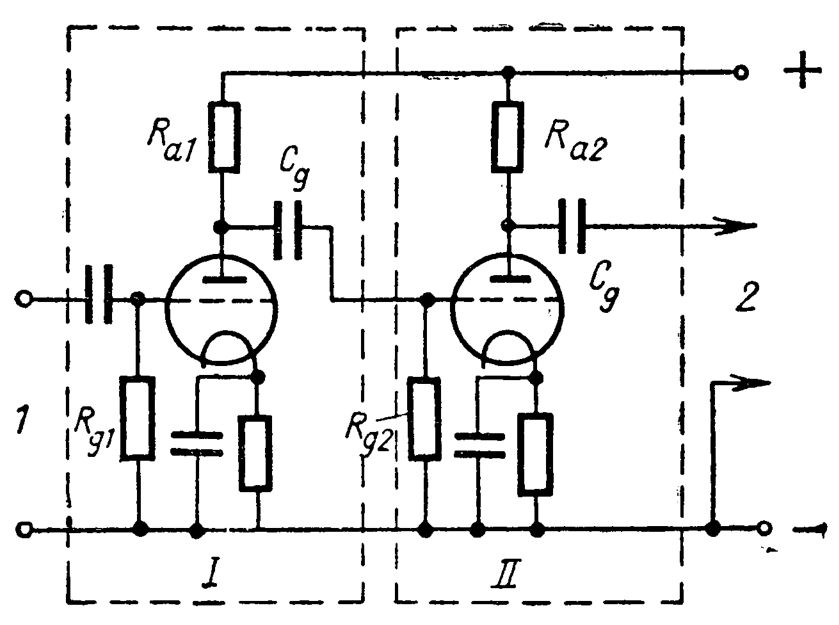


Рис. 43-5. Два каскада простого реостатно-емкостного усилителя на ламповых триодах:

1 — вход сигнала в каскад *I*; *2* — выход сигнала из каскада *II*

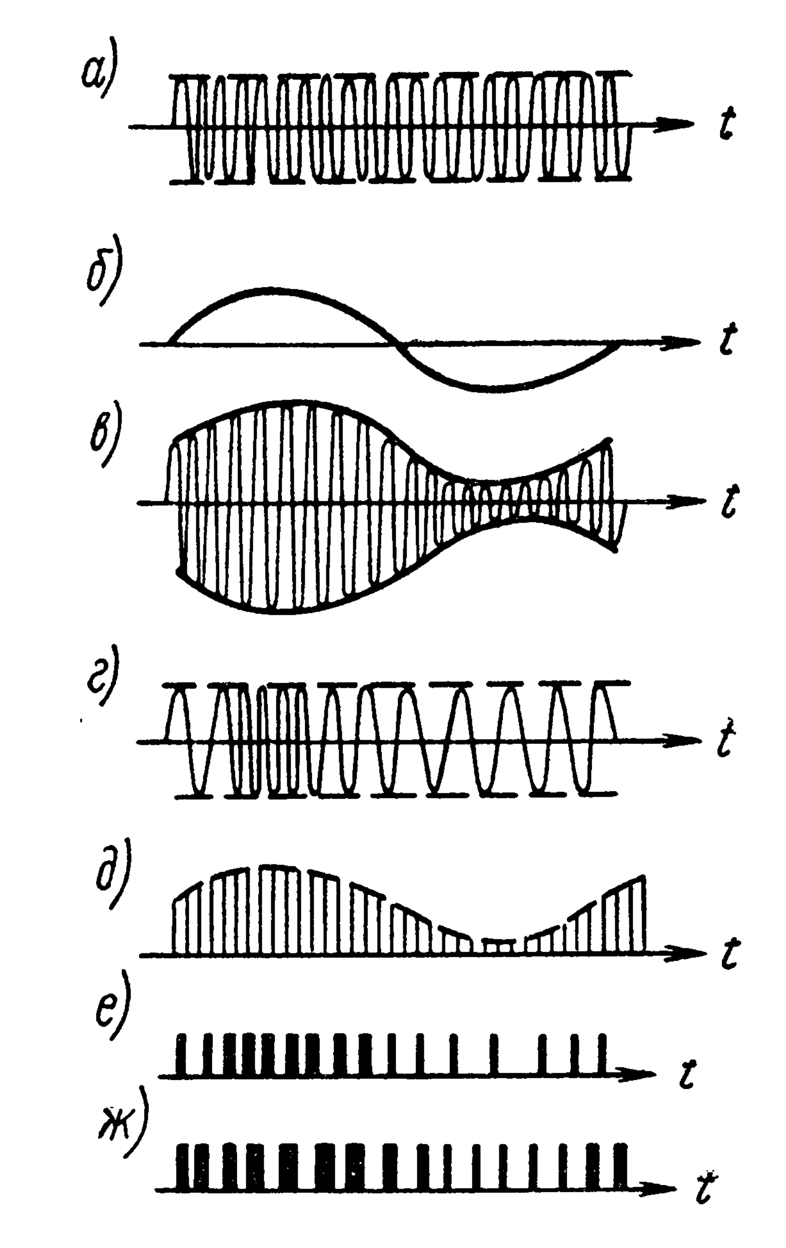


Рис. 43-7. Модуляция колебаний:

а) высокочастотная несущая волна; *б*) модулирующая волна; *в*) амплитудная модуляция; *г*) фазовая или частотная модуляция; *д*) импульсная модуляция по амплитуде; *е*) то же, по скважности; *ж*) то же, по длительности импульсов

Для приема сигналов служат разнообразные усилительные схемы (рис. 43-5) с применением ламповых или кристаллических триодов и с различным расположением рабочих точек на их характеристиках (рис. 43-6).

Для передачи сигналов низкой (звуковой) частоты путем излучения электромагнитной энергии на высокой частоте (порядка мегагерц) применяют модуляцию колебаний: амплитудную, фазовую, частотную или импульсную (рис. 43-7).

Если уравнение несущей волны представлено в виде

$$y = A \sin \omega t,$$

а уравнение модулирующего колебания звуковой частоты ($\omega' \leqslant \omega$) имеет вид (рис. 43-7, *б*)

$$y = A' \sin \omega' t,$$

тогда при амплитудной модуляции

$$y = A\,(1 + m \sin \omega' t) \sin \omega t, \qquad (43,10)$$

где $m = \frac{A_{\text{макс}} - A_{\text{мин}}}{A_{\text{макс}} + A_{\text{мин}}}$ определяет глубину модуляции (рис. 43-7, *в*); при фазовой модуляции

$$y = A \sin(\omega t + \varphi \sin \omega' t) = A \sin[\omega t\,(1 + m \sin \omega' t)], \qquad (43,11)$$

глубина модуляции

$$m = \frac{\varphi}{\omega t}.$$

При частотной модуляции (и фазовой) имеем

$$\omega = \omega_0\,(1 + m \sin \omega' t),$$

где ω_0 — среднее значение циклической частоты колебаний несущих волн (рис. 43-7, *г*).

В области сверхвысоких частот (сотни мегагерц) применяют комбинированную импульсную модуляцию. Последовательность радиоимпульсов модулируют или по амплитуде (рис. 43-7, *д*), согласно закону модулирующего колебания (43,10), или путем периодического изменения скважности чередующихся импульсов одинаковой длительности при постоянной амплитуде (рис. 43-7, *е*), или изменением продолжительности импульсов при постоянной скважности (рис. 42-7, *ж*).

Лекция 44

ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЙ

Возмущение равновесного состояния, возникшее в одном месте какой-либо среды, вследствие связей неизбежно распространяется во все стороны. В однородной и изотропной среде распространение фазы колебаний происходит по всем направлениям от источника

с одинаковой скоростью (фазовая скорость.) В среде образуется сферическая волна колебательных возмущений. Фронт волны, или поверхность волны, представляется поверхностью, все точки которой имеют одинаковую фазу колебаний, а луч — направлением распространения фазы колебаний, т. е. радиусом, проведенным из источника возмущения (механического или электромагнитного) в избранную точку поверхности волны. Уравнение луча будет при этом уравнением волны, бегущей от источника. Согласно принципу неразрывности расширяющейся волновой поверхности, сформулированному Гюйгенсом, каждую точку волновой поверхности следует рассматривать как самостоятельный источник колебаний, излучающий возмущение во все стороны (рис. 44-1, *б*). По отношению к сферическому поверхностному волновому импульсу внешняя среда находится в состоянии статического равновесия, а внутренняя среда со стороны источника — в динамике (рис. 44-1, *а*). Вследствие этого возмущение от какой-либо точки волновой поверхности распространяется только в направлении от источника и гасится в направлении к источнику. В анизотропной в отношении электрических свойств среде, например кристалле кварца, поверхность электромагнитной волны не будет сферической, а луч не будет нормалью к ней. Малые (сравнимые с длиной волны) отражающие, рассеивающие, поглощающие или пропускающие устройства и элементы среды (экраны, фильтры, щели, отверстия диафрагм, частицы тумана или дыма) вызывают нарушение цельности волновой поверхности и прямолинейности распространения излучений (дифракция лучей).

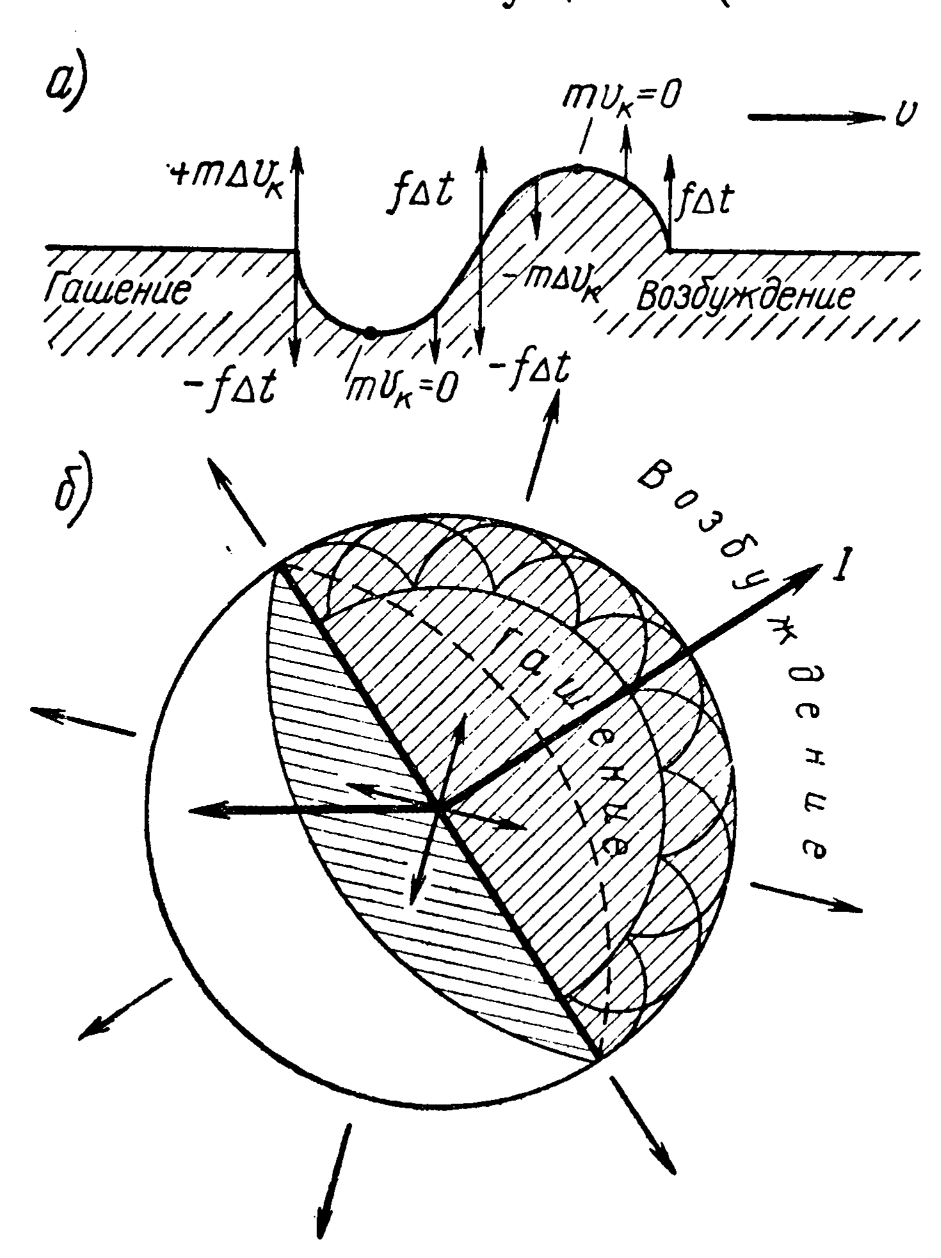


Рис. 44-1. Бегущий волновой импульс: *а*) поверхностная волна; *б*) сферическая волна по Гюйгенсу

На границе двух изотропных сред происходит отражение, преломление и рассеяние излучений, так что

$$I_{отр} = (R + D + Z)\,I,$$

где I — интенсивность излучения, а R, D, Z — соответственно коэффициенты отражения, преломления, рассеяния излучения ($R + D + Z = 1$). При зеркальном отражении света от поверхности

раздела сред и обычном преломлении его в прозрачной среде форма поверхности волны не изменяется, что приводит к известным законам лучевой оптики — законам Снеллиуса. Эти законы вытекают из построений Гюйгенса, показанных на рис. 12-4 для плоской волны при $v_1 > v_2$. В случае изотропных сред

$$\angle \varphi = -\angle \psi,$$
$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{eb}{ad} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}. \qquad (44,1)$$

Волновые представления Гюйгенса были развиты Френелем в упругостной теории механического светоносного эфира. Несмотря на то, что гипотеза механического эфира отпала, основные соотношения теории Френеля с успехом могут быть применены к поперечным электромагнитным волнам. Френель на основании принципа Гюйгенса установил физические условия, при которых сохраняется основное свойство излучений — прямолинейность распространения колебаний в изотропной среде. Для упрощения математических расчетов и выявления физической картины распространения излучений из точки A среды в точку B (рис. 44-2) на волновой поверхности распространяющегося излучения длины волны λ выделяют (по Френелю) зоны путем пересечения этой поверхности сферами радиусов R, $R + \frac{1}{2}\lambda$, $R + 2\frac{\lambda}{2}$, ... , описанными из точки B, как из центра. Если длина волны излучения значительно меньше r и R, то площади поверхностей зон, выделенных таким образом, будут приблизительно одинаковы, так что $S_0 \approx S_1 \approx ... \approx S_k = S$. Интенсивность излучения в любой точке сферической волновой поверхности будет также одинакова $I_1 = I_2 = I_3 = ... = I_k = I$, поскольку в любой момент времени $r = \text{const}$ для всех точек расширяющейся поверхности волны. Однако возмущающее влияние разных зон в точке B будет различным в зависимости от номера зоны. Если не рассматривать ничтожно малое возрастание расстояния до точки B для соседних зон ($\lambda \ll R$), то следует учесть лишь то, что угол α_k между вектором Умова — Пойнтинга (см. рис. 42-3) и направлением $R_k \left(R_k = R + k\frac{\lambda}{2}\right)$ монотонно возрастает с увеличением номера зоны. Возмущение, вызываемое какой-либо зоной в точке B, убывает с возрастанием номера зоны примерно пропорционально

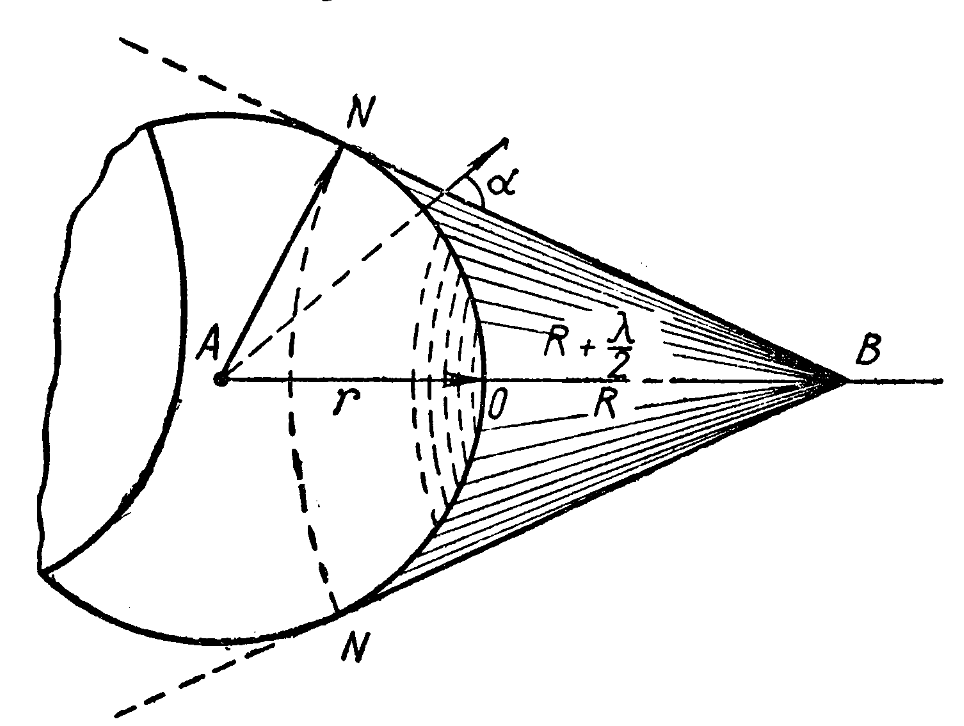


Рис. 44-2. Построение зон Френеля для неограниченной сферической волны

$\cos \alpha_k$, так что только для центральной зоны $\alpha_0 = 0$ и $\cos \alpha_0 = 1$, а для всех остальных зон $\cos \alpha < 1$. Таким образом,

$$y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_{k-1} > y_k > y_{k+1} > \ldots > y_n = 0$$

(для неограниченной поверхности волны $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$ и $\cos \frac{\pi}{2} = 0$). Возмущения, вызываемые различными зонами в точке B, складываются. Следовательно, с учетом сдвига фаз

$$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \tag{44,2}$$

накладывающихся колебаний соседних зон $\left(\delta = R + \frac{\lambda}{2} - R = \frac{\lambda}{2}\right)$ имеем

$$y = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + \ldots + (-1)^n y_n,$$

или

$$y = \frac{1}{2} y_0 + \left[\frac{y_0}{2} - y_1 + \frac{y_2}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{y_{n-2}}{2} - y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right] \pm \frac{y_n}{2} \ldots \tag{44,2'}$$

Если $y_{n-1} > y_n$, то при избранном способе выделения зон можно принять, что $y_{k-1} - y_k = \mathrm{const}$, и тогда все выражения, стоящие в скобках, обращаются в нуль, так что

$$y = \frac{1}{2} y_0 \pm \frac{1}{2} y_n. \tag{44,3}$$

При ненарушенной волновой поверхности $y_n = 0$ и $y = \frac{1}{2} y_0$, т. е. излучение от источника A попадает в точку B через центральную зону, иначе говоря, распространяется прямолинейно. Если же отверстие диафрагмы, поставленной в точке 0, выделяет только ограниченное число зон (имеет ширину порядка 10λ), то пренебречь вторым слагаемым в большинстве случаев уже нельзя, и закон прямолинейности распространения излучения будет нарушен. То же произойдет и в том случае, если экран прикрывает наиболее активную центральную зону или несколько следующих за ней зон. Резкое нарушение цельности волновой поверхности вызывает во всех случаях несоблюдение закона прямолинейного распространения излучений, т. е. их дифракцию. Чем длиннее волны излучения, тем больше размеры тех препятствий, которые вызывают их дифракцию.

Как уже отмечалось, значительные количественные изменения приводят к новым качественным свойствам объектов. В применении к электромагнитным излучениям это означает, что с увеличением частоты колебаний все более отчетливо проявляются квантовые или фотонные свойства излучения, иначе говоря, свойства отдельных квантов (элементарных количеств) энергии излучения. При этом сохраняются все закономерности волновой оптики как соотношения, выражающие свойства множества квантов излучения или потоков фотонов. Наряду с этим проявляются свойства отдельных квантов

энергии этого излучения. Фотонная природа видимого света была подтверждена С. И. Вавиловым непосредственно экспериментальным путем, а именно статистикой флюктуаций зрительного восприятия весьма слабых излучений, исходящих от удаленных точечных источников.

Таким образом, квантовые представления не исключают волновой электромагнитной теории излучения, а лишь дополняют ее. Квант энергии ε, или наименьшее количество излучения данного качества, представляет собой величину, определяемую значениями кванта действия h и частоты ν колебаний, переносимых электромагнитной волной, которая свойственна потоку квантов данного качества, поэтому

$$\varepsilon_\nu = h\nu = \hbar\omega_\nu. \qquad (44,4)$$

Дифракционные явления характерны не только для потока квантов энергии колеблющегося поля, но и для потока микрочастиц, обладающих массой покоя. Как ранее отмечалось (1,3), с импульсом микрочастицы сопоставляется фазовая длина волны де Бройля, с помощью которой адэкватно описывается движение частицы в условиях взаимодействия ее со структурными элементами среды.

Потоки электронов, протонов, ионов и молекул при проникновении сквозь тонкие слои кристаллических веществ также создают дифракционные картины (см. рис. 1-3), тождественные с теми, которые соответствуют проникновению излучений с длинами волн, равными фазовым длинам волн частиц.

Из выражения (44,2) следует, что интерференционные и дифракционные явления, характерные для волновых процессов, тесно связаны между собой.

Для волновых процессов в оптике также характерен эффект Допплера — Физо, однако выражение для частоты принимаемых наблюдателем колебаний в случае движения источника по отношению к наблюдателю будет иным. Прежде всего следует иметь в виду, что скорость распространения электромагнитных волн не зависит от движения источника и для вакуума всегда составляет c.

Следовательно, нет возможности рассматривать раздельно скорости движения источника и приемника относительно среды, как это было сделано в акустике при выводе выражения (11,22), а допустимо указывать лишь скорость v перемещения источника и приемника друг относительно друга. Если наблюдатель связан с относительно покоящейся системой отсчета S, а источник — с движущейся системой S', то длительность сигнала в системе S', согласно (2,7), равна

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1)(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \tau\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (44,5)$$

где τ — длительность сигнала в системе S. Если движущийся источник в момент t_1 удален от наблюдателя на расстояние a, то длительность сигнала, воздействующего на приемник,

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = t_2 + \frac{a \mp v\tau}{c} - t_1 - \frac{a}{c} = \tau\left(1 \mp \frac{v}{c}\right). \qquad (44,6)$$

Таким образом, число колебаний, достигших наблюдателя за время θ, будет

$$N = \nu \cdot \tau',$$

а частота, воспринимаемая им,

$$\nu' = \frac{N}{\theta} = \nu \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 \mp \beta} = \nu \sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}}, \qquad (44,7)$$

где ν — частота колебаний волны, излучаемой источником, в системе S'.

Лекция 45

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Всякая волна представляет собой распространяющиеся колебания поля. Для образования волны необходимо, чтобы в среде имелись возбудители колебаний поля. Волна, распространяясь в среде, возбуждает колебания структурных элементов этой среды (колебания решетки, молекул, атомов, электронов). Таким образом, при колебаниях происходит передача энергии без переноса вещества. Всякая система с одной степенью свободы в отношении режима колебаний характеризуется тремя свойственными ей параметрами. Для механической системы этими параметрами являются масса m (инертность) колеблющегося тела, механическое сопротивление r его движению, возникающее из-за внешнего и внутреннего трения, и механический коэффициент k упругости системы, определяющий ее восстановительные свойства [см. (4,11)]. Дифференциальное уравнение всех действующих внутри системы сил (силы инерции, трения и упругости) после возникновения возмущающего импульса будет иметь вид

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0. \qquad (45,1)$$

Здесь принято, что сила трения пропорциональна скорости $\dot{x}$ движения массы m. Это допущение справедливо при малых скоростях движения.

При больших скоростях, сравнимых со скоростью звука, сила внешнего сопротивления (лобовое сопротивление) пропорциональна более высокой степени скорости $(\sim(\dot{x})^2)$.

Для электромагнитной системы, например для колебательного контура, характеристическими параметрами являются индуктив-

ность L (электромагнитная инертность), электрическое сопротивление R и величина $\frac{1}{C}$, обратная емкости конденсатора (43,1) (диэлектрическая упругость).

Таким образом, уравнение разностей соответствующих потенциалов в контуре запишется в виде

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \qquad (45,2)$$

где q — количество электричества, $\dot{q} = I$ — ток, $\ddot{q} = \frac{dI}{dt}$ — изменение тока во времени.

В математическом отношении уравнения (45,1) и (45,2) идентичны, и, следовательно, решения уравнения (45,1) будут также и решениями (45,2), если вместо m подразумевать индуктивность L, вместо r — электрическое сопротивление R и вместо k — величину, обратную электроемкости, т. е. $\frac{1}{C}$.

Собственные свободные колебания при $R = 0$ были рассмотрены для случая электрического колебательного контура с сосредоточенными параметрами [см. уравнения (43,1), (43,5) и (43,9)]. Для механических систем при $r = 0$ выражение (45,1), очевидно, будет иметь решение

$$x = A\cos(\omega_0 t - \beta), \qquad (45,3)$$

где

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ и } \operatorname{ctg}\beta = \frac{x_0}{\dot{x}_0}\omega_0, \qquad (45,4)$$

если x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные значения смещения и колебательной скорости. Но обычно $r \neq 0$ ($R \neq 0$) и, следовательно, собственные колебания системы с течением времени будут затухать.

Дифференциальному уравнению (45,1) равновесия внутренних сил системы в этом случае можно придать вид

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 = 0, \qquad (45,5)$$

где

$$\alpha = \frac{r}{2m} \text{ и } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (45,6)$$

(или, соответственно, $\alpha = \frac{R}{2L}$ и $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$).

Решение уравнения (45,5) отыскивается как сумма частных решений в форме

$$x = Ce^{\lambda t}, \qquad (45,7)$$

где λ — решение характеристического уравнения. После подстановки (45,7) в формулу (45,5) получаем

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0, \qquad (45,8)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}; \\ \lambda_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (45,9)$$

При $\alpha > \omega_0$ [по (45,6) при $r > 2\sqrt{km}$, или при $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$] λ_1 и λ_2 имеют вещественные отрицательные значения, и общее решение уравнения (45,5) будет иметь вид

$$x = C_1 \cdot e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t}, \quad (45,10)$$

т. е. будет суммой двух экспоненциальных функций времени, что выражает монотонное затухание возникшего возмущения (рис. 45-1).

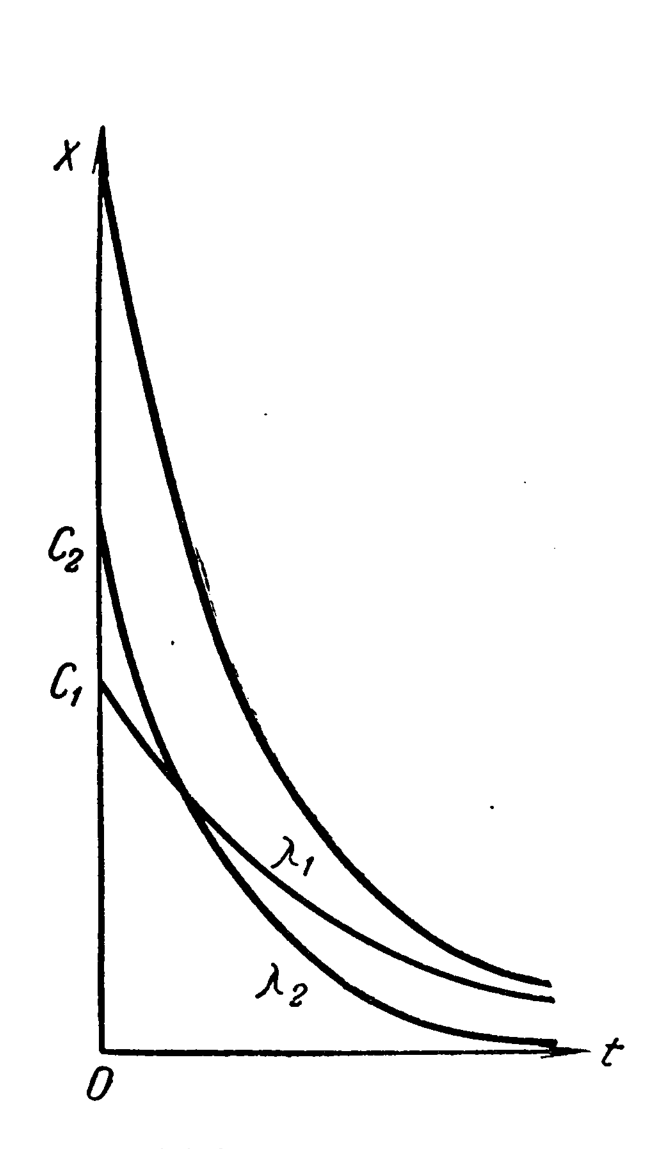


Рис. 45-1. График затухания возмущения ($\lambda_1 = 0{,}2$; $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 0{,}4$)

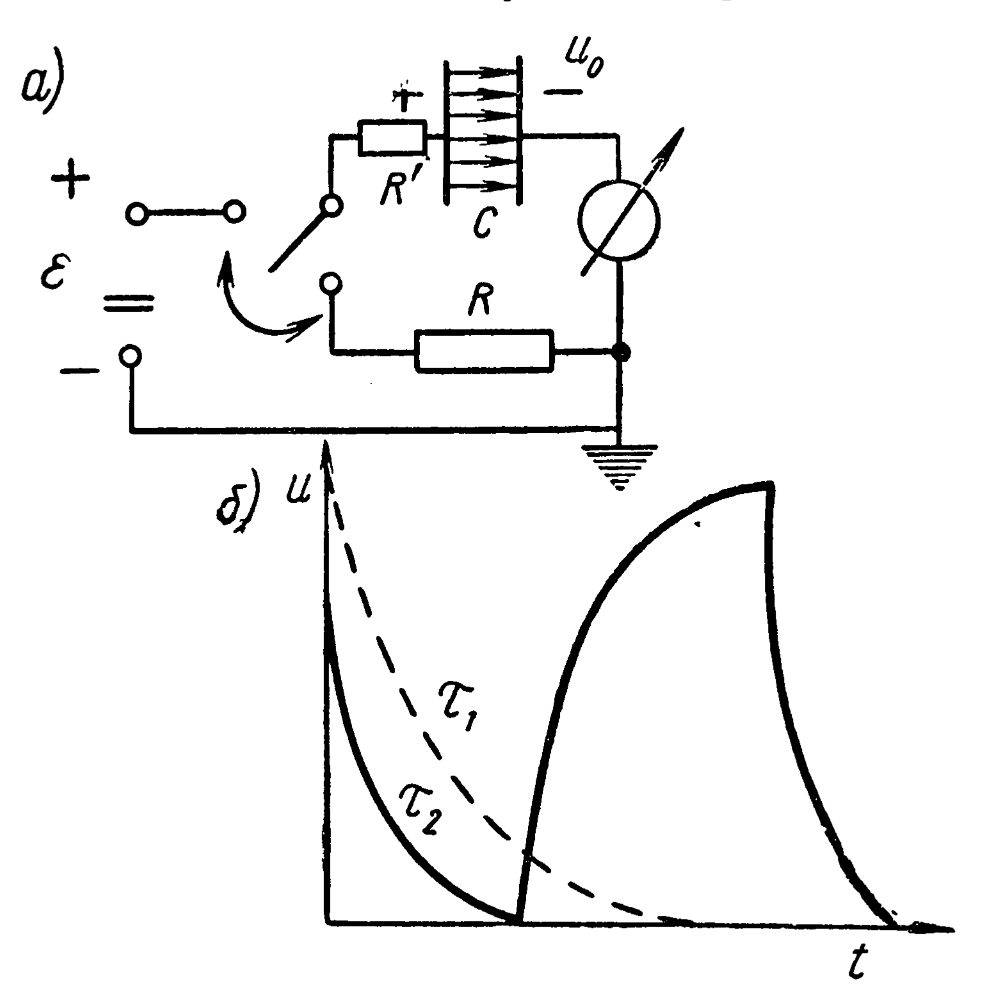


Рис. 45-2. Схема RC-контура (a) и зависимость ($б$) разности потенциалов на обкладках конденсатора от времени при разряде на сопротивление R ($\tau = \frac{1}{RC}$ — постоянная времени; $\tau_1 < \tau_2$)

Колебания при этом не происходят (вязкие среды). В электрических цепях подобный режим соответствует большим сопротивлениям и малым индуктивностям контуров. Например, в случае контура RC ($L = 0$; рис. 45-2, a), т. е. при разряде заряженного конденсатора на сопротивление R, согласно (45,2), имеем

$$R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0,$$

или, поскольку $q = CU$ и $\dot{q} = -C\dot{U}$,

$$RCdU + Udt = 0. \quad (45,11)$$

Отсюда $\frac{dU}{U} \equiv \frac{1}{RC}dt$; интегрируя в пределах от $U = U_0$ до $U = U_t$, получаем (см. рис. 45-2, a)

$$\ln\frac{U_t}{U_0} = -\frac{1}{RC}t,$$

или

$$U_t = U_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}. \qquad (45,12)$$

По такому же закону изменяется и ток в цепи $\left(I_t = \frac{U_t}{R}\right)$:

$$I_t = I_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}. \qquad (45,12')$$

При зарядке конденсатора через большее сопротивление R от источника с электродвижущейся силой $\mathscr{E}$, согласно (45,2) и (45,11), будем иметь

$$RCdU = (\mathscr{E} - U)dt,$$

откуда (рис. 45-2, *б*)

$$U = \mathscr{E}_0 (1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}). \quad (45,12'')$$

Величина $RC = \tau$ называется постоянной времени RC-контура.

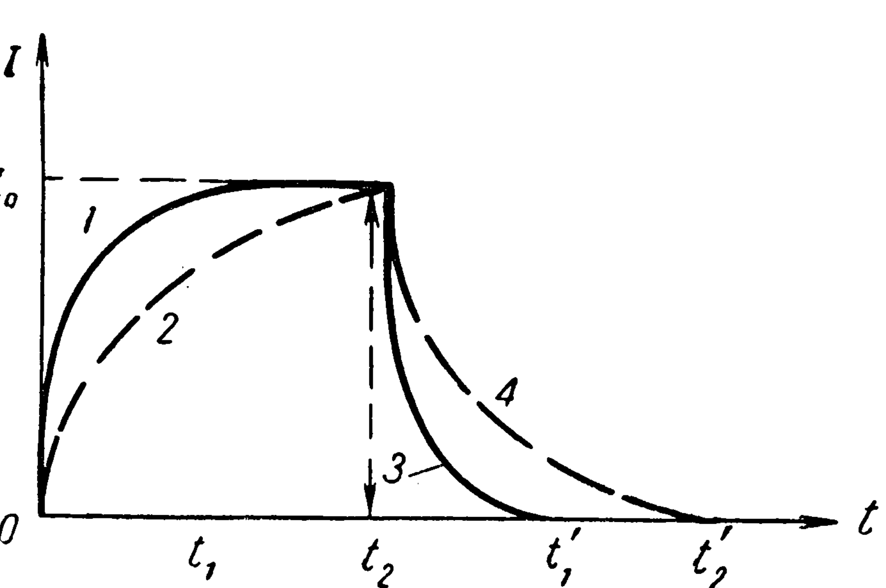


Рис. 45-3. Зависимость мгновенного значения тока переходного режима при замыкании (кривые *1*, *2*) и размыкании (кривые *3*, *4*) цепи постоянного тока $\left(I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}\right.$ — ток установившегося режима$\left.\right)$

Переходные режимы изменения тока при замыкании и размыкании электрической цепи с постоянной э. д. с. также выражаются экспоненциальным законом (рис. 45-3).

Согласно (41,12) и (41,13), переходный режим будет тем продолжительней, чем меньше отношение R/L, т. е. чем больше индуктивность цепи L и меньше ее активное сопротивление R. При состоянии сверхпроводимости, когда $R=0$ ($\tau=\infty$), ток в цепи длительно циркулирует даже в отсутствии электродвижущей силы источника. Это было подтверждено в экспериментах Комерлинг — Оннеса. Свинцовый стержень находился в жидком водороде. Импульс электродвижущей силы индукции возбуждался в нем путем механического удаления стороннего намагниченного тела. Возникший индукционный ток циркулировал вдоль поверхности сверхпроводящего стержня в отсутствии электродвижущей силы в течение продолжительного времени без заметного ослабления. По отклонению стрелки магнитометра, действовавшего в соответствии с законом Био—Савара, определяли наличие и величину тока.

Согласно (45,9), при $\alpha < \omega_0$ λ_1 и λ_2 являются комплексными числами, значения которых равны $\lambda_1 = -\alpha + j\omega_1$ и $\lambda_2 = -\alpha - j\omega_1$, где $j = \sqrt{-1}$ и $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Следовательно, общее решение (45,9) выражает периодический процесс с циклической частотой $\omega_1 < \omega_0$.

В качестве частных решений уравнения (45,5) можно принять

сумму и разность частных решений вида (45,7) с произвольными числовыми коэффициентами, поэтому

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{C_1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right) = C_1 e^{-\alpha t}\cdot\cos\omega_1 t \\ &\text{и} \\ x_2 &= \frac{C_2}{2j}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) = C_2 e^{-\alpha t}\cdot\sin\omega_1 t. \end{aligned}\right\} \tag{45,13}$$

Общее решение дифференциального уравнения (45,5) будет иметь вид

$$x = x_1 + x_2 = e^{-\alpha t}\left(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t\right). \tag{45,14}$$

При $t = 0$ из (45,13) имеем $C_1 = x_0$, а после дифференцирования (45,13) получим

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \alpha x_0}{\omega_1}.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= x_0 = A_0\cos\beta, \\ C_2 &= \frac{\dot{x}_0 - \alpha x_0}{\omega_1} = A_0\sin\beta, \end{aligned}\right\} \tag{45,15}$$

где

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 - \alpha x_0}{\omega_1}\right)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\dot{x}_0 - \alpha x_0}{\omega_1}, \tag{45,16}$$

в качестве общего решения уравнения (45,5) получаем известное уравнение затухающих колебаний [см. (10,13)]:

$$x = A_0 e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega_1 t - \beta). \tag{45,17}$$

Эти колебания не будут гармоническими, так как амплитуда колебаний экспоненциально убывает во времени (см. рис. 11-3).

Частота собственных затухающих колебаний системы меньше, чем частота свободных, а период, следовательно, больше периода свободных колебаний той же системы.

Аналогично вынужденным колебаниям, создаваемым внешними силами в механических системах [см. (10,20)], в электрических цепях, питаемых гармонически изменяющейся электродвижущей силой в цепях переменных токов, также происходят вынужденные колебания электромагнитного поля. При этом могут возникнуть резонансные явления, если при малых значениях активного сопротивления R циклическая частота ω изменений напряжения в питающей сети совпадает с собственной частотой ω_0 электромагнитных колебаний в контуре приемника, т. е. если

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = f(LC), \quad \text{или} \quad T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Если $R \gg 0$, резонанс наступает при циклической частоте

$$\omega = \omega_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2} < \omega_0.$$

Как уже было указано (10,26), резонансные явления имеют значение только при малых R. В случае последовательного включения R, L и C в контурную цепь, питаемую от сети переменного тока (рис. 45-4, *а*), при $\omega \approx \omega_0$ возникает резонанс напряжений. Амплитуды напряжений на индуктивности U_L и на емкости U_C, между которыми сдвиг фаз $\varphi \approx \pi$, будут значительно превышать напряжение U питающей сети (рис. 45-4, *б*). В случае параллельного

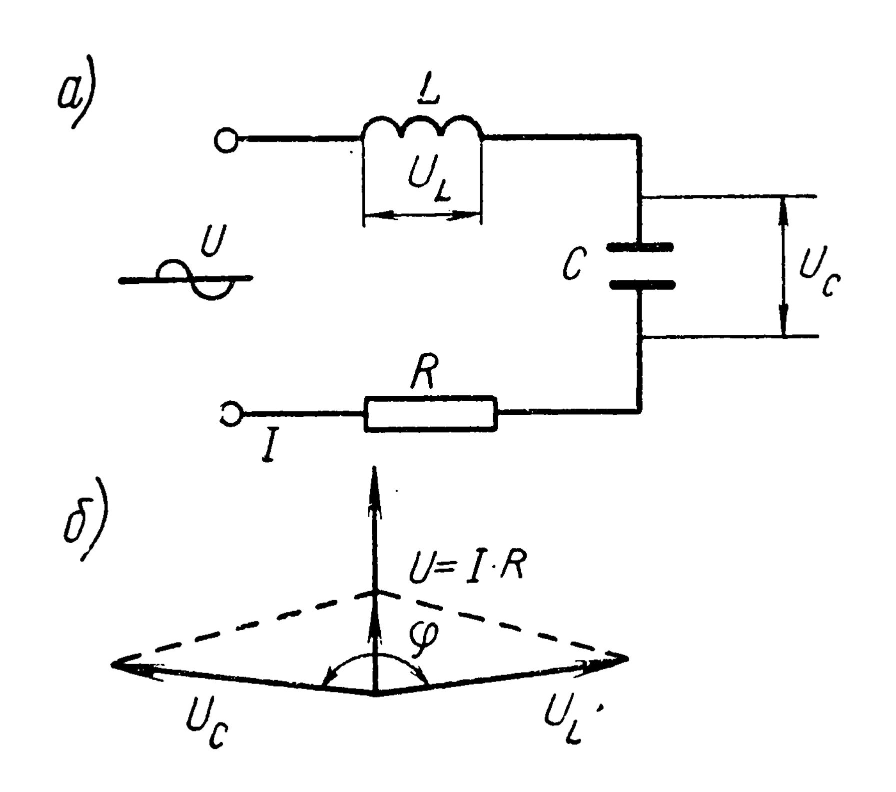


Рис. 45-4. Резонанс напряжений в цепи переменного тока при $\omega = \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:
а) схема включения элементов контура; *б*) диаграмма напряжений

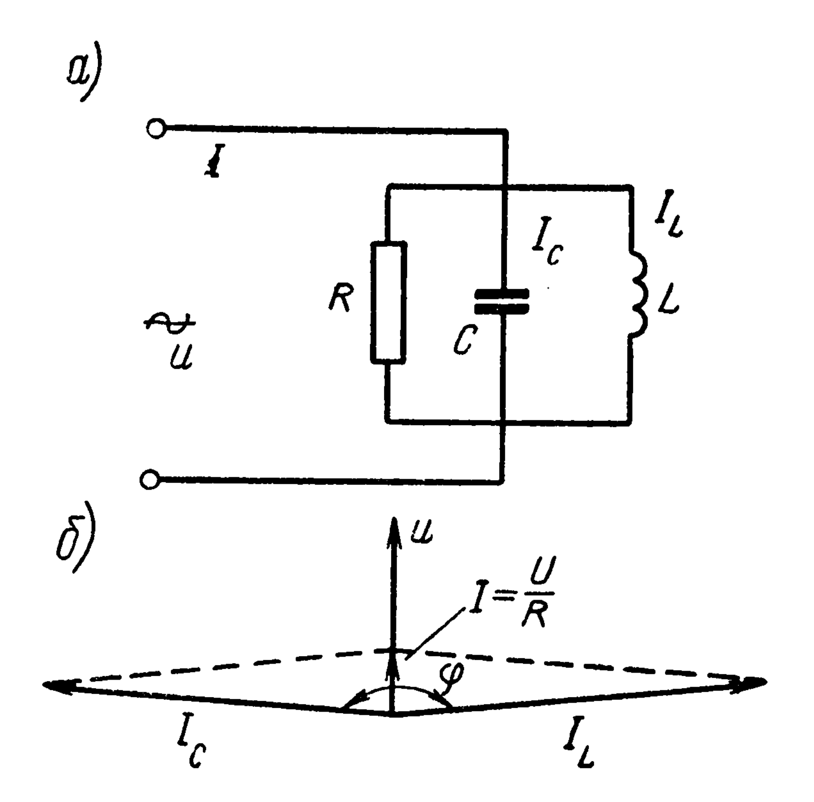


Рис. 45-5. Резонанс токов в цепи с переменным напряжением при $\omega = \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:
а) схема включения элементов контура; *б*) диаграмма токов

подключения R, L и C к питающей сети переменного тока (рис. 45-5,*а*) при том же условии $\omega = \omega_0$ возникает резонанс токов, когда амплитуды токов, протекающих в индуктивной ветви I_L и в емкостной ветви I_C, также сдвинуты по фазе на угол $\varphi = \pi$ и будут значительно превышать амплитуду результирующего тока I (рис. 45-5, *б*). Большое практическое значение имеют вынужденные колебания скачкообразного типа, состоящие из прямого и обратного переходных процессов. Такие колебания называются релаксационными. Примером может служить режим в контуре RC (см. рис. 45-2) при периодическом накоплении энергии путем зарядки конденсатора с последующим разрядом его на активное сопротивление. Радиотехнические устройства, служащие для автоматического генерирования периодических релаксационных импульсов напряжения, называют мультивибраторами.

Лекция 46

ФОТОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ЕДИНИЦЫ

Любое квантовое излучение определяется своим спектральным составом, под которым подразумевается функция распределения энергии по частотам $Y_\nu = \frac{dI}{d\nu}$ или по длинам волн в вакууме и $Y_\lambda = \frac{C}{\lambda^2} \cdot Y_\nu$; поскольку $d\nu = -\frac{C}{\lambda^2}\,d\lambda$, то

$$Y_\nu d\nu = dI = -Y_\lambda d\lambda. \qquad (46,1)$$

Измерение энергии излучения возможно только при преобразовании ее в иной вид энергии (электрический, химический, молекулярно-кинетический, ядерный, биологический). Только полное поглощение излучения с преобразованием его энергии в тепло дает возможность абсолютного измерения энергии излучения. Однако человеческий организм имеет орган зрения, допускающий непосредственное субъективное суждение о качестве и количестве электромагнитного излучения в диапазоне квантов энергии излучения от $h\nu_\text{ф} = 3{,}0$ *эв* до $h\nu_\text{к} = 1{,}5$ *эв*, или в диапазоне длин волн от $\lambda_\text{ф} = 4000$ Å $= 0{,}4$ *мк* до $\lambda_\text{к} = 8000$ Å $= 0{,}8$ *мк*.

Фотометрические понятия и единицы основаны, с одной стороны, на энергетических единицах измерений, с другой — на субъективном психофизическом восприятии излучения с помощью «среднего» человеческого глаза (фактора видности).

Мощность излучения, приходящаяся на избранную поверхность, составляет поток излучения

$$\Phi_S = \frac{dW}{dt} = P. \qquad (46,2)$$

Поток излучения, отнесенный к единице телесного угла, в котором он заключен, представляет так называемую силу излучения (силу света) источника

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \qquad (46,3)$$

Так как (рис. 46-1)

$$d\Omega = \sin\varphi d\varphi d\theta, \qquad (46,4)$$

то

$$d\Phi = I_{\varphi,\theta} \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \qquad (46,5)$$

и, значит,

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} I_{\varphi,\theta} \sin\varphi d\varphi. \qquad (46,6)$$

Если

$$I_{\varphi,\theta} = I = \text{const},$$

то

$$\Phi = 4\pi I. \qquad (46,7)$$

Полный световой поток зависит только от мощности источника. Оптические системы из зеркал и линз только перераспределяют поток излучений, причем часть энергии излучения неизбежно поглощается в оптических устройствах.

Облученностью (освещенностью) E называют поверхностную плотность потока излучения, падающего на поверхность (рис. 46-2), и так как $\Delta\Omega = \frac{\Delta\sigma \cdot \cos\alpha}{R^2}$, то

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\sigma} = \frac{I\Delta\Omega}{\Delta\sigma} = \frac{I \cdot \cos\alpha}{R^2}. \tag{46,8}$$

Если рассматривается испускание, а не прием излучения, то подобную величину называют лучистостью, или светимостью S источника. Она представляет собой суммарный поток, посылаемый в наружное полупространство единицей поверхности излучателя. С характеристикой излучателя связана также величина, которая для радиации вообще называется интенсивностью

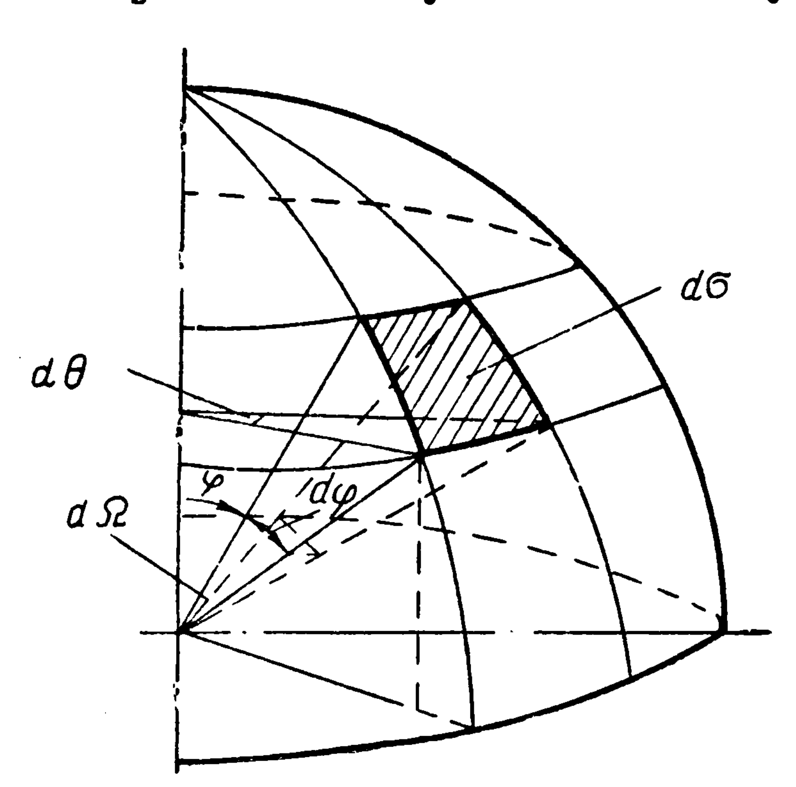


Рис. 46-1. К выводу выражения для пространственного угла

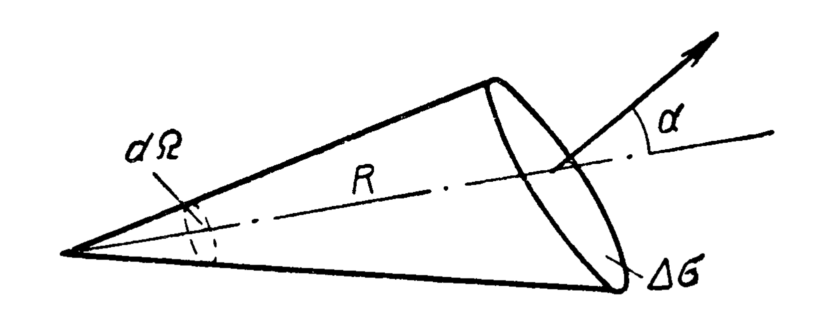


Рис. 46-2. К определению понятий облученности (освещенности), интенсивности и яркости

излучения в данном направлении (I_φ), а для света в частности — яркостью источника в заданном направлении (B_φ). Под яркостью подразумевается поток излучения, отнесенный к единице лучепринимающей или лучеиспускающей поверхности и к единичному телесному углу в направлении, составляющем угол φ с нормалью к поверхности, и выражаемый формулой

$$I_\varphi = B_\varphi = \frac{d\Phi}{\sigma \cdot \cos\varphi \cdot d\Omega}. \tag{46,9}$$

Так как, согласно (46,9) и (46,4), $d\Phi = I_\varphi \sigma \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta$, то

$$\Phi = \sigma S = \sigma \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\varphi \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \sigma E \tag{46,10}$$

и, значит,

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\varphi \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi. \qquad (46,11)$$

Излучение источников с протяженной поверхностью подчиняется закону, по которому $B_\varphi = B = \text{const}$ (закон Ламберта) или $I_\varphi = I = \text{const}$ (интенсивность излучения по всем направлениям одинакова), поэтому

$$S = 2\pi I \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \pi I = \pi B. \qquad (46,12)$$

Таким образом, светимость является обобщенным интегральным понятием об интенсивности излучения или яркости поверхности, испускающей (рассеивающей) свет.

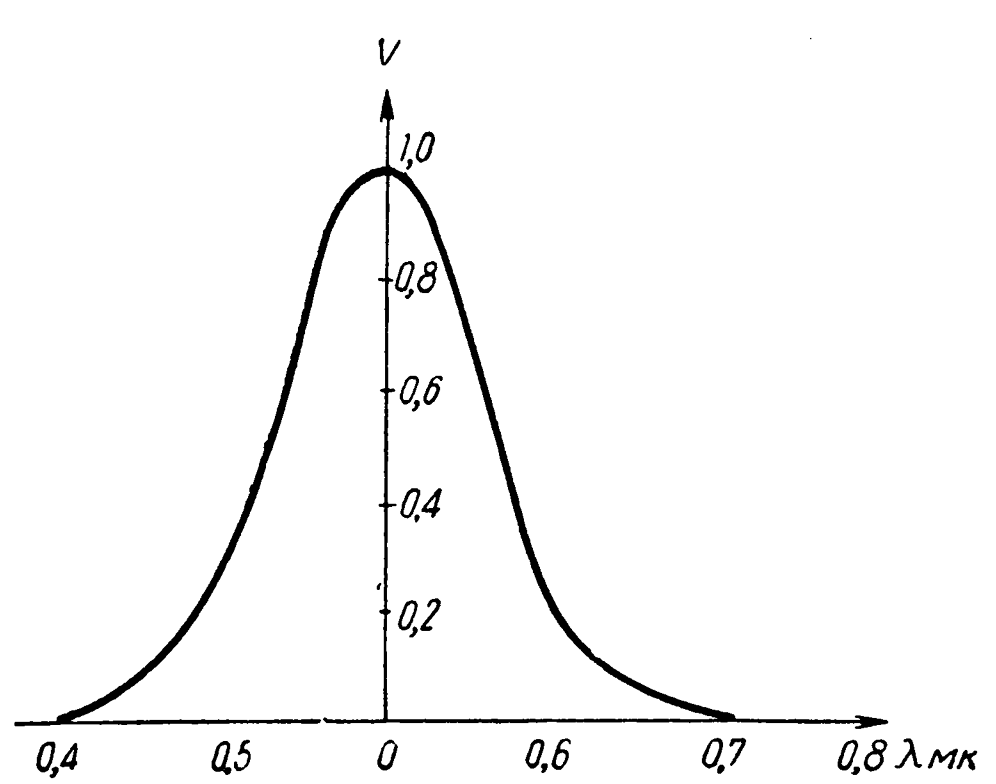


Рис. 46-3. Относительная спектральная чувствительность «среднего» человеческого глаза

Человеческий орган зрения, как и любой другой приемник излучения, обладает селективностью. На рис. 46-3 приведена кривая относительного восприятия (видимости) света средним человеческим глазом. Наш орган зрения наиболее чувствителен к излучению с $\lambda = 0{,}55$ *мк* (желто-зеленая область спектра).

Все табличные оптические характеристики вещества (показатели преломления, коэффициенты отражения, рассеяния и прозрачности), если они не сопровождаются специальными указаниями, относятся именно к желто-зеленой части спектра. В этом цветовом освещении выполняются отсчетные шкалы оптических инструментов. Чувствительная по цвету окраска двух полей освещения возникает при изменениях интенсивности желто-зеленой части спектра.

В системе психо-физических субъективных фотометрических единиц за основу принимается зрительное ощущение от света, а именно яркость свечения поверхности.

За единицу силы света выбрана новая свеча, которая, в соответствие с формулами (46,7), (46,8), (46,10), определяет яркость платины при температуре ее затвердевания и принимается равной 60 свечам на 1 $см^2$ излучающей поверхности $\left(1 \frac{св}{см^2} = 10^4 \ нт = 10^4 \frac{св}{м^2}\right)$.

Единица светового потока — люмен будет при этом [см. (46,3)] потоком излучения (света), посылаемым источником в одну свечу внутрь единичного телесного угла (1 *лм* = 1 *св* · *стер*). В такой системе оценки излучения за единицу освещенности принимается люкс, определяющий равномерную освещенность, при которой световой поток в 1 *лм* приходится на 1 $м^2$ освещаемой поверхности, причем 1 *лк* = 1 $\frac{лм}{м^2}$. Измеряя или сравнивая освещенности, например с помощью отградуированного фотоэлемента, находят величину светового потока, падающего на поверхность приемника.

В табл. 23 приведены основные физические и фотометрические единицы измерений для видимых излучений.

Таблица 23

Радиационная величина	Физические единицы	Световая величина	Фотометрические единицы
Поток излучения Φ	*вт*	Световой поток Φ_c	люмен (*лм*); 1 *лм* = = 1,6 · 10^3 *вт* = = 1 *св* · *стер*
Сила излучения I	$\frac{вт}{стер}$	*Сила света* I	свеча (candela)
Лучистость источника; облученность поверхности E	$\frac{вт}{см^2}$	Светимость источника; освещенность приемника S	люкс (*лк*); 1 $\frac{лм}{м^2}$ = = 1 $\frac{св \cdot стер}{м^2}$
Интенсивность излучения I_φ	$\frac{вт}{см^2 \cdot стер}$	Яркость свечения B	нит (*нт*); 1 *нт* = = 1 *св*/$м^2$
Угловая плотность энергии излучения R	$\frac{вт \cdot сек}{стер}$	Освечивание R	*св* · *сек*
Энергия излучения W	*вт* · *сек*	Световая энергия W (световая сумма)	*лм* · *сек*
Количество облучения D_0 (поверхностная плотность энергии падающего излучения)	$\frac{вт \cdot сек}{см^2}$	Количество освещения D_0	*лк* · *сек*

Примечание. Человеческий глаз чувствителен к яркости свечения; фотоэлемент реагирует на световой поток.

Кроме видимого света, существенное значение в практике имеют различные ионизирующие излучения. К ним относятся не только электромагнитные излучения с квантами энергии от $h\nu$ = 10 *эв*

до $h\nu = 10$ *Мэв* (ультрафиолетовая, рентгеновская и гамма-области спектра), но и корпускулярные ядерные излучения (бета-частицы, протоны, нейтроны, ядра). Ионизация, производимая этими излучениями (непосредственно или косвенно), служит основным способом измерения их энергии. Техника ионизационных измерений настолько усовершенствована, что в случаях малых интенсивностей удается регистрировать отдельные ионизационные акты. При этом под потоком корпускулярного излучения обычно подразумевают число частиц, падающих на облучаемую поверхность за секунду. Вместе с тем для характеристики качества корпускулярного излучения рассматривают его энергетический спектр, т. е. распределение числа частиц по их кинетическим энергиям ε

$$\chi(\varepsilon) = \frac{1}{N}\frac{dN}{d\varepsilon}. \qquad (46,13)$$

Так как полное поглощение ионизирующего излучения в измерительном объеме приемного устройства (ионизационной камере) затруднено, то используется ионизация, производимая в образцовом веществе, например, ионизация в воздухе нормальной плотности для квантового излучения. При выполнении определенных измерительных условий (наличие электронного равновесия) измеряемый ионизационный ток насыщения пропорционален удельной поглощенной воздухом камеры мощности излучения, или мощности экспозиционной дозы излучения.

При неизменном качестве излучения ионизационные токи насыщения, измеренные в одной и той же камере, будут пропорциональны интенсивностям этих излучений. В общем случае ионизирующих излучений разного качества для нахождения их интенсивности по измеренному ионизационному току насыщения необходимо знать коэффициенты поглощения этих излучений в образцовом веществе. Единицей экспозиционной дозы квантового излучения (дозы в воздухе) служит рентген, энергетический эквивалент которого составляет 84 $эрг \cdot г^{-1} = 84 \cdot 10^{-4}$ $дж \cdot кг^{-1}$. Дозы любых ионизирующих излучений в каком-либо веществе (поглощенные дозы) выражаются в единицах, называемых «рад» (от слова радиация) и составляющих 100 $эрг \cdot г^{-1} = 10^{-2}$ $дж \cdot кг^{-1}$. Интенсивность I, мощность дозы P и доза направленного ионизирующего излучения D связаны следующими соотношениями:

$$I = \frac{d\Phi}{dS_n}\left(\frac{эрг}{см^2 \cdot сек} \text{ или } \frac{вт}{м^2}\right), \qquad (46,14)$$

где Φ — поток энергии излучения, S_n — нормально расположенное сечение пучка лучей;

$$P = I \cdot \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{эрг}{сек \cdot г} \text{ или } \frac{вт}{кг}\right), \qquad (46,15)$$

где $\frac{\mu}{\rho}$ — массовый коэффициент поглощения излучения веществом;

$$D = \sum_{1}^{z} P_i \cdot t_i \left(\frac{эрг}{г} \text{ или } \frac{дж}{кг}\right), \qquad (46,16)$$

где P_i — мощность дозы излучения в интервале времени t_i,
z — число интервалов времени (сеансов) облучения.

В том случае, когда излучение поступает в приемник энергии со всех сторон (глобально), под интенсивностью излучения в данной точке поля подразумевают отношение потока энергии этого излучения, проникающего в элементарную среду, окружающую точку, к площади центрального сечения сферы.

Лекция 47

СЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Очень часто в практике тело одновременно участвует не в одном, а в нескольких колебаниях, или в некоторой точке пространства одновременно происходят изменения напряженностей нескольких накладывающихся полей одной и той же природы (электрических, магнитных, гравитационных или мезонных).

В подобных случаях возникает сложное, вообще говоря, периодическое движение с линейной или криволинейной траекторией колеблющейся точки, т. е. точки колеблющегося тела или конца вектора, представляющего напряженность поля.

По теореме Фурье всякая периодическая функция $f(t)$ может быть представлена в виде суммы простых гармонических функций кратных частот, различных амплитуд и начальных фаз, т. е.

$$f(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + a_2 \sin(2\omega_1 t + \beta_2) + \ldots + a_k \sin(k\omega_1 t + \beta_k) + \ldots + a_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n). \qquad (47,1)$$

Обычно $a_1 \gg a_2 > a_3 > \ldots > a_k > \ldots > a_n$. Колебания кратных частот называют высшими гармониками соответственно целому числу $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Значение a_0 определяет $f(t)$ при условии, что $(k\omega_1 t + \beta_k) = 0$ (рис. 47-1). Если $f(t)$ не является периодической функцией, то, согласно теореме Фурье, она также может быть представлена в виде суммы простых гармонических функций, но уже с различными, вообще говоря, некратными частотами.

Таким образом, независимо от характера периодических движений при их наложениях друг на друга всегда будут складываться соответствующие гармонические колебания.

Одним из важных случаев сложения колебаний одного направления и разных частот является модуляция электромагнитных колебаний высокой частоты (см. рис. 43-7). Под термином «модуляция» подразумевается управляемое низкочастотное гармоническое

изменение амплитуды, частоты или фазы высокочастотных колебаний несущей волны.

Другой важный случай сложения волн разных частот колебаний представляют биения. Если два близких по частоте колебания одного направления накладываются друг на друга, то возникает колебательный процесс частоты ω, близкой к полусумме частот составляющих колебаний, т. е. $\omega \approx \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$; амплитуда этого процесса меняется с низкой частотой, равной полуразности составляющих колебаний $\delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$. Таким образом, если $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, то

$$a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t = 2a \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \sin \omega t = A(t) \sin \omega t. \quad (47{,}2)$$

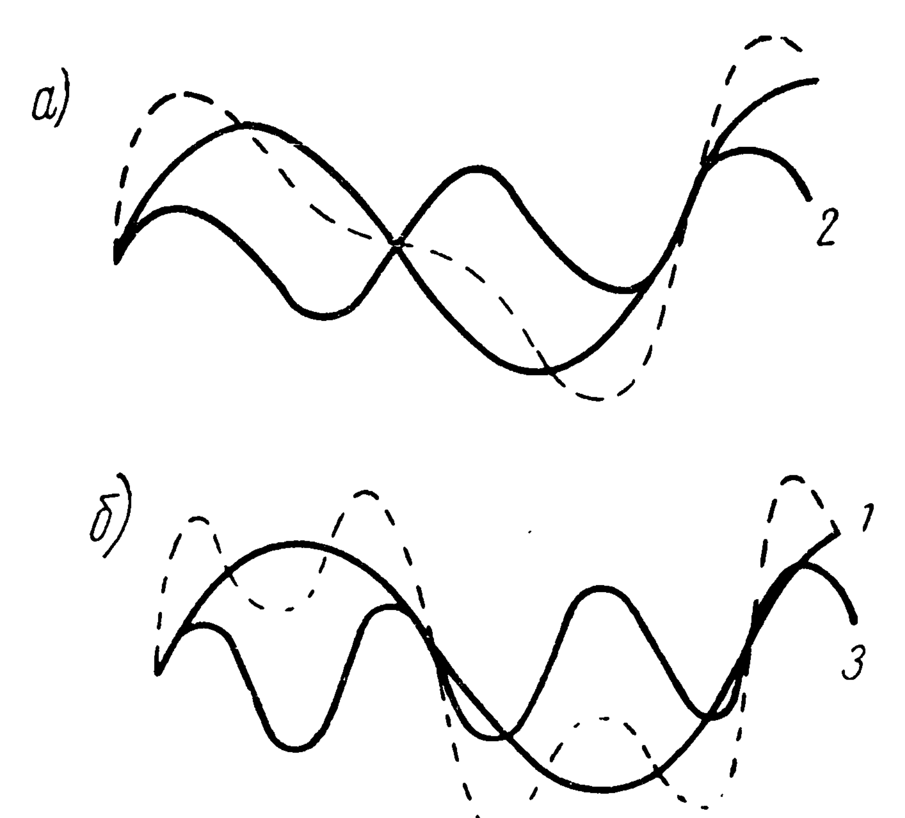


Рис. 47-1. Графическое сложение гармонических колебаний одного направления:

1 — развертка основной гармоники ω_1; *2*, *3* — то же, для высших гармоник: *а*) для второй гармоники $\omega_2 = 2\omega_1$ ($\varphi_0 = 0$); *б*) для третьей гармоники $\omega_3 = 3\omega_1$ ($\varphi_0 = 0$).

Пунктиром изображена развертка результирующего ангармоничного колебания

Биениями объясняются диссонанс в акустике, зыбь на поверхности воды в водоемах, мерцания звезд в астрономии. С биениями колебаний связаны понятия о пакете волн и групповой скорости распространения такого полевого образования (см. лекцию 11).

Необходимо рассмотреть еще один случай сложения колебаний одного направления и одинаковой частоты, отличающихся друг от друга только амплитудами и фазами (рис. 47-2). Если уравнения складывающихся колебаний будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin(\omega t + \beta_1); \\ y_2 &= a_2 \sin(\omega t + \beta_2), \end{aligned}\right\} \quad (47{,}2')$$

то каждую из этих функций можно иллюстрировать проекцией на вертикальный диаметр радиуса-вектора a, равномерно вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью или циклической частотой ω. Отсчет углов производится так, как это принято в тригонометрии (см. лекцию 10). Угол φ между вращающимися радиусами-векторами a_1 и a_2 не изменяется, и, следовательно, их можно сложить геометрически, поэтому результирующий вектор A будет вращаться с той же циклической частотой. Это значит, что результирующее

колебание будет также гармоническим с частотой ω и амплитудой

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\varphi}, \qquad (47,3)$$

где $\varphi = \beta_1 - \beta_2$.

Уравнение результирующего колебания будет

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \beta), \qquad (47,4)$$

причем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta_1 + \sin\beta_2}{\cos\beta_1 + \cos\beta_2}.$$

Выражение (47,3) является основным при рассмотрении явлений интерференции волновых процессов. Из него вытекает, что при постоянной разности фаз $\varphi = \pi$ $A = a_1 - a_2$, а если $a_1 = a_2$, то $A = 0$. Из формулы (47,3) видно, что одно колебание может как усиливать (если $\varphi = 2k\pi$), так и гасить (если $\varphi = [2k + 1]\pi$) другое такое же колебание.

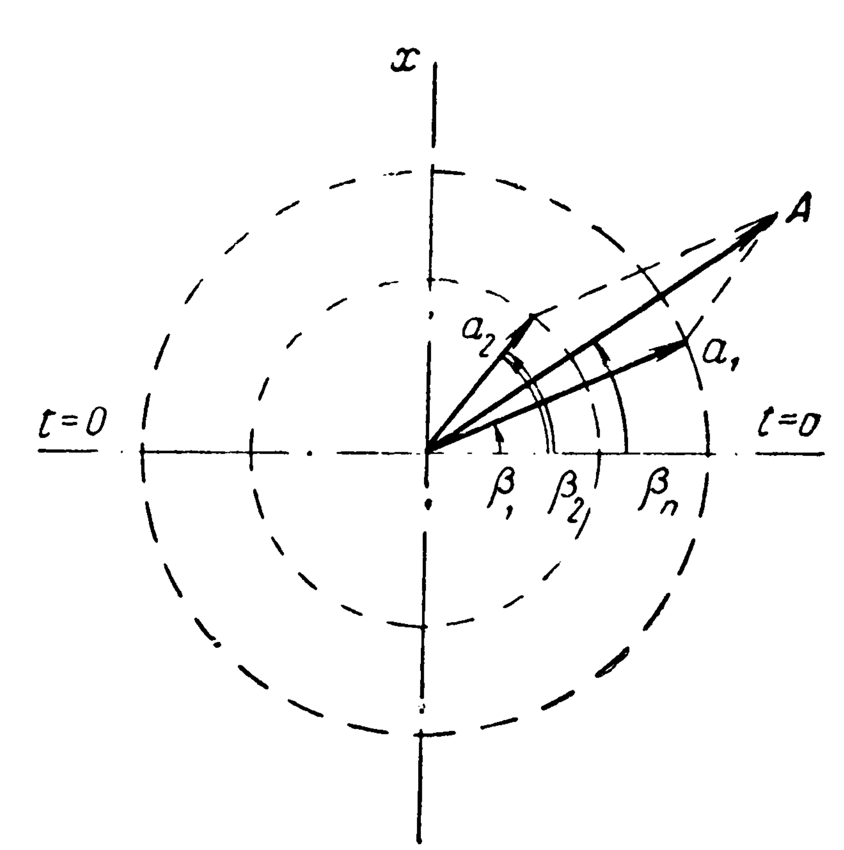


Рис. 47-2. Круговая диаграмма сложения колебаний одного направления и одинаковой частоты, но разных амплитуд и начальных фаз

Однако при сложении колебаний двух бегущих волн стабильный результат будет иметь место лишь при условии, что сдвиг фаз складывающихся колебаний в течение времени, достаточного для наблюдений, будет постоянным, т. е. будет выполняться условие когерентности волн. Сдвиг фаз не будет постоянным либо потому, что источники излучения не связаны в своих флуктуациях, или потому, что в среде, отделяющей место сложения колебаний от источников излучения (в среде, сквозь которую колебания распространяются), также имеются несвязанные флуктуации (изменения состава или плотности среды). Волны, которые при наложении удовлетворяют условию постоянства сдвига фаз колебаний, называют когерентными (фазово-связанными). Если качество накладывающихся излучений характеризовать длинами их волн в данной среде и если считать, что расстояние от первого источника x_1, а от другого $x_2 \neq x_1$, то, основываясь на уравнении бегущей волны и выражении (47,3), получаем

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = a_1 \sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right); \qquad (47,5)$$

так что $\beta_1 = -2\pi\frac{x_1}{\lambda}$ и

$$\varphi = \beta_1 - \beta_2 = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}. \qquad (47,6)$$

Величина $(x_2—x_1)$, в которой x_2 и x_1 приведены к одной и той же среде, носит название разности хода лучей. Для электромагнитных колебаний, для которых не обязательно присутствие в среде вещества, разность $\delta = x_2 — x_1$ выражают через длины волн (λ) излучения и называют оптической разностью хода лучей в вакууме, равной $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, где n — показатель преломления среды. В соответствии с (47,3) будет происходить усиление складывающихся колебаний когерентных излучений, если $\delta = 2k \cdot \frac{\lambda_0}{2}$, и ослабление, если $\delta = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Следовательно, когерентность складывающихся излучений может быть определена как условие совпадения направления колебаний, равенства частот колебаний (или длин волн в вакууме) и постоянства оптической разности хода лучей. Один из наиболее часто встречающихся случаев интерференции наблюдается при образовании так называемых стоячих волн (в акустике, оптике и формально-математически в волновой механике).

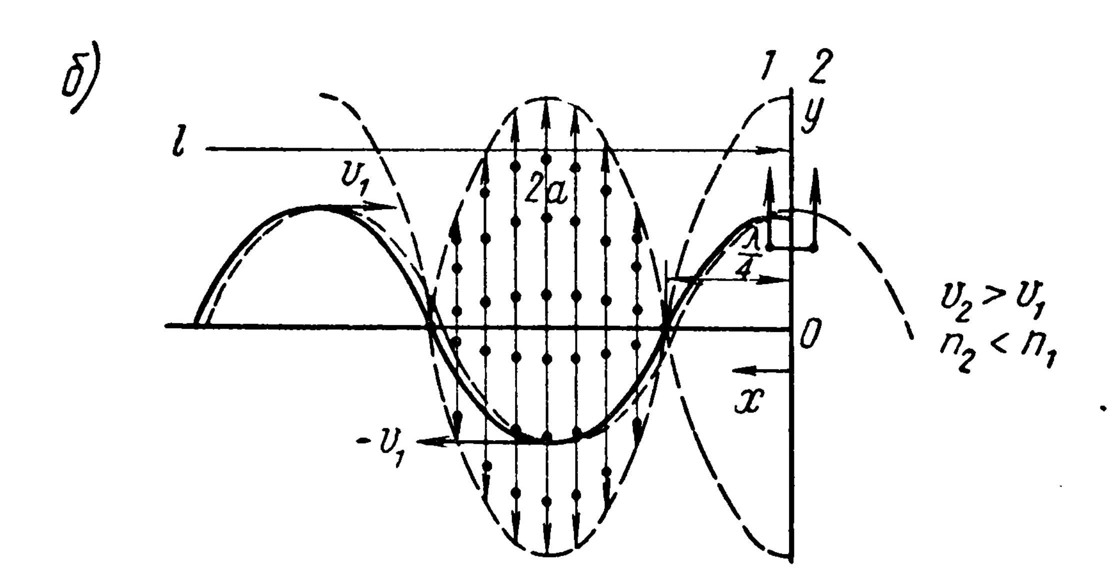


Рис. 47-3. Сложение колебаний двух встречных волн с образованием стоячей волны:

а) отражение от более плотной среды (скачок фазы π); *б*) отражение от менее плотной среды (скачок фазы отсутствует).

Сплошной линией показан мгновенный профиль набегающей волны, точечным пунктиром — профиль отраженной волны для того же момента; вертикальной штриховкой изображен размах колебаний в стоячей волне, а точками — мгновенное положение точек колеблющейся среды

Пусть плоская волна распространяется от источника, находящегося на расстоянии l по нормали к поверхности, разделяющей первую среду от второй с иным показателем преломления (рис. 47-3). На границе сред происходит отражение, рассеяние и проникновение волн. Если пренебречь незначительным диффузным рассеянием, то обратное отражение волны определится исключительно упругостными (в механическом и электрическом смыслах) свойствами сред, т. е. скоростями (v_1 и v_2) распространения колебаний в средах, или показателями преломления этих сред относительно рассматриваемого излучения (n_1 и n_2).

Положим сначала $n_1 < n_2$, это означает $v_1 > v_2$ и, следовательно, отражение волны происходит от среды с большей плотностью — механической в случае акустических волн $\left[\text{согласно (11,9) } v = E^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{\rho}}\right]$ и оптической в случае электромагнитных волн [согласно (42,8') $v = c\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$]. Фаза отраженной волны будет определяться реакцией среды, воспринимающей колебания. Так как в рассматриваемом случае $\omega \gg \omega_{02}$, то она будет сдвинута относительно фазы набегающей волны на угол $\varphi = \pi$ (см. рис. 10-8).

Если на рис. 47-3 проследить фазы колебаний при отражении гармонической волны для произвольно выбранного момента времени, например для момента, когда $(y_1)_0 = (y_{1,m})_0$, то, согласно (47,6), скачок фазы $\varphi = \pi$ означает возникновение разности хода $\delta = \frac{\lambda}{2}$ или, как говорят, потерю при отражении половины волны. При этом на поверхности раздела, согласно выражению (47,4), будет постоянное (полное или частичное) ослабление колебаний (узел стоячей волны).

Если принять обратное условие $n_1 > n_2$ или $v_1 < v_2$, т. е. рассмотреть отражение волны от менее плотной среды, то скачка фазы на границе не произойдет, поскольку $\omega \ll \omega_{02}$ и фаза колебаний в первой среде как для набегающей, так и отраженной волны определяется собственными свойствами этой среды.

Таким образом, в некоторой точке первой среды на расстоянии x по нормали к поверхности раздела уравнения волн будут иметь вид: для набегающей волны

$$y_1 = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l-x}{\lambda}\right),$$

для отраженной волны

$$y_2 = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l+x}{\lambda}\right).$$

Эти волны распространяются навстречу друг другу со скоростями v_1 и $-v_1$. Складывая мгновенные значения y_1 и y_2, для точки x получаем

$$y_x = y_1 + y_2 = 2a\cos\frac{x}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) = \\ = A(x)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right). \qquad (47,7)$$

Выражение (47,7) не будет уравнением бегущей волны, поскольку в аргумент гармонической функции, содержащей время t, не входит переменная пространственная координата x.

Для случая отражения без скачка фазы, согласно (47,7), при $x = 2k\frac{\lambda}{4}$ в противоположность предыдущему случаю имеем $A = 2a$,

т. е. двойную амплитуду колебаний, или «пучность»,стоячей волны, а при $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ $A = 0$, т. е. узлы стоячей волны. В предыдущем случае отражения в этих местах будут пучности. Таким образом, интерференция двух одинаковых волн, бегущих навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, приводит к образованию стоячей волны, в которой все точки колеблющейся среды или электромагнитного поля имеют различные амплитуды колебаний от 0 до $2a$, но одновременно достигают нулевых и наибольших значений. Явление образования стоячих волн лежит в основе действия музыкальных инструментов (струнных и духовых), антенн радиоприема ультракоротких радиоволн, получения цветных пленок в фотографии.

Лекция 48

ОПТИЧЕСКИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Когда две пространственные, когерентные (фазно-связанные) волны с одинаковым направлением колебаний (механических или электрических) накладываются друг на друга, то происходят локальные усиления или ослабления колебаний в зависимости от разности хода лучей [см. (47,3)]. Явление сопровождается пространственным перераспределением энергии колебаний и называется интерференцией.

Существенный интерес представляет интерференция электромагнитных волн.

В основе практического использования этого явления (радио-, фото- и рентгеноинтерферометрии) лежит интерферометрическое уравнение, вывод которого удобно провести по Юнгу с помощью двулучевой интерференции видимого света (рис. 48-1). Точечный излучатель F создает в однородной изотропной среде с показателем преломления $n \approx 1$ сферическую волну. Непрозрачная ширма с точечными отверстиями F_1 и F_2, расположенными на малом друг от друга расстоянии a, поставлена так, что волновая поверхность как раз проходит через эти отверстия. Таким образом, рассматриваются два точечных источника когерентных электромагнитных (фотонных) волн.

Существуют и другие оптические способы получения от одного источника двух близко расположенных когерентных излучателей, например с помощью зеркал или бипризм Френеля.

На расстоянии L от ширмы и параллельно ей расположен экран (или фотопленка), предназначенный для фиксации световой интерференционной картины. В точке O экрана разность хода лучей $(x_2 - x_1)$ от обоих источников равна нулю и, следовательно, разность фаз

$$\varphi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \qquad (48,1)$$

складывающихся параллельных колебаний тоже равна нулю. Значит свет в точке O усиливается. Для произвольной точки экрана, отстоящей от O по вертикали на малом расстоянии z, соблюдается равенство (рис. 48-1)

$$x_2^2 = L^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad x_1^2 = L^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2, \tag{48,2}$$

откуда $x_2^2 - x_1^2 = 2az$. Так как для области точки O можно допу-

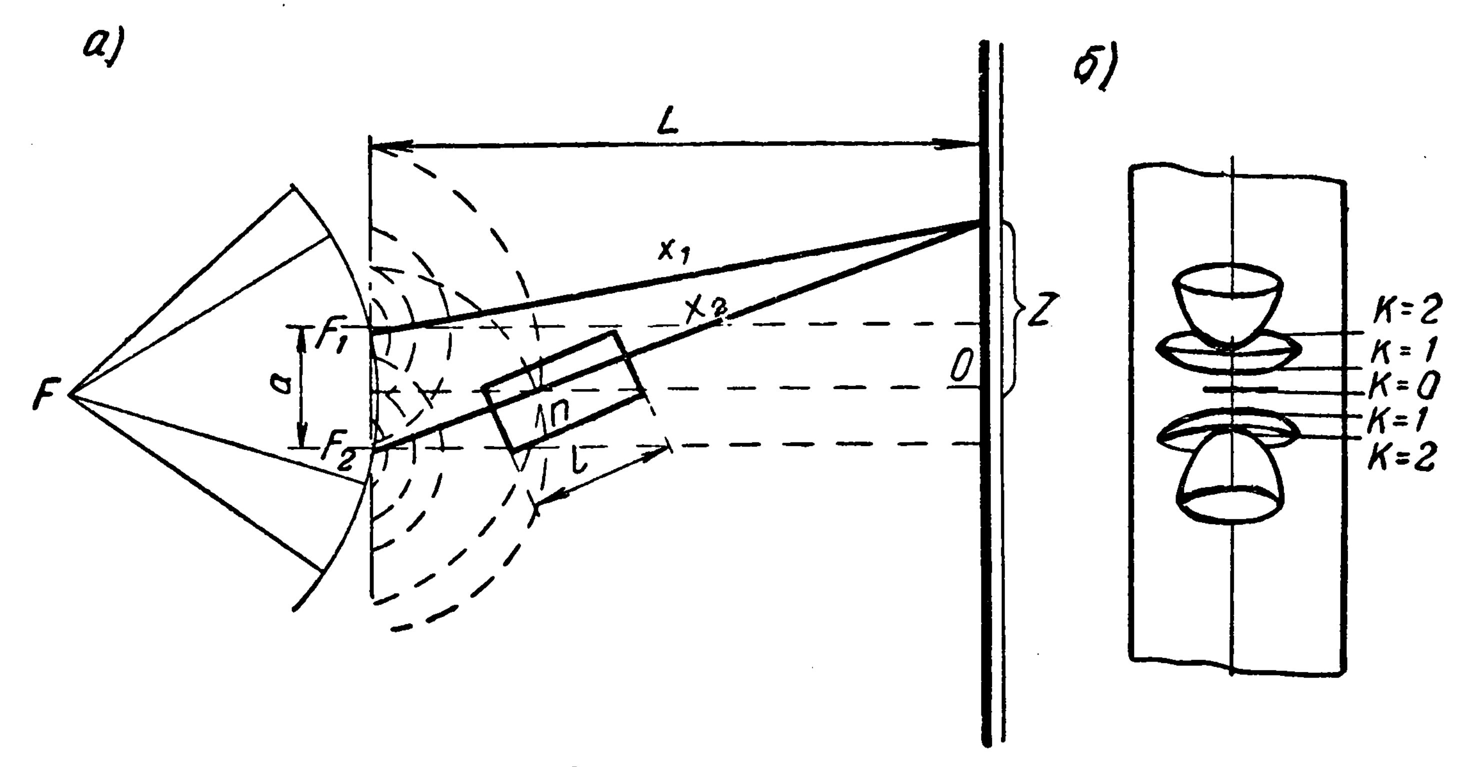


Рис. 48-1. Схема опыта Юнга для вывода интерферометрического уравнения:

а) ход лучей; *б*) формирование интерференционной картины. Условие (48,3) соответствует в пространстве гиперболоиду вращения

стить, что

$$x_1 + x_2 = 2L, \tag{48,2'}$$

то разность хода лучей представится в виде

$$\delta_z = x_2 - x_1 = \frac{a}{L} z = f(z). \tag{48,3}$$

Усилению колебаний соответствует условие

$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2}, \tag{48,4}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ и λ—длина волны применяемого монохроматического света в вакууме, так что для k-й светлой полосы, которая, согласно (48,2'), будет гиперболой (см. рис. 48-1, *б*), имеем

$$z_k = k\lambda \frac{L}{a} \tag{48,5}$$

и расстояние между соседними полосами

$$\delta z = z_{k+1} - z_k = \lambda \frac{L}{a}. \tag{48,6}$$

Чтобы различать интерференционные полосы (например, при $\lambda = 0{,}5$ *мк*), т. е. чтобы δz было достаточно большим (более 0,1 *мм* =

$= 100$ *мк*), нельзя брать большое расстояние L из-за ослабления интенсивности и без того малого светового потока, пропускаемого отверстиями F_1 и F_2. Следовательно, по (48,6) необходимо иметь малое a, т. е. ближе располагать друг к другу отверстия F_1 и F_2.

Согласно (48,6), расстояние между соседними светлыми и темными полосами не зависит от номера полос и пропорционально длине волны применяемого монохроматического света. Если на пути луча от источника F_2 поместить участок длиной l иной среды с другим показателем преломления $n > 1$, например, плоскопараллельную кварцевую пластинку, то вся интерференционная картина, состоящая, согласно (48,3), из отрезков гипербол, передвинется на некоторую величину Δz. Разность хода лучей в новых условиях составит

$$(x_2' - x_1) = (x_2 - l) + nl - x_1 = (x_2 - x_1) + (n - 1)\,l, \quad (48,7)$$

поэтому, согласно (48,3),

$$\frac{a}{L} z' = \frac{a}{L} z + (n - 1)\,l. \quad (48,8)$$

Отсюда

$$\Delta z = z' - z = (n - 1)\,l \frac{L}{a}. \quad (48,9)$$

Число полос, на которые произойдет смещение,

$$N = \frac{\Delta z}{\delta z} = (n - 1)\frac{l}{\lambda},$$

откуда

$$N\lambda = (n - 1)l. \quad (48,10)$$

Выражение (48,10) является интерферометрическим уравнением. Из него следует, что при известной длине волны λ применяемого монохроматического света по измеренному числу полос смещения N может быть найден показатель преломления вещества на участке длиной l (интерференционные рефрактометры), а при известном значении показателя преломления n (например, для плавленного кварца) может быть установлена длина l плоскопараллельной кварцевой пластины (концевой меры). При этом независимо от длины этой меры абсолютная погрешность при ее определении составляет половину применяемой длины световой волны. Именно поэтому в опыте Майкельсона (лекция 2) был выбран интерференционный метод сравнения скоростей распространения световых сигналов. В настоящее время эталон длины установлен как определенное число (избранных) длин световых волн, а интерферометры широко применяются в качестве наиболее точных приборов для измерения длин образцовых мер (калибр) в машиностроении.

Если $n_0 \neq 1$, то интерференционное уравнение примет вид

$$N\lambda' = (n - n_0)\,l, \quad (48,10')$$

где λ' — длина волны света в среде с показателем преломления n_0.

Практическое осуществление интерференционных измерений связано с наблюдениями полос равной толщины и полос равного наклона. Эти полосы возникают в результате интерференции света в тонких слоях. Рассматривая наложение плоских когерентных световых волн в проходящем сквозь тонкий слой пучке лучей (рис. 48-2), для разности хода лучей получаем:

$$\delta = (ab + be)\,n = af \cdot n = 2hn \cdot \cos\beta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}. \quad (48,11)$$

В отраженном свете также происходит наложение когерентных волн, но в этом случае разность хода лучей будет зависеть еще от скачка фазы при отражении. Из выражения (48,11) следует, что при заданном показателе преломления света в веществе тонкого слоя разность хода лучей зависит от толщины h слоя и угла падения лучей α. Если угол падения для всех лучей одинаков (параллельные лучи; $\alpha = \text{const}$), то разность хода будет зависеть лишь от толщины слоя. Каждой светлой или темной полосе соответствует одинаковая толщина слоя с точностью до $\frac{\lambda}{4}$. Такие полосы равной толщины локализованы на поверхности тонкого слоя и видимы невооруженным глазом. В толстых слоях из-за неизбежных неоднородностей происходит потеря фазы колебаний на пути проникновения лучей и, следовательно, происходит нарушение их когерентности, поэтому интерференция не будет наблюдаться.

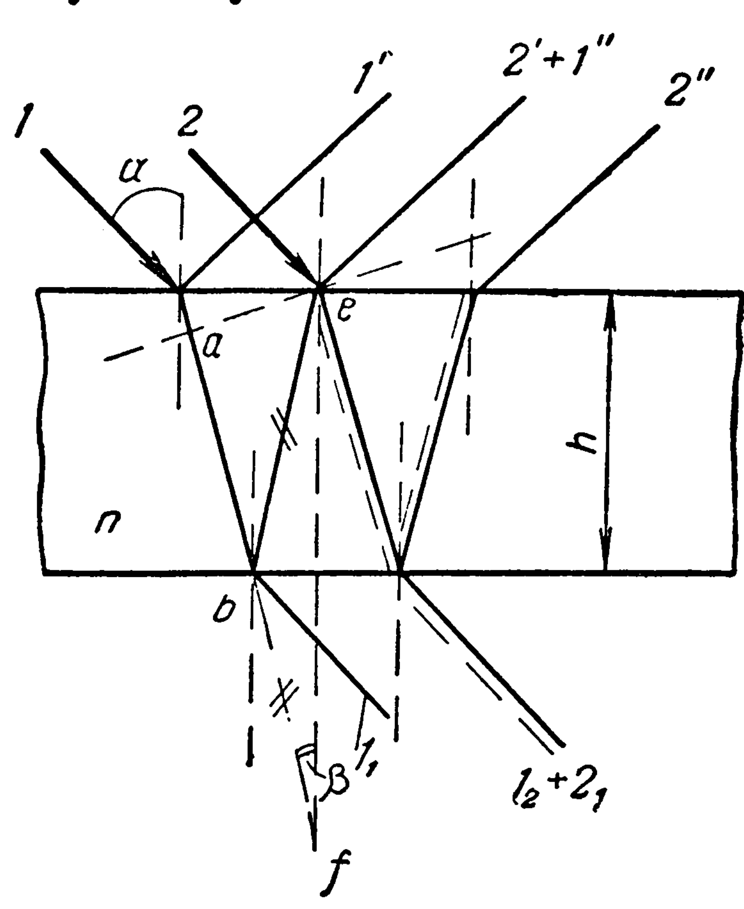


Рис. 48-2. Схема образования интерференции в тонких слоях: $2' + 1''$ — наложение лучей в отраженном свете; $1_2 + 2_1$ — то же, в проходящем свете

Если падают расходящиеся лучи на плоскопараллельную пластину одинаковой (в пределах $\pm\frac{\lambda}{4}$) толщины, то по (48,11) разность хода лучей определяется исключительно углом падения α. Собранные в фокусной плоскости линзы и отраженные под одинаковым углом падения лучи создадут интерференционную картину полос равного наклона. Их можно наблюдать в случаях толстых образцов, поскольку некогерентно рассеянные на неоднородностях лучи не будут сфокусированы линзой в одной и той же плоскости с интерферирующими лучами.

Приборы, предназначенные для измерения длин концевых мер (плиток) и высот микронеровностей на поверхности деталей, устроены по схеме, разработанной Майкельсоном (рис. 48-3): интерферометр Кестерса, микроинтерферометр Линника. Если мыс-

ленно повернуть правую половину схемы на угол $\pi/2$, то зеркало *bb* займет положение *b'b'* (см. рис. 48-3). При этом в зависимости от формы образованной таким образом щели между *aa* и *b'b'* в поле зрения прибора будут видны как полосы равной толщины (клинообразная щель), так и круговые полосы равного наклона лучей (плоскопараллельная щель). Перемещение зеркала *bb* параллельно самому себе (при отсутствии полос равной толщины) даст возможность отсчитать число полос равного наклона, возникающих из центра, или исчезающих в центре круга интерференционной картины.

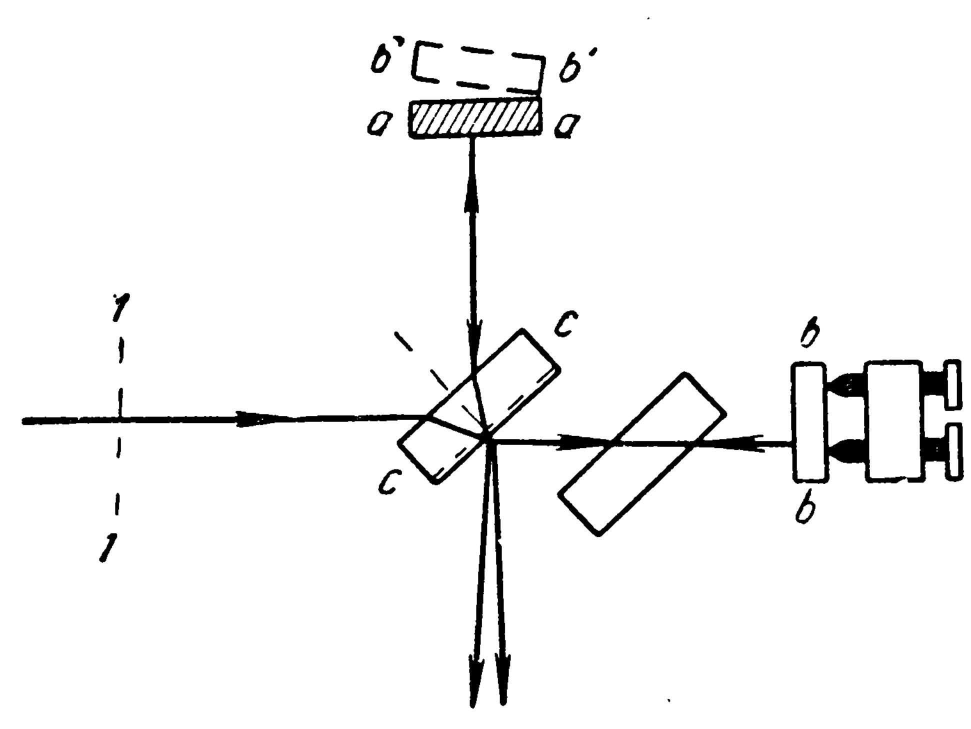


Рис. 48-3. Схема интерферометра Майкельсона: *11* — оптическая система; *аа* — неподвижное зеркало; *бб* — подвижное зеркало; *сс* — полупрозрачная плоскопараллельная пластина

Интерферометрия широко используется при шлифовке стекол на оптический контакт, при измерениях микронеровностей на полированных поверхностях и при создании светофильтров.

Иной принцип действия лежит в основе интерференционных рефрактометров высокой чувствительности (приборы Жамена и Цейса; рис. 48-4). Однако в обоих случаях используется одно и то же интерферометрическое уравнение (48,10). Интерференция в рентгеновской области электромагнитных излучений является основой рентгено-спектрального и рентгено-структурного анализа кристаллических решеток твердых растворов, сплавов и чистых веществ.

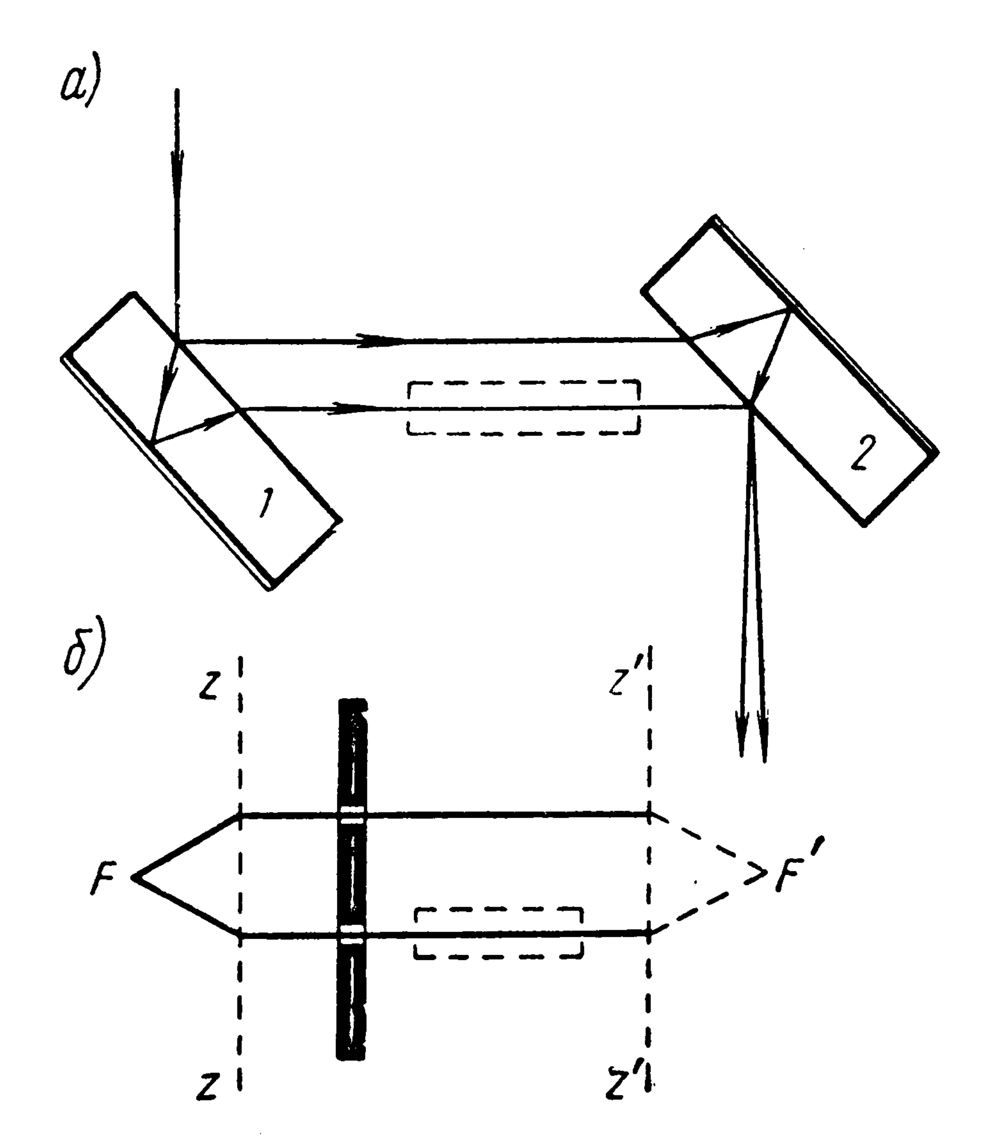


Рис. 48-4. Схема интерференционных рефрактометров:

а) система Жамена (*1* и *2* — плоскопараллельные пластины); *б*) система Цейса (*z* и *z'* — линзы интерферометра)

Пусть *OO* (рис. 48-5) представляет собой проекцию сетчатых плоскостей кристалла или, иначе, плоскостей с наиболее густым расположением узлов решетки (по этим пло-

скостям обычно кристалл раскалывается), а R_λ — направление падающего на эту плоскость под малым углом скольжения θ пучка мягкого рентгеновского излучения длины волны λ. Вследствие сравнимости длин волн с размерами атомов рентгеновское излучение будет рассеиваться узлами решетки. Накладывающиеся друг на друга и интерферирующие рассеянные лучи усиливаются в направлении правильного отражения при условии, что разность их хода будет составлять целое число длин волн.

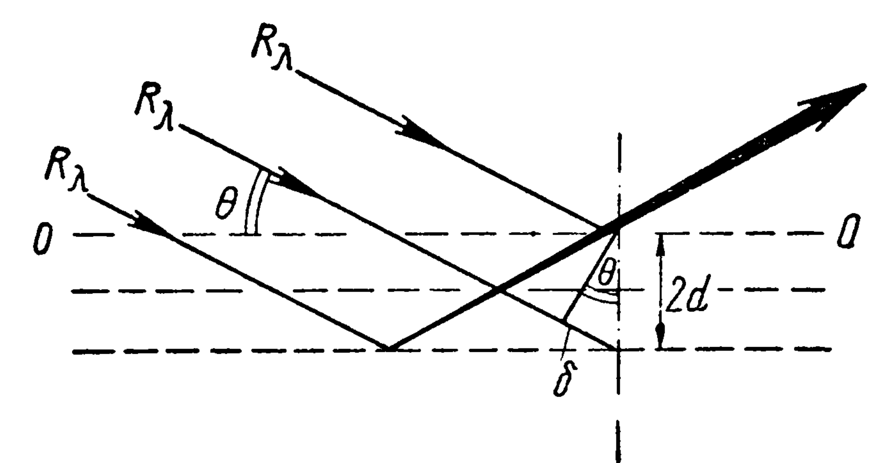


Рис. 48-5. К выводу формулы Вульфа—Брэгга

Таким образом (см. рис. 48-5), из смешанного рентгеновского излучения правильное отражение от сетчатой плоскости кристалла будут претерпевать только те лучи, для которых

$$\delta = 2d \cos \theta = k\lambda \qquad (48,12)$$

— формула Вульфа — Брэгга (здесь $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$; d — расстояние между сетчатыми плоскостями кристалла).

Выражение (48,12) выведено при условии, что показатель преломления рентгеновского излучения в веществе кристалла допустимо считать равным единице. Если известна длина волны однородного рентгеновского излучения, то из выражения (48,12) по измерениям углов правильного отражения можно выяснить структуру кристалла (структурный анализ). При известной постоянной решетки d уравнение Вульфа — Брэгга определяет разложение смешанного рентгеновского излучения в спектр, поскольку для отраженных лучей $\lambda = f(\theta)$.

Лекция 49

ОПТИЧЕСКИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Явления, вызванные нарушением цельности волновой поверхности, называют дифракцией. Дифракционные явления свойственны всем волновым процессам, но они становятся особенно отчетливыми в тех случаях, когда длины волн сравнимы с размерами препятствий. Дифракция проявляется в нарушении прямолинейности распространения колебаний; волна огибает края препятствия.

По принципу Гюйгенса каждую точку волновой поверхности следует рассматривать как точечный излучатель и, следовательно, волновое возмущение в какой-либо точке среды будет совокупным результатом возмущений от всех таких излучателей.

Результат наложения колебаний определяется [см. (44,4)] возмущением, создаваемым половиной центральной зоны и половиной крайней из зон, выделенных на волновой поверхности.

Дифракция возникает при нарушениях цельности волновой поверхности тем отчетливее, чем меньше число зон, выделенных препятствием вблизи центральной зоны. При слишком малом числе действующих зон поток энергии колебаний будет настолько ослаблен, что явление дифракции уже не сможет быть отмечено.

Дифракция звука (огибание звуком препятствий) наблюдается повседневно, поскольку длины звуковых волн в воздухе лежат в границах от 2 до 20 *м*.

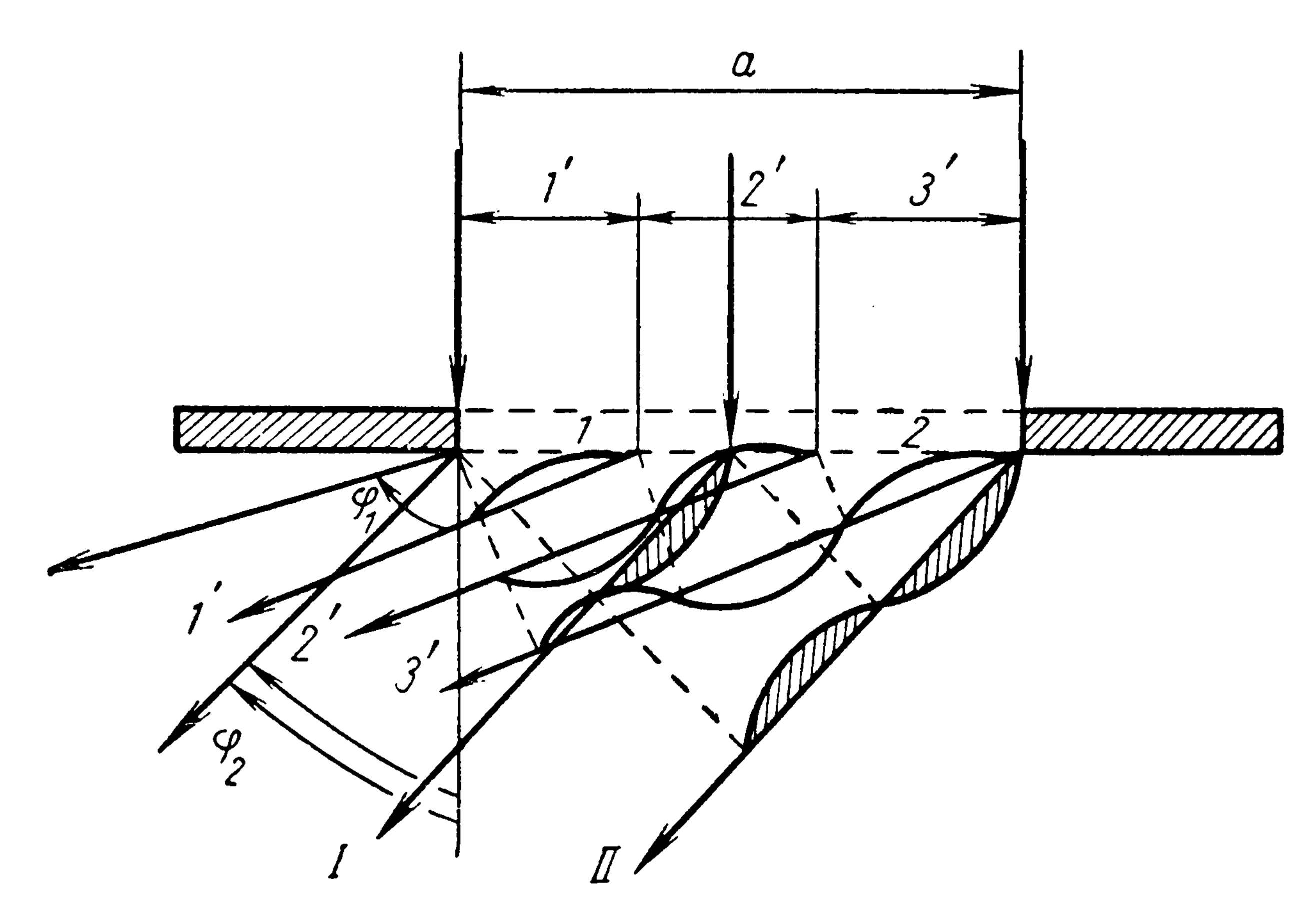


Рис. 49-1. Образование зон от одной щели при разных дифракционных углах (под углом φ_1 выделяются три зоны *1'*, *2'*, *3'*; под углом $\varphi_2 < \varphi_1$ — две зоны *I* и *II*)

Важное научно-техническое значение имеет дифракция света в параллельных лучах (дифракция по Фраунгоферу). Узкая щель шириной $a > \lambda$ в зависимости от угла наблюдения φ_i подразделяется по Френелю на четное или нечетное число зон (рис. 49-1). Очевидно, в тех случаях, когда $a \cos \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, т. е. число зон нечетно, в избранном направлении будет свет; в случае, когда $a \cos \varphi = k\lambda$, свет отсутствует, так как в этом направлении колебания от соседних зон гасят друг друга. Однако одна щель дает слишком мало света, и дифракционные максимумы недостаточно резки.

Для улучшения дифракционной картины применяют ряд параллельных узких щелей. Такие устройства называют дифракционными решетками. Чтобы избежать применения линз, пользуются отражательными дифракционными решетками в виде металлического вогнутого зеркала со штрихами, нанесенными алмазом на внутренней полированной поверхности. Пусть пучок параллельных лучей па-

дает на пропускающую дифракционную решетку из N штрихов (рис. 49-2). Изображение щели коллиматора образуется в фокусной плоскости линзы *ИЛ* только под углом наблюдения φ, удовлетворяющим условию усиления колебаний от соседних щелей в этом направлении как по дифракции, так и по интерференции, так что уравнение дифракционной решетки будет

$$(a+b)\sin\varphi_k = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda, \tag{49,1}$$

или

$$\sin\varphi_k = k\frac{\lambda}{a+b}. \tag{49,1'}$$

Из уравнения (49,1′) следует, что для данной решетки угол φ_k, под которым наблюдается k-й дифракционный максимум, зависит от порядка максимума k и длины волны λ излучения в вакууме. Меньшим углам φ соответствуют меньшие длины волн и, значит, смешанный белый свет будет разложен в спектр. При малых углах (спектр первого порядка; $k=1$) $\frac{\sin\varphi}{\varphi}\approx 1$, и, значит, образованный таким способом спектр не будет искаженным, поскольку в нем одинаковым спектральным интервалам $d\lambda$ соответствует одинаковая ширина спектра $(a+b)\,d\varphi$. Неискаженность образующегося спектра позволяет использовать дифракционные решетки для спектрального анализа.

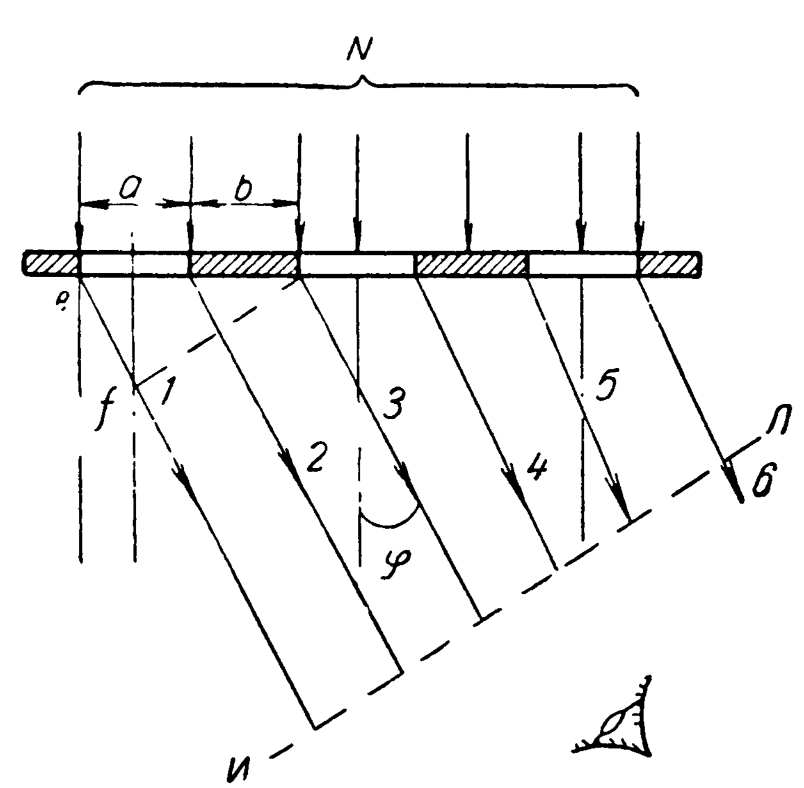


Рис. 49-2. Дифракция от N щелей: *1, 3, 5* и *2, 4, 6* — соответственные друг другу лучи

Можно установить спектральное разрешение, которое допускает решетка с N штрихами. В направлении под углом φ, удовлетворяющим условию

$$N(a+b)\sin\varphi = n\lambda, \tag{49,2}$$

где n — целое число, будет всегда интерференционное гашение света. Это условие означает, что разность хода соответствующих лучей от крайних щелей составляет четное число полуволн или целое число волн. Если разделить решетку на $2n$ частей, то соответствующие лучи соседних частей будут иметь оптическую разность хода $\frac{\lambda}{2}$, т. е. будут гасить друг друга. Исключение составляют случаи, когда $n = kN$, где k — целое число. В этом случае уравнение (49,2) переходит в уравнение решетки (49,1′), которое определяет расположение дифракционных максимумов. Таким образом, для всех экстре-

мальных значений $\sin\varphi$ между k-м и $(k+1)$-м и максимумом можно записать:

$$\sin\varphi = \underbrace{k\frac{\lambda}{a+b} = \frac{n}{N}\cdot\frac{\lambda}{a+b}}_{k\text{-й максимум}};\ \underbrace{\frac{n+1}{N}\cdot\frac{\lambda}{a+b};\ \ldots;\ \frac{n+N-1}{N}\cdot\frac{\lambda}{a+b}}_{(N-1)\text{ минимум}};$$

$$\underbrace{\frac{n+N}{N}\frac{\lambda}{a+b}}_{(N-1)\text{ минимум}} = \underbrace{(k+1)\frac{\lambda}{a+b}}_{(k+1)\text{-й максимум}}.$$

Это значит, что между двумя соседними дифракционными максимумами будет расположено $(N-1)$ полных дифракционных минимума. Малое угловое расстояние $\Delta\varphi$ между k-м максимумом и ближайшим полным минимумом может быть найдено из выражения (49,3), если принять во внимание, что $\cos\Delta\varphi \approx 1$ и $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, поэтому

$$\sin(\varphi_k + \Delta\varphi_k) - \sin\varphi_k = \cos\varphi_k\cdot\Delta\varphi_k = \frac{\lambda}{N(a+b)}$$

или

$$\Delta\varphi_k = \frac{\lambda}{N(a+b)\cos\varphi_k}. \qquad (49,4)$$

Эта угловая величина $\Delta\varphi_k$ определяет разрешаемую решеткой половину ширины спектральной линии длины волны λ.

После дифференцирования (49,1′) получим

$$\cos\varphi_k\delta\varphi_k = k\frac{\delta\lambda}{a+b} \quad \text{или} \quad \delta\varphi_k = k\frac{\delta\lambda}{(a+b)\cos\varphi_k}, \qquad (49,5)$$

где $\delta\lambda$ есть приращение длины волны, которое определяет сложный состав изучаемой спектральной линии (дублет, триплет).

Очевидно, решетка разрешит наблюдение структуры линии, если $\Delta\varphi_k \leqslant \delta\varphi_k$, а условие

$$\Delta\varphi_k = \frac{\lambda}{N(a+b)\cos\varphi_k} = k\frac{1}{(a+b)\cos\varphi_k}\delta\lambda = \delta\varphi_k \qquad (49,6)$$

будет пределом разрешения в k-м порядке, откуда мера разрешения $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ будет равна

$$R = N\cdot k, \qquad (49,7)$$

т. е. спектральное разрешение решетки прямо пропорционально общему числу штрихов N решетки и порядку дифракционного максимума k.

Дифракция света в расходящемся пучке лучей (дифракция по Френелю) сопутствует распространению света в оптических микроскопах и препятствует созданию в них увеличений свыше 2000÷÷3000 кратности.

Для получения правильного изображения необходимо, чтобы через объектив микроскопа проникли дифракционные пучки лучей всех направлений. Ограничение входного отверстия возникает от оправы микроскопа. Чем меньше размеры d рассматриваемого объекта, тем большие углы дифракции приобретают значение в формировании изображения и, следовательно, тем больше должно быть отверстие объектива, или апертура объектива микроскопа ($\sin u$).

Плоский угол u равен половине угла, под которым виден объектив из своего фокуса. Если освещение объекта осуществляется вдоль оси микроскопа и $\sin u < \sin \varphi_1 = \frac{\lambda_0}{d}$, то в микроскоп попадут только лучи центрального (нулевого) максимума, и формирования изображения объекта не произойдет.

Таким образом, условие для разрешения деталей размерами d при осевом освещении будет выражаться формулой

$$d \geqslant \frac{\lambda_0}{n_{\lambda_0} \sin u}, \tag{49,8}$$

где λ_0 — длина волны падающего света в вакууме, n_{λ_0} — показатель преломления среды, находящейся между объектом и объективом (иммерсионная среда; например кедровое масло, для которого в желтом свете $n_{\lambda_0} = 1{,}5$).

При освещении со всех сторон оптическое разрешение возрастает за счет косых дифракционных пучков, так что наименьший размер детали, еще обнаруживаемой по форме, будет равен

$$d = 0{,}5 \frac{\lambda_0}{n_{\lambda_0} \sin u}, \tag{49,8'}$$

где $n_{\lambda_0} \cdot \sin u = A$ — носит наименование апертурного числа Аббе.

Лекция 50

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Электромагнитную волну называют поляризованной, если периодически изменяющийся во времени вектор напряженности электрического поля волны определенным образом ориентирован относительно направления распространения волны. В области радиоволн линейная поляризация возникает автоматически при излучении, поскольку вектор напряженности их электрического поля лежит в плоскости, содержащей ось вибратора (рис. 50-1). Если горизонтальная составляющая электрического поля радиоволны изменяется по закону $E_y = (E_y)_m \cos \omega t$, а вертикальная — по закону $E_z = (E_z)_m \cos(\omega t - \varphi)$, то при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$

$$\left.\begin{aligned} E_y &= (E_y)_m \cos \omega t, \\ E_z &= (E_z)_m \cos \omega t, \end{aligned}\right\}$$

так что

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}\cos\omega t \qquad (50,1)$$

и

$$\frac{E_z}{E_y} = \frac{(E_z)_m}{(E_y)_m} = \operatorname{tg}\alpha = \text{const}. \qquad (50,2)$$

Эти формулы выражают линейную поляризацию (рис. 50-1, *а*). Если сдвиг фазы составляющих вектора E будет равен $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, то $E_y = (E_y)_m \cos\omega t$, но $E_z = (E_z)_m \sin\omega t$, и если

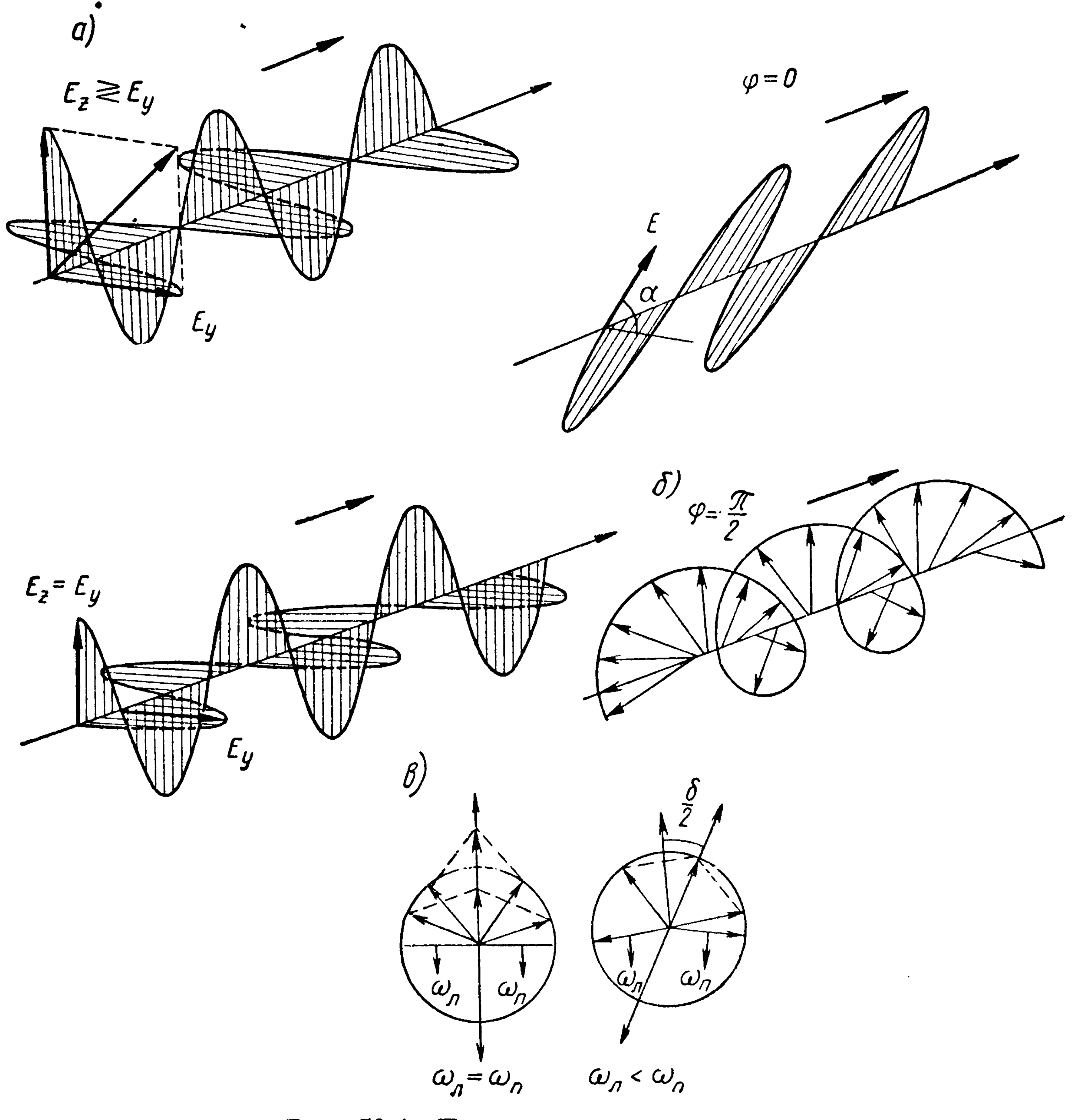


Рис. 50-1. Поляризованные волны:

а) линейная поляризация $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_z}{E_y} = \text{const}\right)$; *б*) круговая поляризация $(\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\omega t)$; *в*) образование линейной поляризации из встречных круговых поляризаций

$(E_y)_m = (E_z)_m = E_m$, то

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_m = \text{const} \quad (50,3)$$

при

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \omega t. \quad (50,4)$$

В этом случае поляризация оказывается круговой (рис. 50-1, *б*). Отметим, что линейно-поляризованную волну можно рассматривать (рис. 50-1, *в*) как результирующую двух волн, имеющих одинаковую, но встречную круговую поляризацию. Если $\omega_л \neq \omega_п$, то на выходе будет наблюдаться поворот плоскости колебаний линейно-поляризованной входной волны. В общем случае произвольного соотношения амплитуд и фаз обеих составляющих напряженности электрического поля возникает эллиптическая поляризация, при которой электрический вектор результирующей волны с течением времени изменяет как свою величину, так и плоскость колебаний. В неограниченной изотропной среде электромагнитные волны являются строго поперечными, но в неоднородных анизотропных а также в ограниченных средах, в которых имеется пространственное изменение электрических свойств, может возникнуть еще и продольная составляющая переменного электрического поля, сдвинутая относительно поперечной на тот или иной фазовый угол. В этих случаях результирующий вектор напряженности электрического поля волны будет составлять с лучом угол, отличный от $\pi/2$.

Если радиоволны всегда поляризованы, то излучение оптического диапазона, испускаемое множеством молекулярных вибраторов (естественные лучи), полностью деполяризовано и представляет собой электромагнитную волну, содержащую некогерентные колебания вектора E всевозможных направлений в плоскости, перпендикулярной лучу (рис. 50-2, *а*). Чтобы из естественного излучения выделить линейно-поляризованные колебания (рис. 50-2, *б*), можно воспользоваться либо отражением излучения от диэлектрического зеркала, либо явлением двойного лучепреломления. В первом случае, если учесть соотношения установленных для электрической и магнитной компонент волны на границе двух диэлектрических сред (см. рис. 28-1, 38-1), амплитуда колебаний, перпендикулярных плоскости падения лучей (s-компонента), в отраженной (E_s') и преломленной (E_s'') волнах будет выражаться формулами

$$E_s' = -E_s \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}; \quad E_s'' = E_s \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad (50,5)$$

где φ и χ — соответственно угол падения и угол преломления лучей; амплитуда колебаний, лежащих в плоскости падения (p-компонента), будет находиться по формулам

$$E_p' = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}; \quad E_p'' = E_p \frac{2 \sin \chi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cos(\varphi - \chi)}. \quad (50,6)$$

Так как интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то имеем

для падающих лучей

$$I = C(E_s^2 + E_p^2), \tag{50,7}$$

для отраженных

$$I' = C[(E_s')^2 + (E_p')^2]. \tag{50,8}$$

Здесь C — коэффициент, зависящий только от выбора единиц.

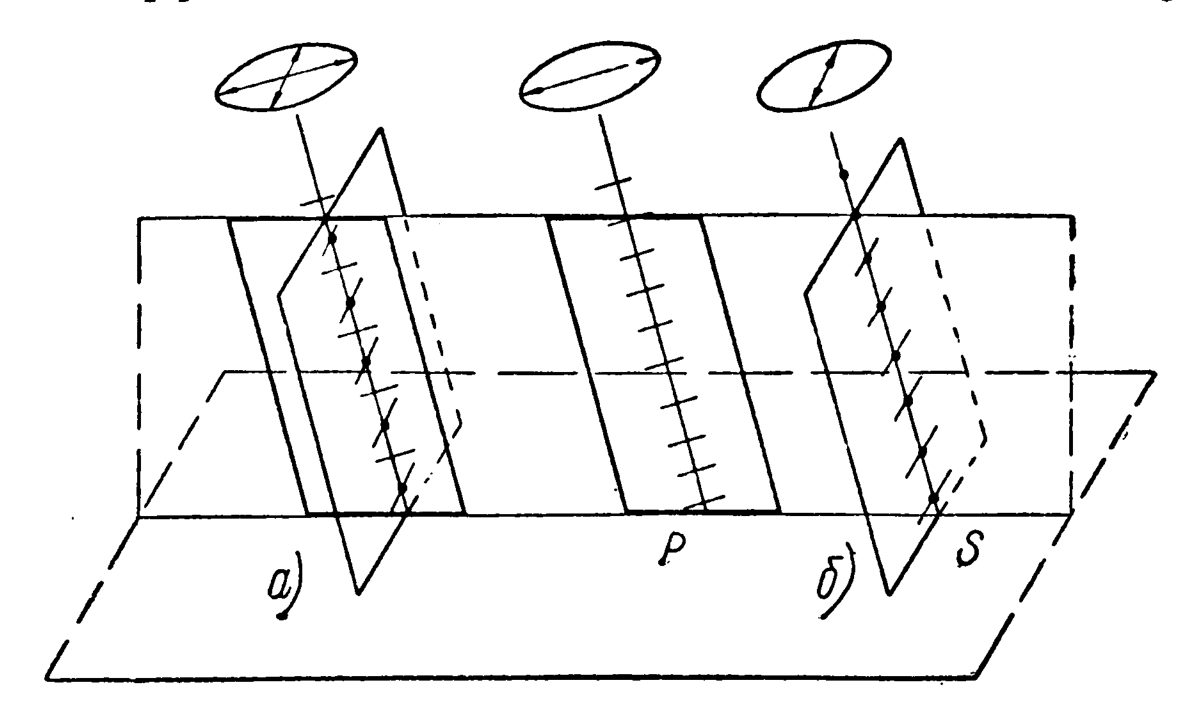


Рис. 50-2. Схематические обозначения лучей в поляризационной оптике:

а) естественный луч; *б*) линейно-поляризованные лучи с колебаниями электрического вектора в плоскости падения лучей (*p* -компоненты) и в плоскости, перпендикулярной ей (*s*-компоненты)

Так как в естественном луче $CE_s^2 = CE_p^2 = \frac{1}{2} I$, то интенсивность отраженного света

$$I' = \frac{1}{2} I \left\{ \frac{\sin^2(\varphi - \chi)}{\sin^2(\varphi + \chi)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \chi)} \right\}. \tag{50,9}$$

Формулы (50,5—50,9) позволяют сделать многие важные заключения об интенсивности и свойствах тех лучей, которые образуются в граничном переходном слое.

Согласно (50,5) и (50,6), во всех случаях, когда $\varphi \neq \chi$, знаки E_s'' и E_p'' совпадают со знаками E_s и E_p (рис. 50-3, *а*) и, следовательно, преломленная волна сохраняет фазу падающей. При $\varphi > \chi$, т. е. при переходе волны в оптически более плотную среду, когда $n > 1$ и $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и при $\varphi + \chi \ll \frac{\pi}{2}$ (падение волны, близкое к нормальному), фаза обеих компонент (*s* и *p*) вектора E' отраженной волны противоположна фазе соответствующих компонент падающей волны, и, наоборот, эти фазы совпадают при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Таким образом, для небольших углов падения лучей, при отражении их от среды, оптически более плотной ($n > 1$), происходит скачок фазы на π, или потеря полуволны. При нормальном падении лучей, когда $\varphi = \chi = 0$, формулы (50,5) и (50,6) приводят к неопределенностям.

Раскрывая эти неопределенности и учитывая, что $n = \frac{\sin\varphi}{\sin\chi}$, получаем для отраженной волны

$$E'_s = -E_s\frac{n-1}{n+1} \quad \text{и} \quad E'_p = E_p\frac{n-1}{n+1}; \tag{50,10}$$

для преломленной волны

$$E''_s = E_s\frac{2}{n+1} \quad \text{и} \quad E''_p = E_p\frac{2}{n+1}. \tag{50,11}$$

При этом коэффициент отражения

$$R = \frac{I'}{I} = \frac{(E'_s)^2 + (E'_p)^2}{E_s^2 + E_p^2} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}. \tag{50,12}$$

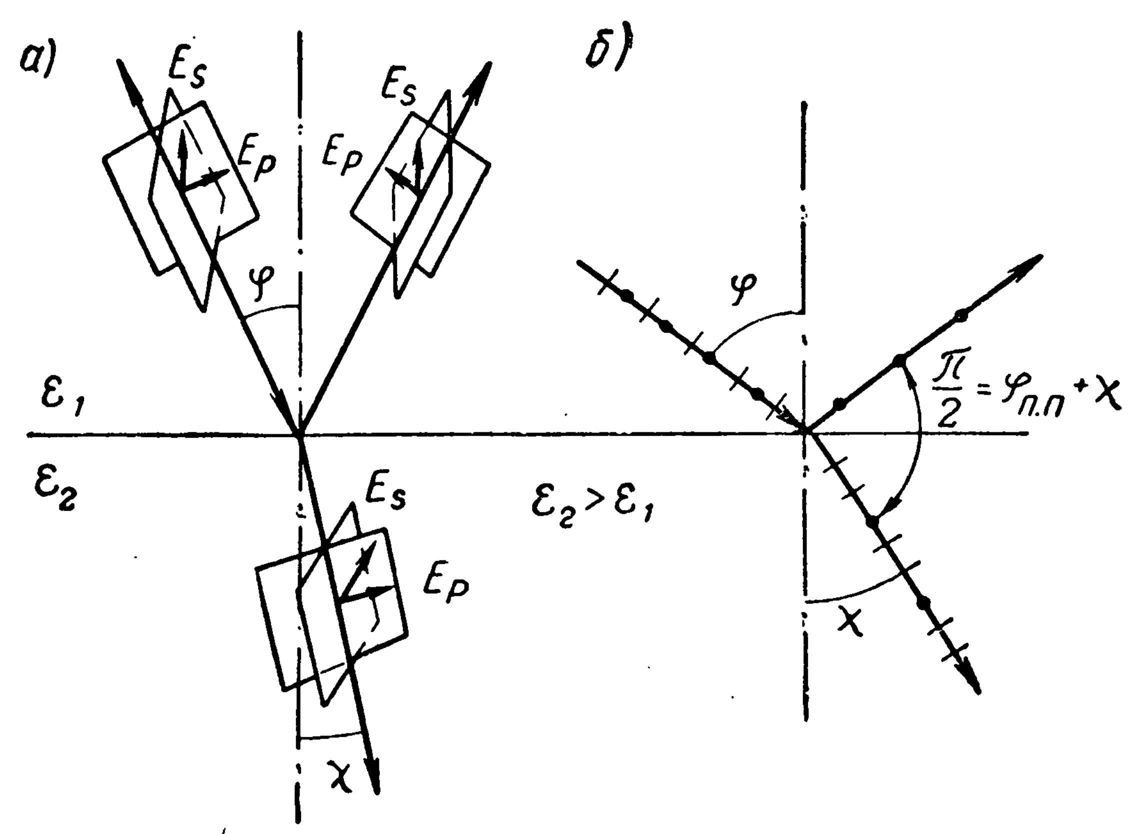


Рис. 50-3. Отражение и преломление света на границе двух диэлектриков:

а) положительные направления векторов E_s и E_p в падающей, отраженной и преломленной волнах при условии: $\varphi + \chi < \frac{\pi}{2}$; *б*) полная линейная поляризация отраженных лучей при $\varphi_{п.п} + \chi = \frac{\pi}{2}$

Для стекла, например, $n = 1{,}5$ и $R = 4\%$. Таким образом, даже при нормальном падении пучка лучей на стеклянные оптические поверхности в результате отражения уменьшается интенсивность света. В том случае, когда $\varphi > \chi$ и когда выполняется условие: $\varphi + \chi = \frac{\pi}{2}$, согласно (50,5) и (50,6), имеем $E_s \neq 0$, в то время как $E_p = 0$ и, значит, получаем полную линейную поляризацию отраженного света (рис. 50-3, *б*). Из соотношения $n = \frac{\sin\varphi}{\sin\chi}$ и условия $\varphi_{п.п} + \chi = \frac{\pi}{2}$ вытекает

$$\operatorname{tg}\varphi_{п.п} = n \tag{50,13}$$

— закон Брюстера. Тангенс угла падения лучей на неметалличе-

ское зеркало, при котором отраженный луч будет полностью линейно поляризован, равен показателю преломления вещества относительно этих лучей. Однако интенсивность поляризованного отраженного света при этом будет невелика и составит

$$I' = \frac{1}{2} I \left[\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\cos(\varphi + \chi)} \right]^2.$$

При отражении лучей длины волны $\lambda = 6000$ Å (желто-зеленая часть спектра) от стеклянной поверхности имеем $\operatorname{tg} \varphi_{п.п} = 1{,}54$, $\varphi_{п.п} = 57°$, а $\chi = 33°$, тогда

$$\frac{I'}{I} = \frac{1}{2} \sin^2 24° \approx 0{,}08 \ (8\%).$$

На эту величину в преломленных лучах будет обеднена интенсивность s-компоненты и, следовательно, преломленные лучи будут частично поляризованы (см. рис. 50-3, *б*).

Путем многократного преломления в стопе стеклянных пластин можно достичь почти полной поляризации лучей на выходе, однако это вызывает значительное уменьшение интенсивности света. Отражение линейно-поляризованного света от металлических зеркал сопровождается его частичной деполяризацией, т. е. превращением в эллиптически поляризованный свет. Это явление используется для установления характеристических оптических констант металлов, связанных с их электрическими параметрами. Способ получения линейно-поляризованных лучей, основанный на двойном лучепреломлении света в некоторых прозрачных кристаллах, позволяет достичь более высокого выхода интенсивности поляризованного света. Согласно закону Максвелла (42,8),

$$\frac{c^2}{v^2} = n_\nu^2 = \varepsilon_\nu,$$

где ε_ν — диэлектрическая проницаемость на частоте проникающей электромагнитной волны. Таким образом, анизотропность кристаллов в отношении преломления света определяется значением диэлектрической проницаемости вещества кристалла по различным направлениям в нем.

Если в любом направлении внутри телесного угла 4π *стер* откладывать соответствующие значения тензора ε_ν, то концом отрезка ε_ν образуется эллипсоид диэлектрических свойств кристалла (рис. 50-4). Каждое из возможных колебаний вектора E в естественном луче будет в кристалле разложено на два взаимно перпендикулярных направления в соответствии со значениями диэлектрических проницаемостей в плоскости, перпендикулярной направлению падающих лучей. При этом возможны три характерных случая.

Если в кристалле $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$, то эллипсоид диэлектрической проницаемости оказывается сферой и, следовательно, колебания вектора E любого возможного направления будут распространяться в кристалле с одной и той же скоростью. Показатели преломления лучей, проникающих в кристалле в любом направлении, будут одинаковыми, и, следовательно, любое направление может быть принято за главную оптическую ось кристалла. Примером такого многоосного кристалла является кристалл каменной соли (NaCl), в котором нет двойного лучепреломления. Если эллипсоид диэлектрических свойств кристалла представляет собой эллипсоид вращения, так что, например, $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$, то главной оптической осью (см. рис. 50-4) является только направление лучей *1* вдоль ε_z (одноосный кристалл), а наибольшее двойное лучепреломление наблюдается при направлении лучей *2*, перпендикулярном к оптической оси кристалла.

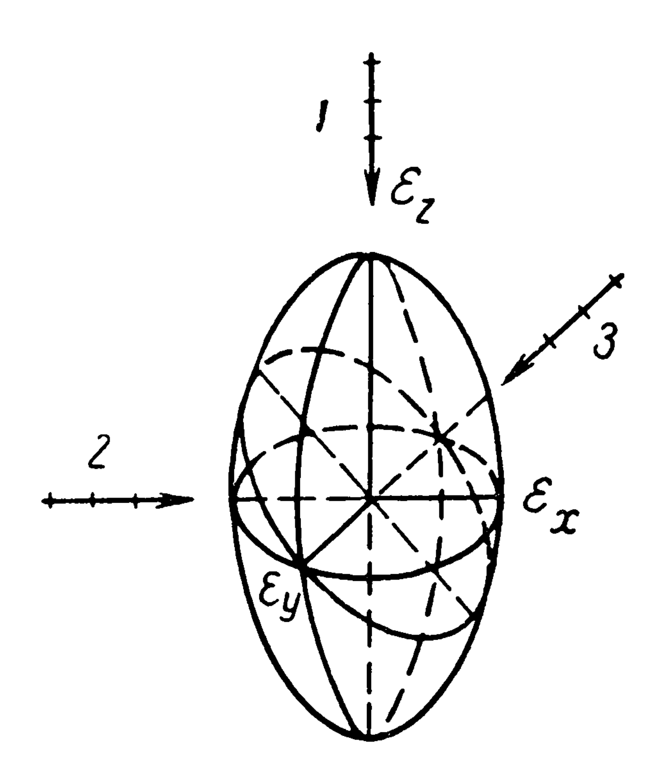


Рис. 50-4. Эллипсоид диэлектрических свойств кристалла

Из двух образовавшихся в кристалле лучей тот луч, который соответствует колебаниям вектора E, лежащим в плоскости, перпендикулярной главному сечению кристалла (плоскости, содержащей оптическую ось и падающий луч), имеет преломление, не зависящее от направления падающих лучей. Его преломление полностью следует законам преломления света в изотропных средах (законам Снеллиуса) и потому этот луч в кристалле называется обыкновенным. (Вне кристалла — это просто линейно-поляризованный луч). Второй луч в кристалле содержит колебания вектора E в плоскости главного сечения кристалла. Преломление этого луча зависит от направления падающих лучей, а показатель преломления изменяется от значения, равного показателю преломления обыкновенного луча n_0, если падающие лучи направлены вдоль оптической оси, до значения $n_н$, большего или меньшего n_0, если падающие лучи направлены под углом к оптической оси кристалла. Преломление второго луча не подчиняется законам преломления Снеллиуса, и потому в кристалле этот луч называется необыкновенным. (Вне кристалла — это также линейно-поляризованный, но лежащий в перпендикулярной плоскости.) Таким образом, для двулучепреломляющих кристаллов справедливо неравенство

$$n_н \gtrless n_0.$$

Если $n_н \geqslant n_0$, то кристалл обозначают как положительный (например, кварц SiO_2); если $n_н \leqslant n_0$ — как отрицательный (исландский шпат — разновидность кальцита $CaCO_3$).

Может оказаться также, что эллипсоид диэлектрических свойств является трехосным эллипсоидом ($\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$). В таком случае имеется два направления, вдоль которых нет двойного лучепреломления. В этих случаях сечения эллипса, перпендикулярные направлению лучей, являются окружностями, т. е. кристалл является двухосным (например, слюда).

В таких кристаллах, как и в одноосных, наблюдается двойное лучепреломление всякий раз, когда падающие лучи направлены к оптической оси под углом, отличным от нуля.

Оба луча в двулучепреломляющем веществе являются линейно-поляризованными, причем их колебания лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Призма из исландского шпата ($n_н \leqslant n_0$),

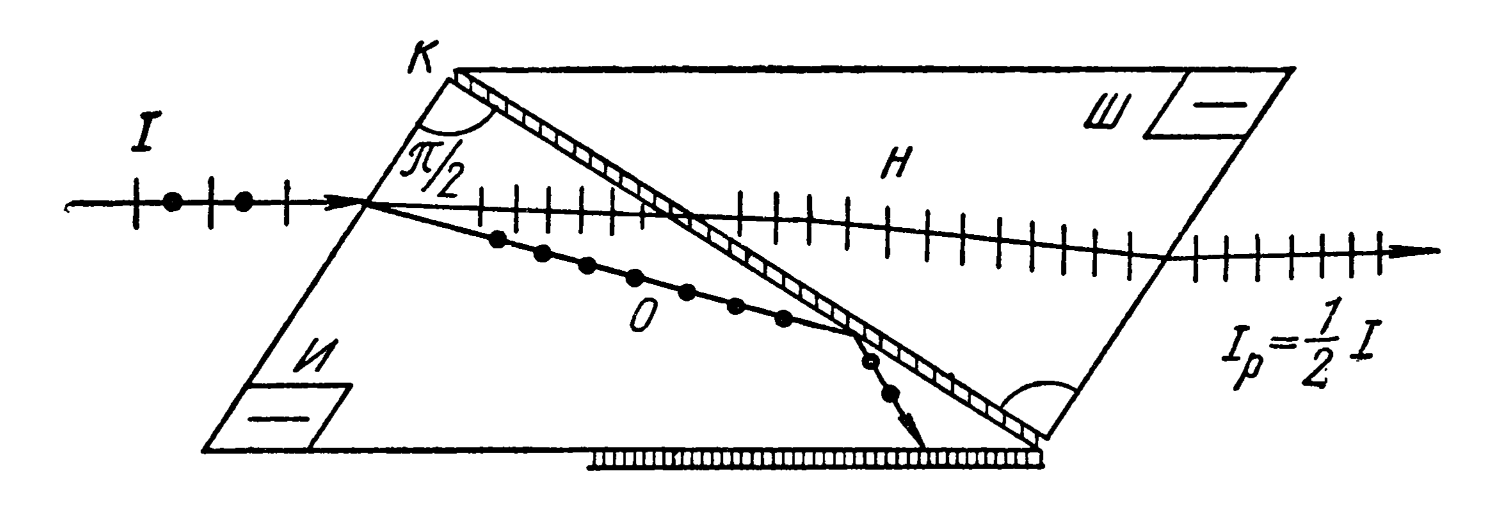


Рис. 50-5. Поляризационная призма-николь из исландского шпата

главное сечение которой показано на рис. 50-5, выполнена таким образом, что на прозрачной клеевой прослойке более преломляющийся обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение и гасится зачерненной гранью призмы ($n_н < n_к < n_0$). Такая призма (призма-николь) пропускает световые волны только тех колебаний вектора E, которые лежат в плоскости главного сечения кристалла, а потому может быть использована как в качестве поляризатора, так и в качестве анализатора линейно-поляризованных лучей.

В некоторых кристаллах полностью поглощаются колебания одного из двух образовавшихся в кристалле лучей. Например, в турмалине полностью гасятся колебания обыкновенного луча, однако этот минерал обладает и некоторым селективным, спектральным поглощением, вследствие чего он представляется окрашенным. Вместо прозрачных поляризационных кристаллических призм, допускающих лишь малые апертуры, используются плоские совокупности ориентированных мелких двулучепреломляющих кристаллов сернокислого иодхинина, почти полностью поглощающих один из поляризованных лучей и пропускающих другой почти без поглощения (обыкновенный луч). Образуемые таким образом поляроиды обладают большими апертурными поверхностями.

Лекция 51

ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛЯРИЗОВАННОМ СВЕТЕ

Если два поляроида (например, две призмы-николи) поставлены на пути лучей так,что их главные сечения параллельны друг другу, то колебания электромагнитного поля световой волны, пропущенные первым из них (поляризатором), будут пропущены и вторым (анализатором). Наоборот, при взаимно перпендикулярном расположении главных сечений скрещенных поляроидов колебания, пропущенные одним из них, будут задержаны вторым. Пропускание света парой поляроидов зависит от угла между их главными сечениями (рис. 51-1). Как видно,

$$a_a = a_p \cos\alpha, \qquad (51,1)$$

и, следовательно, $I_a \sim a_a^2$, тогда

$$I_a = I_p \cos^2\alpha \qquad (51,2)$$

— закон Малю.

Для прозрачных поляроидов $I_p = \frac{1}{2} I$, так что

$$I_a = \frac{1}{2} I \cos^2\alpha, \qquad (51,2')$$

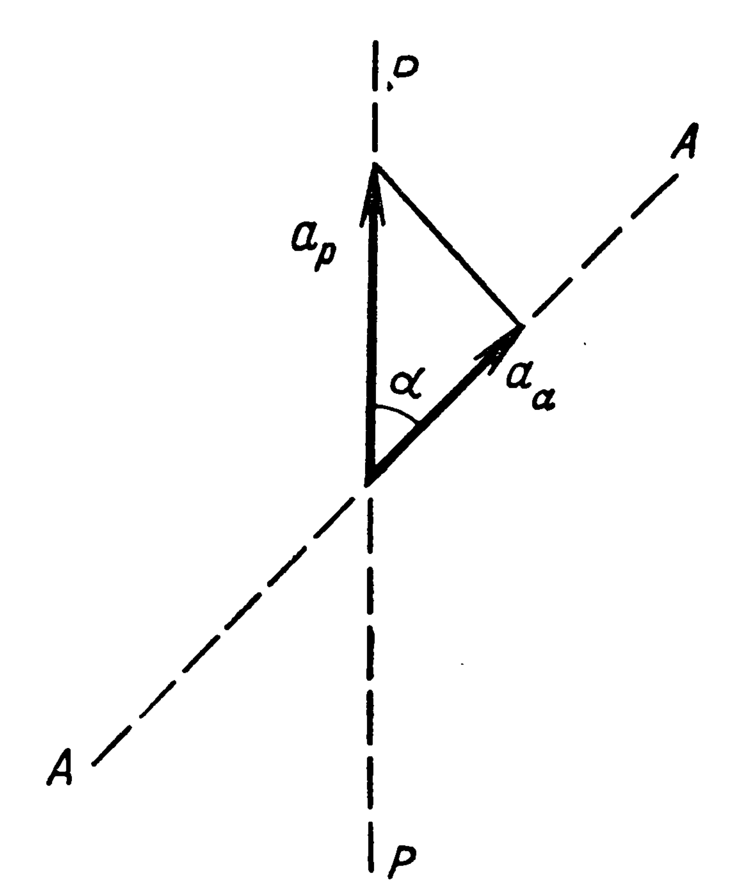


Рис. 51-1. К выводу закона Малю:

PP — проекция главного сечения поляризатора; *AA* — то же, для анализатора

где I — интенсивность естественного неполяризованного излучения в пучке падающих лучей. Закон пропускания (51,2) в границах оптического участка спектра электромагнитных излучений есть ахроматический закон, справедливый для лучей любого качества (любой частоты ν, любых квант энергии $h\nu$, любой длины волны λ в вакууме). Это означает, что пара прозрачных поляроидов представляет собой регулируемый серый фильтр, вследствие чего полярископы с призмами-николями или плоскими поляроидами широко используются в денситометрии (в измерениях оптической плотности почернения фотопленок). Другим важным техническим применением полярископов является наблюдение интерференции поляризованного света. Принцип действия интерференционного полярископа показан на рис. 51-2.

Если для стабильной картины интерференции естественного света необходима когерентность накладывающихся волн, т. е. постоянство сдвига их фазы, то для линейно-поляризованных лучей к этому условию добавляется еще требование совпадения плоскостей колебаний. Естественный свет от источника *L* после прохождения поляроида *PP* дает начало линейно-поляризованному свету, падаю-

щему нормально на испытуемую, прозрачную плоскопараллельную и двулучепреломляющую пластину FF. Если испытуемая пластина является кристаллической (например, кварцевой), то для наблюдения интерференции необходимо, чтобы она была вырезана из кристалла неперпендикулярно оптической оси, и тогда при нормальном падении лучей произойдет двойное лучепреломление (рис. 51-2, *а*). Если испытуемая пластина выполнена из аморфного прозрачного твердого вещества (например, стекла, целлулоида, плексигласа, полистирола) или жидкого вещества (например, сероуглерода, масла, спирта), то для создания анизотропии и сопутствующего ей двулучепреломления необходимо внешнее воздействие. Это воздействие может быть механическим (растяжение, сжатие) (рис. 51-2, *б*), термическим (внутренние натяжения в закаленных стеклах; рис. 51-3), электрическим (электрострикция, эффект Керра) (рис. 51-2, *в*) и магнитным (магнитострикция и эффект Коттона, аналогичный эффекту Керра). Во всех случаях возникающее двулучепреломление $\Delta n = n_н - n_0$ пропорционально объемной плотности энергии ω, запасенной в материале. При механическом воздействии

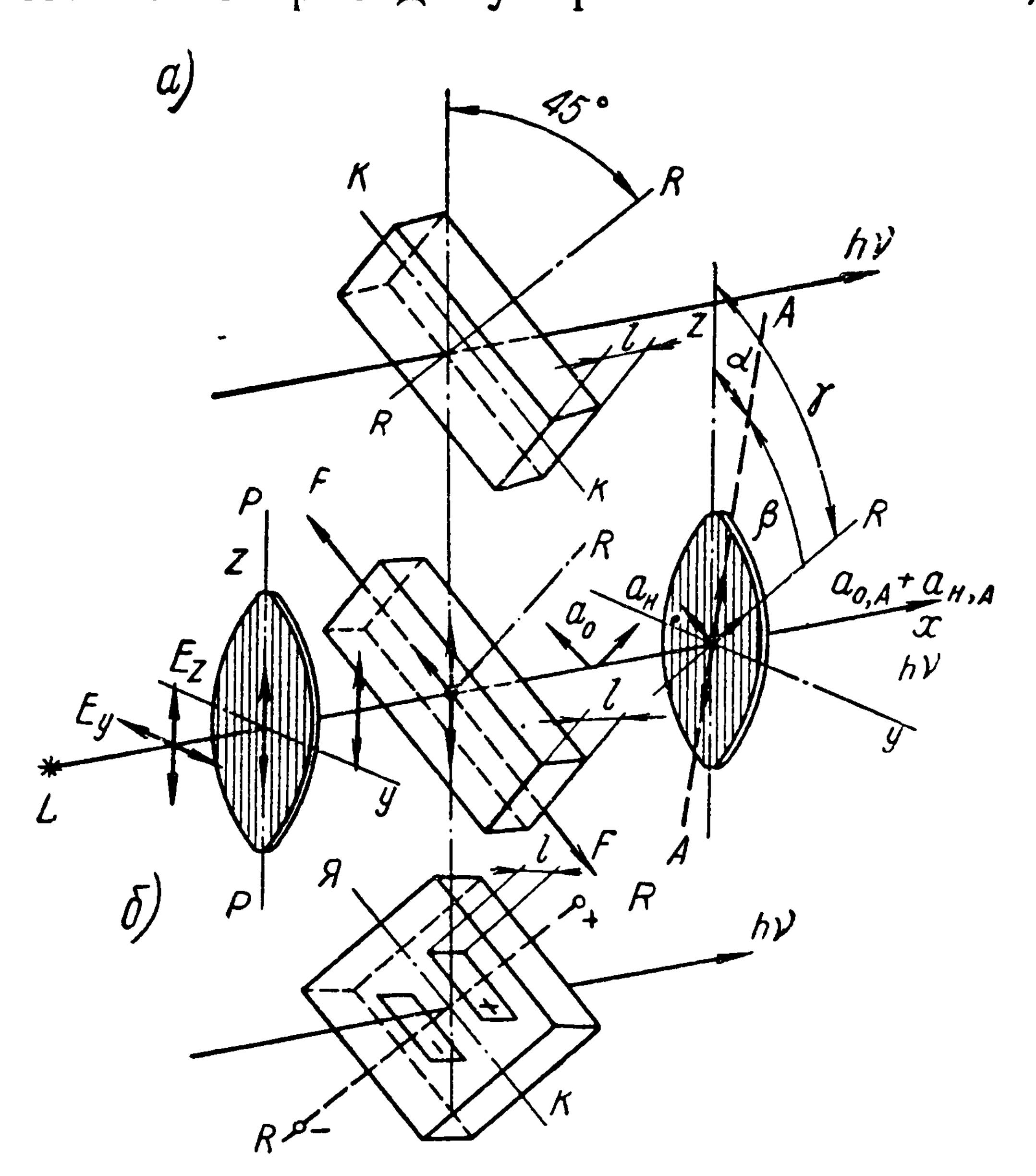


Рис. 51-2. Принцип действия интерференционной полярископической установки:

PP — поляроид-поляризатор; FF — прозрачный образец, подвергаемый растяжению; RR — направление оптической оси двулучепреломляющего образца; AA — поляроид-анализатор. *а*) KK — двулучепреломляющая кристаллическая пластина, вырезанная неперпендикулярно оптической оси, или образец закаленного стекла; *б*) *Я*К — ячейка Керра

$$w_м = \frac{dW}{dV} = P,$$

где P — напряжение в материале; при электрическом воздействии

$$w_\varepsilon = \frac{1}{8\pi} E^2;$$

при магнитном

$$w_\mu = \frac{1}{8\pi} H^2.$$

Таким образом, имеем соответственно

$$\Delta n_м = K_м P; \quad \Delta n_\varepsilon = K_\varepsilon E^2; \quad \Delta n_\mu = K_\mu H^2. \tag{51,3}$$

Оптическая разность хода δ, приобретаемая необыкновенным и обыкновенным лучами в двулучепреломляющем слое толщиной l, выраженная в длинах волн, во всех случаях анизотропии представляется в виде

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{(n_н - n_0)\, l}{\lambda}. \tag{51,4}$$

Для кристалла или закаленного стекла с естественной анизотропией выражение (51,4) приводит к сдвигу фаз, равному

$$\varphi_к = 2\pi \frac{n_н - n_0}{\lambda}\, l = C_к\, \Delta n l; \tag{51,5}$$

механическое воздействие — к сдвигу фаз

$$\varphi_м = C_м \cdot P \cdot l, \tag{51,6}$$

где

$$C_м = 2\pi \frac{K_м}{\lambda};$$

электрическое воздействие — к сдвигу фаз

$$\varphi_\varepsilon = C_\varepsilon E^2 l, \tag{51,7}$$

где $C_\varepsilon = 2\pi \frac{K_\varepsilon}{\lambda}$ — постоянная эффекта Керра; магнитное воздействие аналогично

$$\varphi_\mu = C_\mu H^2 l, \tag{51,8}$$

где $C_\mu = 2\pi \frac{K_\mu}{\lambda}$ — постоянная эффекта Коттона.

Таким образом, безотносительно к роду воздействий, вызывающих двулучепреломление в испытуемом слое l, линейно-поляризованный луч разложится в нем на необыкновенный ($a_н$) луч с колебаниями в плоскости главного сечения, содержащего оптическую ось R и обыкновенный луч (a_0) с колебаниями, перпендикулярными этому сечению (см. рис. 51-2, *б*). Несмотря на то, что в пучке имеются когерентные необыкновенные и обыкновенные лучи, которые накладываются друг на друга и в соответствии с формулами (51,4)—(51,8) имеют сдвиг фазы (на рис. 51-2 фаза вектора a_0 отстает от фазы вектора $a_н$), отличный от нуля, на выходе из пластинки интерференции наблюдаться не будет, поскольку колебания этих лучей взаимно перпендикулярны. Однако оба эти колебания, как показано на том же рисунке, имеют составляющие, пропускаемые анализатором и, следовательно, на выходе из анализатора будет наблюдаться стабильная интерференционная картина поляризованных лучей, которая может быть зафиксирована на фотопленке (рис. 51-3).

Если угол между главными сечениями поляризатора и анализатора будет, как и раньше, равен α (см. рис. 51-2), а между главным сечением двулучепреломляющей пластины и главными сечениями поляризатора и анализатора соответственно γ и β, так что $\alpha = \gamma - \beta$, то амплитуды колебаний необыкновенного и обыкновенного лучей в двулучепреломляющей пластине соответственно равны (рис. 51-4):

$$a_{н} = a_{р} \cos\gamma \text{ и } a_0 = a_p \sin\gamma; \quad (51{,}9)$$

сдвиг фаз между этими колебаниями составит

$$\varphi = 2\pi \frac{n_{н} - n_0}{\lambda} l = \varphi(\lambda); \quad (51{,}10)$$

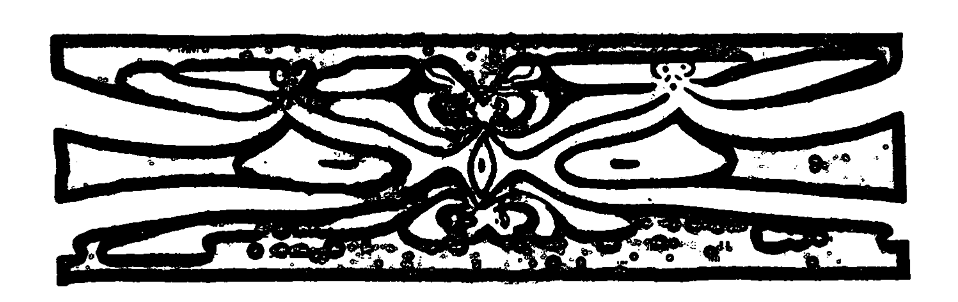


Рис. 51-3. Изоклины напряженного образца, сфотографированные через поляроиды

Рис. 51-4. К выводу интерференционного уравнения

и амплитуды составляющих необыкновенного и обыкновенного лучей, которые выходят из анализатора, будут иметь вид:

$$a_{н.\,a} = a_p \cos\gamma \cos\beta; \quad a_{0.\,a} = a_p \sin\gamma \sin\beta. \qquad (51{,}11)$$

Для квадрата амплитуды на выходе, согласно (47,3), получим:

$$a^2 = a_p^2 (\cos^2\gamma \cos^2\beta + \sin^2\gamma \sin^2\beta + + 2\sin\gamma \cos\gamma \sin\beta \cos\beta \cos\varphi). \qquad (51{,}12)$$

Прибавляя к выражению в скобках $\pm 2 \sin\gamma \cos\gamma \sin\beta \cos\beta$ и учитывая, что $\alpha = \gamma - \beta$, а также, что $I \approx a^2$, согласно (10,5), после преобразований найдем

$$I_a = I_p \left(\cos^2\alpha - \sin 2\gamma \sin 2\beta \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right). \qquad (51{,}13)$$

Первое слагаемое правой части представляет собой ахроматический закон Малю для пропускания лучей парой поляроидов (см. 51,2), а второе слагаемое — хроматическое (цветное) слагаемое, поскольку сдвиг фазы зависит от длины волны, т. е. $\varphi = \varphi(\lambda)$. В случае поляроидов, установленных так, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, из спектра смешанного (например, белого) излучения будут вычитаться разные величины и, следовательно, возникнет цветная окраска (изменится распределение интенсивности по спектру), причем поле зрения будет свет-

лым в меру значений угла скрещивания $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Однако при $\gamma = 0$ или при $\beta = 0$ цветность исчезает и

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha. \tag{51,14}$$

Для скрещенных поляроидов

$$\alpha = \gamma - \beta = \frac{\pi}{2}; \tag{51,15}$$

цвета исчезают при тех же значениях γ и β, но поле зрения при этом будет полностью затемнено.

Если поляроид-анализатор (AA на рис. 51-2) повернуть на угол $\pi/2$, т. е. в уравнении (51,12) вместо α взять $\alpha + \frac{\pi}{2}$ и вместо β принять $\beta + \frac{\pi}{2}$, то вместо (51,13) получим

$$I'_a = I_p \left(\sin^2 \alpha + \sin 2\gamma \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right), \tag{51,13'}$$

так что

$$I_a + I'_a = I_p. \tag{51,16}$$

Это означает, что цвета окраски изменяются на дополнительные до белого.

В случае, когда $\gamma = \beta$ и, следовательно, $\alpha = 0$ (параллельные поляроиды), согласно (51,13), имеем

$$I_a = I_p \left(1 - \sin^2 2\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right). \tag{51,17}$$

Наиболее густая окраска получится при $\gamma = 45°$, как это показано на рис. 51-2.

Для полностью скрещенных поляроидов $\alpha = \gamma - \beta = \pi/2$ и, значит, $\sin 2\beta = -\sin 2\gamma$, так что

$$I_a = I_p \sin^2 2\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2} = I_p \sin^2 2\gamma \sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}. \tag{51,18}$$

Наиболее густая окраска просветленного поля, согласно (51,18), также будет при $\gamma = 45°$, когда $I_a = I_p \sin^2 \frac{\varphi}{2} = I_p \sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}$. Интенсивность $I_{a,\lambda}$ света длины волны λ на выходе зависит, таким образом, от сдвига фаз необыкновенного и обыкновенного лучей в пластине $\left(\varphi = 2\pi \frac{n_н - n_0}{\lambda} l\right)$ или от разности хода этих лучей $\delta = (n_н - n_0)l$. Согласно (51,18), интерференционные максимумы спектральной интенсивности лучей, прошедших анализатор, будут наблюдаться при условии, что $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, где $k = 0, 1, 2, 3$.

В соответствии с этим приведем таблицу приблизительного соответствия между разностью хода лучей и цветом окраски просветленного поля для скрещенных поляроидов.

Таблица 24

$(2k+1)\frac{\lambda}{2} = \delta = (n_н - n_о)\,l$ (*мк*) при *k*, равном			Цвет
0	1	2	
—	0,565	1100	Фиолетовый
—	0,640	1150	Синий
—	0,740	1250	Зеленый
—	0,840	1350	Желто-зеленый
0,300	0,880	1400	Желтый
0,425	0,945	1450	Оранжевый
0,450	1,050		Красный

Поляризационный метод определения напряжений в прозрачных моделях сооружений опирается на три исходных положения: упругостный закон Гука, закон анизотропии, возникшей под действием механических сил (51,3), и теорема Леви, согласно которой в случае плоской задачи выполняется закон подобия деформаций, и поэтому безразлично, на каком материале (металле, бетоне или прозрачных ксилоните, стекле, целлулоиде) производится изучение внутренних напряжений. О напряжениях в материале судят по двум системам интерференционных полос: изоклинам или темным полосам (линиям), определяющим направление главных напряжений, и изохромам, или полосам равной окраски, характеризующим разность главных напряжений. Когда возникающие разности хода в моделях подобия настолько малы ($\delta < 0{,}25$ *мк*), что окраска просветления поля бледна, то прибегают к ее увеличению путем введения между образцом и анализатором добавочной слюдяной или кварцевой пластинки.

Важное практическое значение имеет вращение плоскости колебаний линейно-поляризованных лучей при их проникновении сквозь так называемые «оптически-активные» среды. Если линейно-поляризованный луч направлен вдоль главной оптической оси двулучепреломляющего кристалла, например кварца, то двойного лучепреломления внутри кристалла не будет. Однако решетка кристалла может быть такой структуры, при которой система связанных в ней взаимно перпендикулярных осцилляторов, будет иметь размеры, сравнимые с длинами волн оптической части спектра электромагнитных излучений, и несколько различные частоты собственных колебаний. Это приводит к новым оптическим явлениям. Если, например, направление падающих лучей совпадает с осью z, а колебания осцилляторов в решетке происходят по осям x и y,

то в случае, когда основное колебание совершает осциллятор x с собственной частотой ν_1, а вынужденное колебание, связанное с ним, — осциллятор y с частотой $\nu_2 > \nu_1$, то возникает поляризованный по кругу луч, причем в сторону, соответствующую сдвигу фаз $\pi/2$ (рис. 51-5). При обратном сочетании, т. е. если основное колебание совершает осциллятор y, а вынужденное — осциллятор x с собственной частотой $\nu_1 < \nu_2$, сдвиг фазы будет иметь обратный знак и поляризация будет круговой, но с обратным вращением вектора E (см. рис. 10-7). Таким образом, линейно-поляризованный луч, направленный в двулучепреломляющий кристалл вдоль оптической оси, преобразуется в нем в два луча, поляризованные по кругу в противоположные стороны. Этот результат был непосредственно подтвержден в экспериментах Френеля. Подобные преобразования не будут иметь места, если частоты колебаний падающих излучений значительно отличаются от оптических частот ($\nu = 10^{14} \div 10^{15}$ *гц*). Если правокруговой и левокруговой поляризованные лучи при своем распространении встречают симметричную структуру вещества и, следовательно, одинаковое значение динамической диэлектрической проницаемости, то скорость их распространения будет одинакова и плоскость колебаний линейно-поляризованного света на выходе из кристалла сохранится прежней (рис. 51-6). При отсутствии структурной или молекулярной симметрии вещества скорости распространения правокругового и левокругового (по взгляду в сторону источника) лучей будут различны, и плоскость колебаний линейно-поляризованного луча будет по мере его проникновения поворачиваться на тот или иной угол в сторону круговой поляризации света, распространяющегося с большей скоростью. При разности хода лучей $\delta = \frac{\lambda}{2}$ (пластины в половину волны) угол поворота составит $\pi/2$ (см. рис. 51-6).

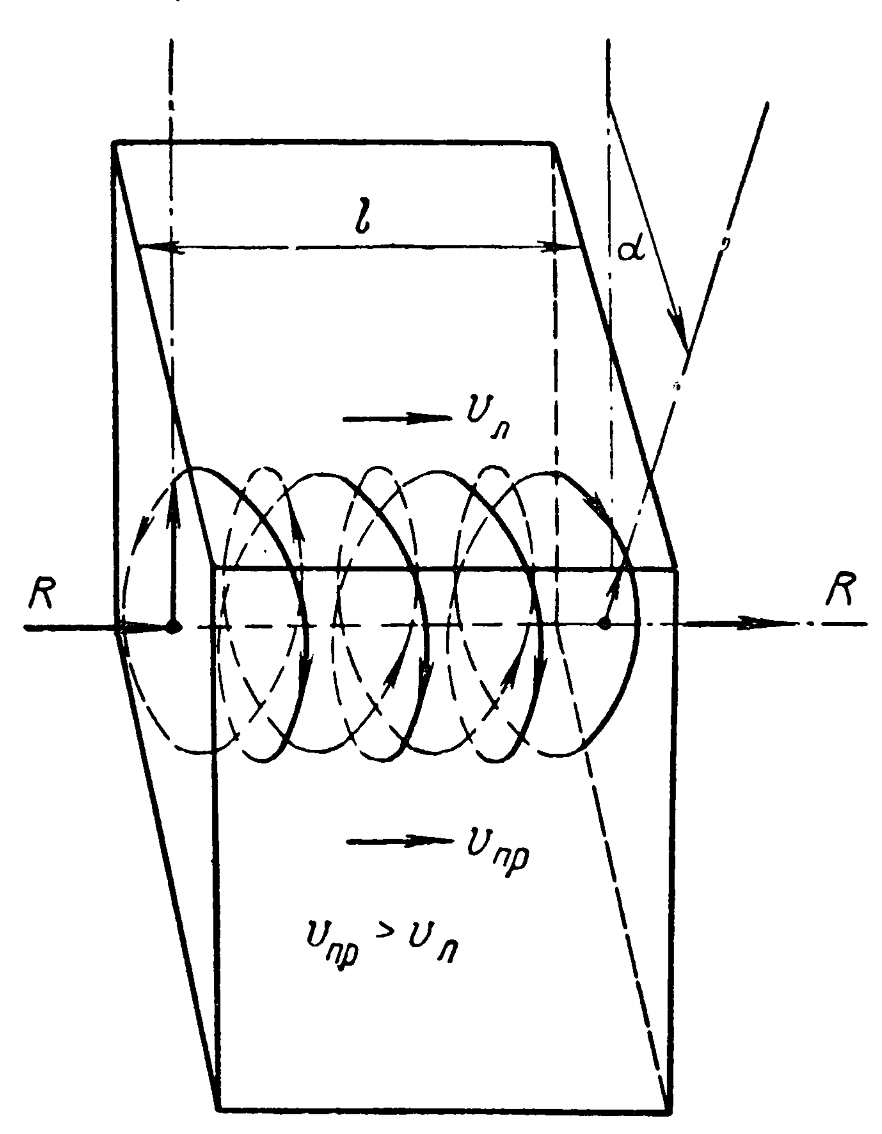


Рис. 51-5. Вращение (влево при взгляде на источник) плоскости колебаний линейно-поляризованного луча при распространении его вдоль оптической оси RR двулучепреломляющего кристалла толщиной l.

Линейно-поляризованный луч распадается на два поляризованных по кругу. Скорость распространения излучения $v_{пр}$, поляризованного по правому кругу (пунктирная линия), больше, чем по левому $v_л$ (сплошная винтовая линия)

Оптическая активность кристаллов обусловлена составом и структурой их решеток. Так как связь взаимно перпендикулярных осцилляторов в решетке одного и того же кристаллического вещества может осуществляться только зеркально подобными способами, то возможны правовращающие и левовращающие разновидности кристаллического вещества (кристаллические кварц, киноварь, сернокислый стрихнин, сернокислый этилендиамин). Оптическая активность, обусловленная структурой решетки кристалла, исчезает при переходе вещества в аморфное состояние (например, у плавленого кварца). Однако в тех случаях, когда оптическая активность зависит не от расположения атомов в кристалле, а от распределения атомов в молекуле (оптически активные растворы и жидкости), вещество может обладать оптической активностью как в кристаллическом состоянии, так и в растворе (например, сернокислый стрихнин). Растворение оптически активного вещества в неактивной среде не изменяет его свойств при вращении плоскости колебаний и, следовательно, позволяет изучать структуру молекул твердых веществ. Многие растворы (например, растворы сахара) и органические жидкости (смолы, альбумины, алкалоиды и органические кислоты, мочевина) обнаруживают оптическую активность. Кристаллический сахар оптической активностью не обладает. Оптическая активность раствора сахара может вызывать поворот плоскости колебаний как в одну (тростниковый сахар), так и в другую сторону (свекловичный сахар). Все явления, протекающие в двулучепреломляющих кристаллах при распространении в них линейно-поляризованных лучей вдоль оптических осей, происходят при распространении этих лучей сквозь оптически активные жидкости, однако с тем отличием, что в жидкостях сопряженные осцилляторы являются не результатом структуры решеток, а результатом структуры молекул вещества.

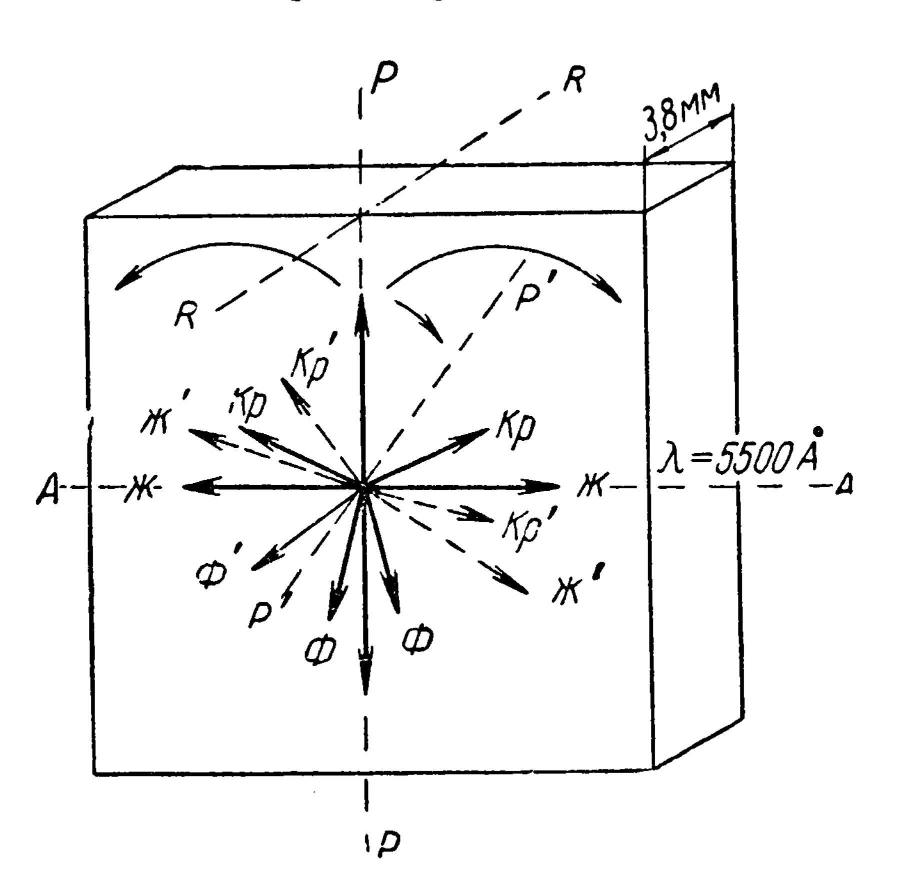


Рис. 51-6. Бикварц при окраске поля зрения.

При достижении чувствительной пурпурной окраски колебания желтый луч повернут на $\pi/2$ и пропускается скрещенным анализатором AA (сплошные стрелки). При повороте плоскости колебаний оптически-активным веществом ($P'P'$) окраска правой половины будет красной, а левой — зеленой (пунктирные стрелки)

Законы оптической активности (законы Био) для кристаллических веществ заключаются прежде всего в том, что угол поворота α плоскости колебаний линейно-поляризованных лучей при их распространении вдоль оптической оси двулучепреломляющего кри-

сталла прямо пропорционален толщине образца l, т. е.

$$\alpha = [\alpha] l, \tag{51,19}$$

где $[\alpha]$ называется удельным вращением плоскости колебаний линейно-поляризованных лучей. Это соотношение может быть распространено и на растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях, так как удельное вращение можно принять прямо пропорциональным концентрации активного вещества в растворе, поэтому

$$[\alpha]' = [\alpha] \frac{P}{P+q} \rho l = [\alpha] C \cdot l. \tag{51,19'}$$

Здесь P — число граммов оптически активного вещества, q — число граммов растворителя, ρ — плотность раствора, так что $C = \frac{P}{P+q}\rho$ — концентрация активного вещества или число граммов этого вещества в единице объема раствора. $[\alpha]'$ представляет собой удельное линейное вращение плоскости колебания собственно активного вещества. Для удельного линейного вращения плоскости колебаний правовращающего и левовращающего веществ справедливо соотношение

$$[\alpha]_{пр} = [\alpha]_{л}. \tag{51,20}$$

Вращательная дисперсия, т. е. зависимость $\alpha = f(\lambda)$, характеризуется приближенным законом Био

$$[\alpha] \approx A + \frac{B}{\lambda^2}, \tag{51,21}$$

где $A < 0$.

Этот закон подобен приближенному закону Коши для обыкновенной дисперсии (лучепреломления): $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, но отличается тем, что в законе Коши A всегда только положительно.

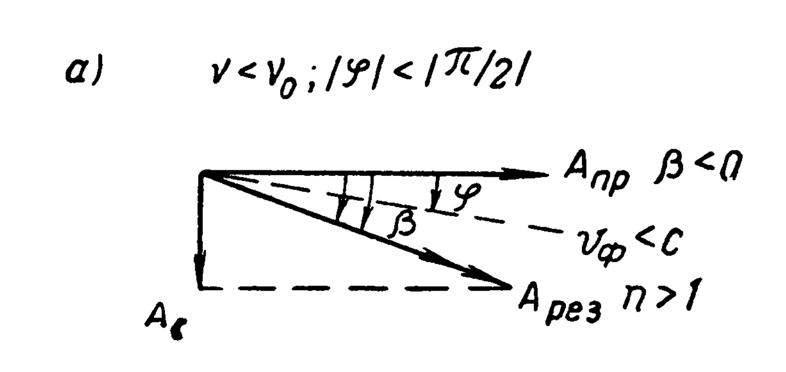
Явление вращения плоскости колебаний в органических веществах широко используется в пищевой промышленности и медицине для определения концентраций оптически активных веществ в растворах. Бикварцевые стыковые пластины применяются в оптотехнике для получения цветочувствительных окрасок полей зрения полярископов (см. рис. 51-6).

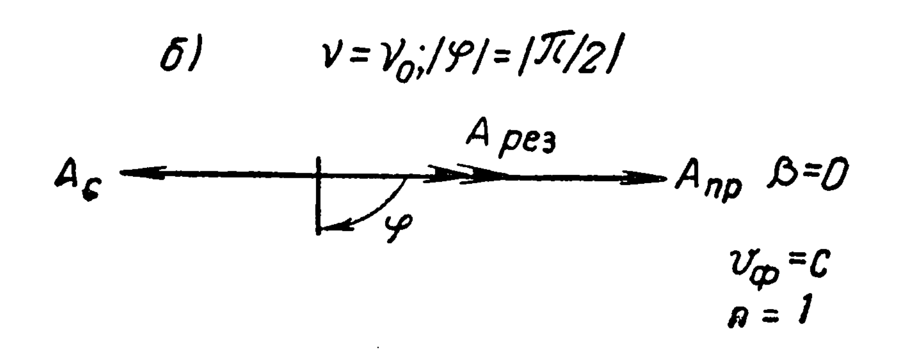
Лекция 52

ДИСПЕРСИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Термин «дисперсия» в отношении электромагнитных излучений обычно понимается в смысле спектрального (по частотам или длинам волн) разложения смешанного квантового излучения на его составляющие. Причиной такого разложения является различие в скоро-

стях распространения фазы электромагнитных колебаний в разных средах. Так как показателем преломления волн n называют отношение фазовых скоростей распространения колебаний в вакууме и в данной среде, то $n = \frac{c}{v_ф}$ является и показателем дисперсии, поскольку $v_ф = f(\nu) = \varphi(\lambda)$.





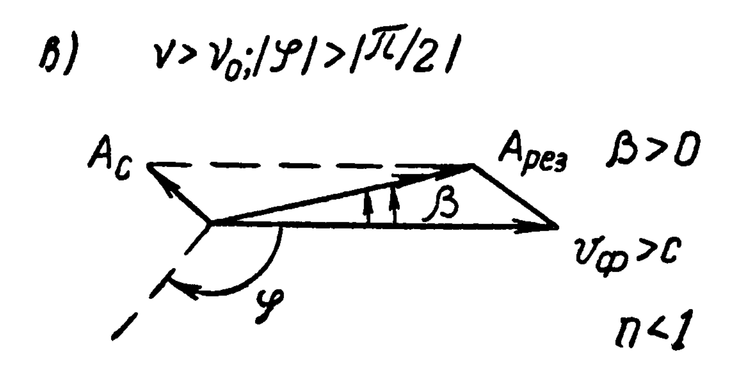


Рис. 52-1. Векторная интерпретация дисперсии излучений: а) случай радиоволн (ν — частота проходящей волны; ν_0 — частота собственного излучения осциллятора; φ — сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к проходящей волне; β — сдвиг фазы результирующей волны по отношению к проходящей); слабое поглощение; *б*) случай оптического резонанса ($n = \frac{c}{v_{ср}}$ — показатель преломления излучения); сильное псевдопоглощение; *в*) случай рентгеновского излучения; слабое поглощение

Зависимость показателя преломления волн, переносимых излучением, от частоты колебаний или от длины волны излучения в вакууме (для вакуума $\nu\lambda = c$) объясняется наличием сдвига фазы вынужденных колебаний относительно вынуждающей силы при различных ее частотах.

Под действием переменного электромагнитного поля проходящей волны электроны атомов и молекул среды совершают вынужденные колебания той же частоты, что и частота вынуждающей силы. Сдвиг фазы этих колебаний зависит (см. рис. 10-9) от того, насколько циклическая частота ω колебаний проникающей волны электрического поля $E = E_m \cdot \sin \omega t$ близка к резонансной циклической частоте колебаний осциллятора данного типа ($\omega_{o,i} = 2\pi\nu_{o,i}$). Колеблющиеся электроны, в свою очередь, являются излучателями электромагнитных волн той же частоты, что и проходящая волна. Эти вторичные глобальные волны образуют в направлении проходящей волны некоторую синтетическую волну, накладывающуюся на проходящую и сдвинутую по фазе относительно колебаний электронов на угол $\pi/2$ (среднее значение возможных сдвигов фаз вторичных волн). Результирующая волна будет отставать по фазе от проходящей волны во всех случаях, когда $\nu < \nu_{o,i}$, и опережать при $\nu > \nu_{o,i}$ (рис. 52-1). Этот сдвиг фазы результирующей волны определяет фазовую скорость распространения излучения в среде. Таким образом, $n = n(\nu)$, причем $n \gtrless 1$. Векторная интерпретация дисперсии, как и ее теория, базируется на представлении о волно-

вых процессах, которые характерны для совокупности микрообъектов, что, однако, не противоречит квантовым представлениям об излучениях. Электромагнитная волна соответствует пространственно-временному статистическому отображению явлений, протекающих в потоке фотонов, или квантов энергии излучений ($h\nu$). Кванты излучений существуют только в поступательном движении, происходящем только со скоростью c, но фазовые соотношения, которые определяют их взаимодействие с элементами среды, описываются с помощью волнового процесса, макроскопически представляющего собою электромагнитную волну.

Используя закон Максвелла, по которому $v_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, и рассматривая область спектра электромагнитных излучений, для которой $\mu = 1$ во всех средах (ультракороткие радиоволны, оптическая область и область ионизирующих излучений), имеем

$$n^2 = \left(\frac{c}{v_ф}\right)^2 = \varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa = 1 + 4\pi\frac{P}{E}, \qquad (52,1)$$

где P — вектор динамической поляризации вещества среды.

Если проходящей волной в веществе диэлектрика создается r различных типов осцилляторов с объемной концентрацией их $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_r$, то

$$P = \sum_1^r N_i e \varkappa_i,$$

где, согласно (10,22) и (26,13),

$$\varkappa_i = \frac{e}{m} \cdot E_i \frac{1}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2}, \qquad (52,2)$$

поскольку затухание колебаний электронов пренебрежимо мало ($\alpha \to 0$). Таким образом, вводя обозначение $4\pi\frac{e^2}{m} = B$, получаем

$$n^2 = 1 + B\sum_1^r N_i \frac{1}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2}. \qquad (52,3)$$

Во многих случаях качество излучения удобно выражать через длину волны излучения в вакууме $\left(\lambda = \frac{c}{\nu}\right)$. Подставив в (52,3) значение $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$, представим дисперсионную формулу в виде

$$n^2 = 1 + D_1\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0,1}^2} + \ldots + D_i\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0,i}^2} + \ldots$$
$$\ldots + D_r\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0,r}^2}, \qquad (52,4)$$

(формула Зельмейера), где λ — длина проходящей волны в вакууме; $\lambda_{0,1} < \lambda_{0,i} < \ldots < \lambda_{0,r}$ — резонансные длины волн активированных в среде осцилляторов, дисперсионные коэффициенты

$$D_i = \frac{e^2}{\pi m c^2} N_i \lambda_{0,i}^2 \ll 1. \quad (52,5)$$

Для вакуума $N_i = 0$, следовательно, $n = 1$ для всех длин волн, т. е. дисперсия отсутствует и фазовая скорость распространения электромагнитных волн равна групповой ($c = 3 \cdot 10^{10}$ *см* $\cdot$ *сек*$^{-1}$).

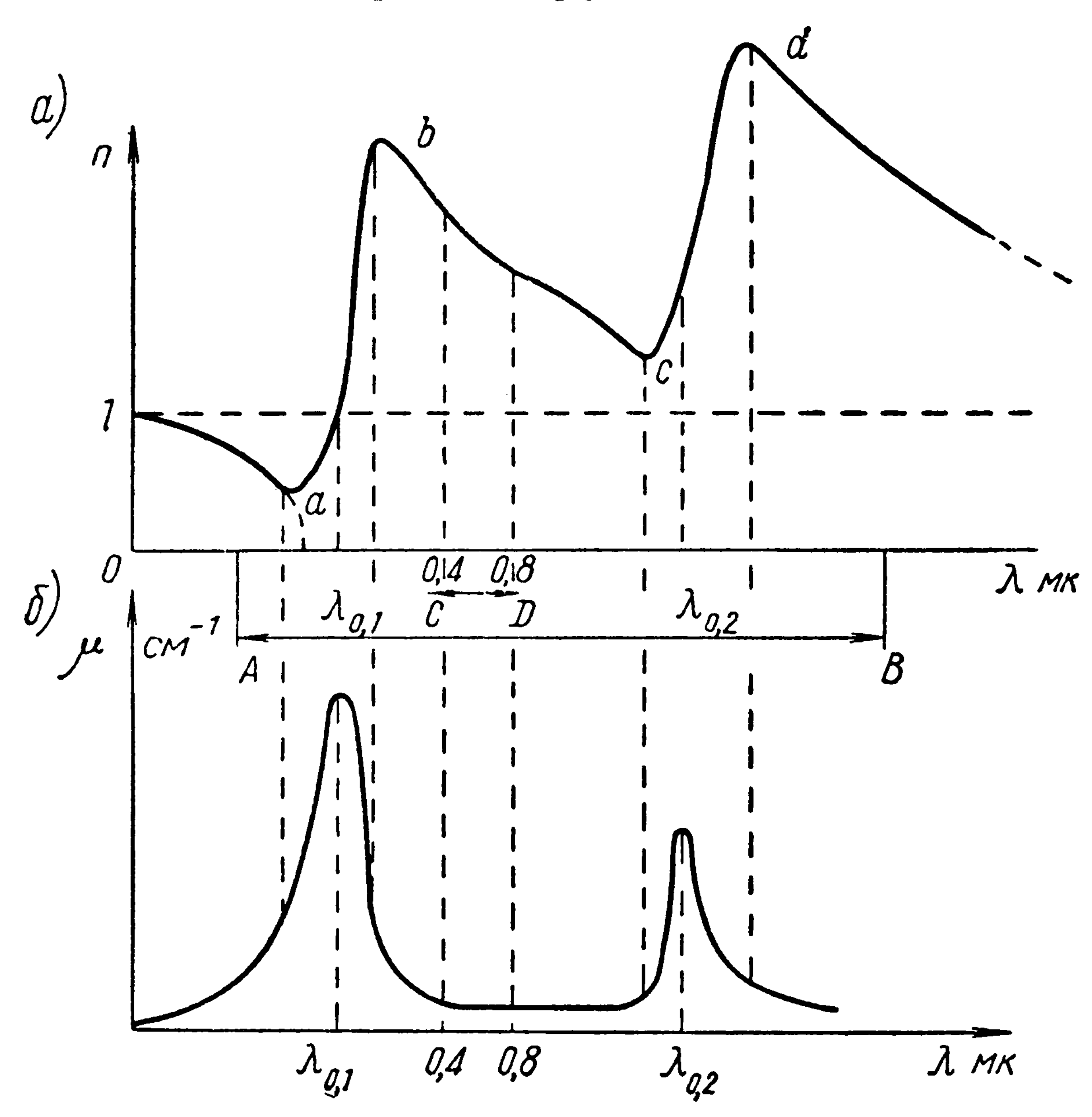


Рис. 52-2. *а*) Зависимость $n = n(\lambda)$ с учетом затухания колебаний электронов ($\lambda_{0,1}$; $\lambda_{0,2}$ — характеристические резонансные длины волн; AB — оптическая область спектра, CD — видимая область спектра для прозрачных тел; *б*) резонансное селективное псевдопоглощение для прозрачных сред (μ — линейный коэффициент ослабления излучения)

В среде, содержащей атомы, при $\lambda \ll \lambda_{0,i}$ (области рентгеновского и гамма-излучений) все дисперсионные слагаемые (52,4) оказываются малыми отрицательными величинами, так что для этих излучений $n \leqslant 1$, причем приближенно можно считать, что

$$1 - n \approx 10^{-6}.$$

При возрастании длины волны в области излучений, для которых $\lambda < \lambda_{0,i}$ (мягкие рентгеновские и ультрафиолетовые излучения), знаменатели дисперсионных слагаемых по своей абсолютной величине убывают и, следовательно, $n < 1$ (рис. 52-2), причем для

рассматриваемой области решающее значение имеет первое слагаемое, поскольку $\lambda_{0,1} < \lambda_{0,2} < ... < \lambda_{0,r}$.

Если $\lambda \approx \lambda_{0,1} \cdot (D_1 + 1)^{-\frac{1}{2}}$, то по формуле (52,4) $n = 0$.

Такой результат получается вследствие пренебрежения затуханием вынужденных колебаний электронов, которое происходит как вследствие передачи энергии колеблющимися электронами атомам среды, так и вследствие излучения ими энергии. Практически наблюдается не разрыв, а скачок в изменении показателя преломления излучений (оптический резонанс на первом типе осцилляторов). Для области $\lambda_{0,1} < \lambda < \lambda_{0,2}$ (оптическая область спектра, состоящая из ультрафиолетовых, видимых и инфракрасных лучей) $n > 1$, причем по мере возрастания длины волны вплоть до $\lambda \approx \lambda_{0,2} \cdot (D_2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ показатель преломления монотонно убывает (нормальная дисперсия, рис. 52-2, *а*).

Скачки в изменениях показателя преломления происходят на всех резонансных длинах волн, соответствующих порядковым номерам характеристических длин волн $\lambda_{0,i}$ от $i = 1$ до $i = r$, но показатель преломления имеет значение $n < 1$ только для области $\lambda < \lambda_{0,1}$ (см. рис. 52-2, *а*). Все диэлектрические вещества имеют полосы аномальной дисперсии. Среды, прозрачные для видимых лучей, имеют аномальную дисперсию в области ультрафиолетовых и инфракрасных лучей. Для радиоволн $\lambda \gg \lambda_{0,r}$ показатель преломления $n = \sqrt{1 + \sum_{1}^{r} D_i} \geq 1$.

Аномальная дисперсия, т. е. возрастание показателя преломления с увеличением длины волны, связана с оптическим резонансом и, следовательно, с селективным ослаблением проходящей волны (рис. 52-2, *б*). Однако это ослабление не является истинным поглощением излучения, под которым подразумевается преобразование квантов энергии излучения в иную форму, а представляет собой псевдопоглощение, или селективное резонансное рассеяние излучения (изменение направления движения фотонов без изменения их качества).

В металлах из-за наличия в них свободных электронов электромагнитные волны не только претерпевают отражение, но и сильное поглощение вблизи самой поверхности металла, так что проникновение волн сквозь вещество практически имеет значение для колебаний очень высоких частот (области рентгеновского и гамма-излучений), когда $n \approx 1$.

КВАНТОВЫЕ РАДИАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

*Лекция 53**

СПЛОШНОЙ СПЕКТР ТЕМПЕРАТУРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Во всяком веществе при $T > 0°$ K происходят столкновения атомов и молекул, в результате чего возникают их возбужденные состояния. Чем больше плотность вещества и выше его температура, тем интенсивнее электромагнитное излучение, которое, согласно (42,18), будет испускаться веществом во всех направлениях. Различным частотам ν_i возникающих колебаний соответствуют различные кванты излучаемой и поглощаемой энергии. Любое тело, таким образом, является как излучателем (радиатором), так и поглотителем (абсорбентом) электромагнитной энергии. Тело, которое при заданной температуре полностью поглощает без отражения и без рассеяния все излучения оптического диапазона спектра (инфракрасное излучение, видимый свет и ультрафиолетовые лучи, т. е. излучения с квантами энергии от $h\nu = 4 \cdot 10^{-3}$ *эв* до 10^2 *эв*), называют абсолютно черным телом. Если поглощение происходит не полностью, но в равной мере для любого излучения в упомянутом интервале спектра, то тело будет серым поглотителем; в иных случаях оно является селективным поглотителем излучения.

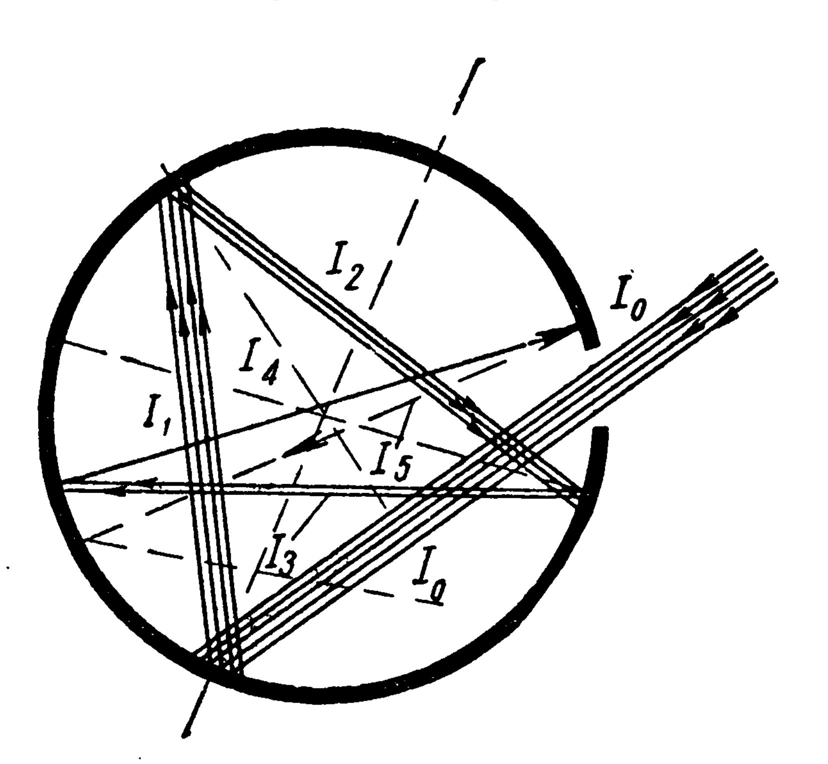


Рис. 53-1. Абсолютно черное тело в форме сферической полости с отражающими стенками равной температуры

В качестве абсолютно черного тела можно рассматривать, например, узкое отверстие в замкнутой полости с отражающими стен-

* В лекциях 53—71 буквой I обозначается интенсивность излучения, буквой i — сила тока.

ками, имеющими одинаковую температуру (рис. 53-1). Излучение, проникшее в эту полость, после многократных отражений заполняет всю полость, имея малую вероятность покинуть ее (полностью поглощается). Радиационное температурное равновесие для абсолютно черного излучателя наступит в том случае, когда для каждого из множества вибраторов, образованных излучением в стенках полости, наступит радиационное равновесие, т. е. равенство излучаемой и поглощаемой им за единицу времени энергии излучения. Это утверждение выражает радиационный закон Кирхгофа. Лучеиспусканием называют поверхностную плотность в области частоты ν при температуре T энергии квазиоднородного излучения $\varepsilon_{\nu,\,T}$, приходящуюся на узкий интервал частот $d\nu$, а лучепоглощением — отношение поглощаемой телом за единицу времени энергии излучения к падающему потоку излучения той же спектральной области (спектральный коэффициент поглощения $a_{\nu,\,T}$).

Обе величины являются функциями частоты ν и температуры T:

$$\varepsilon = \varepsilon(\nu, T) \text{ и } a = a(\nu, T).$$

Исключение составляет черное тело, для которого по определению $a = a_0 = 1$ при всех частотах оптического диапазона спектра и всех температурах.

Если в излучающей полости абсолютно черного тела при температуре T элемент отражающей внутренней поверхности $d\sigma$ заменить черной поверхностью, то испускаемая им за некоторое время энергия излучения частоты ν будет равна $(\varepsilon_{\nu,T})_0 = dW_a$. Любой другой такой же элемент внутренней поверхности абсолютно черной полости за то же время излучает

$$dW = \varepsilon_{\nu,\,T}\, d\sigma.$$

Для радиационного равновесия необходимо выполнение условия

$$dW_a = dW = a_{\nu,\,T} \cdot dW_0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_{\nu,\,T}\, d\sigma = a_{\nu,\,T}\,(\varepsilon_{\nu,\,T})\, d\sigma.$$

Таким образом,

$$\frac{\varepsilon_{\nu,\,T}}{a_{\nu,\,T}} = (\varepsilon_{\nu,\,T})_0 = f(\nu,\ T). \tag{53,1}$$

Это означает, что отношение лучеиспускания тела к его лучепоглощению относительно тех же лучей при той же температуре не зависит от вещества тела и равно лучеиспусканию абсолютно черного тела в той же спектральной области и при той же температуре (радиационный закон Кирхгофа). Радиационное соотношение температурного лучеиспускания $\frac{\varepsilon}{a}$ зависит, таким образом, только от температуры излучателя T и частоты колебаний ν (квантов энергии излучения $h\nu$). Вещество, которое при данной температуре больше поглощает данное излучение, больше его и испускает при тех же условиях. Прозрачное для оптического излучения вещество малой плотности, например инертный газ без примесей, температурно

почти не излучает энергии. Абсолютно черное тело в любом интервале частот оптической области спектра излучает энергии больше, чем любое другое тело или вещество, поэтому и называется полным излучателем. Законы температурного излучения относятся к спектру, испускаемому полным излучателем.

Изотропный точечный температурный радиатор излучает энергию электромагнитных колебаний равномерно во все стороны. Это не означает, что распространение излучения во всех направлениях от источника будет одинаково. Сплошной спектр любого смешанного излучения определяется частотной характеристикой, т. е. спектральным распределением интенсивности излучения по частотам или длинам волн. Интенсивностью излучения называют электромагнитную мощность, отнесенную к единице поверхности нормально расположенной по отношению к направлению распространения излучения. Если интенсивность направленного излучения обозначить через I, то спектральная плотность излучения

$$Y_\nu = \frac{dI}{d\nu}\left(\frac{эрг}{см^2}\right), \qquad (53,2)$$

где dI — интенсивность излучения частотного интервала спектра между ν и $(\nu + d\nu)$.

Спектральная плотность температурного излучения полного излучателя выражается формулой

$$Y_\nu = \varphi(\nu,\ T),$$

выведенной М. Планком (1900 г.) с помощью квантовых представлений о механизмах испускания и поглощения электромагнитных излучений атомами и молекулами вещества. Позднее эта же формула была выведена на основе квантовой статистики фотонов (статистики Бозе—Эйнштейна). Согласно концепции Планка, поле температурного излучения полного излучателя может рассматриваться как однородное поле равновесного излучения, создаваемое множеством линейных гармонических осцилляторов (колебательных систем) с различными частотами собственных колебаний. Площадь, которую охватывают колебания осциллятора частоты ν за каждый период колебания τ и которая определяет спектральную плотность излучения в интервале частот между ν и $(\nu + d\nu)$, будет равна

$$S_\nu = (c\tau)^2 = \left(\frac{c}{\nu}\right)^2.$$

Если $\bar{\varepsilon}$ будет представлять среднюю колебательную энергию осцилляторов, то поверхностная плотность колебательной энергии

$$\sigma_\nu = \frac{\nu^2}{c^2}\bar{\varepsilon}.$$

В равномерном поле излучения на область частоты ν по аналогии с (27,4) приходится спектральная плотность излучения

$$Y_\nu = \frac{dI}{d\nu} = 2\pi\sigma_\nu = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2\bar{\varepsilon}. \qquad (53,3)$$

Из выражения (53,3) видно, что спектральная плотность излучения зависит не только от квадрата частоты колебаний осциллятора, но и от значения функции $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\nu, T)$, выражающей среднюю энергию осциллятора для данной частоты колебаний при данной температуре полного излучателя. Если для определения $\bar{\varepsilon}$ воспользоваться классической статистикой (статистика Больцмана —Максвелла), по которой энергия колебаний осцилляторов любых частот ν может иметь любые значения ε и присутствует в равновесном излучении с вероятностью, равной

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = e^{-\beta\varepsilon},$$

где $\beta = \frac{1}{kT}$, то, согласно (18,4),

$$\bar{\varepsilon} = kT. \qquad (53,4)$$

Таким образом, средняя энергия вибратора по классической статистике не зависит от частоты, а является функцией только температуры, и, значит, спектральная плотность излучения при заданной температуре излучателя пропорциональна ν^2, что противоречит экспериментальным данным. В соответствии с (53,4), но в противоречии с опытом, функция распределения интенсивности по частотному спектру Y_ν при какой-либо заданной температуре T излучателя не должна иметь экстремума, а интегральная интенсивность всего спектра в границах от $\nu = 0$ до $\nu = \infty$ была бы равна бесконечности. Между тем опыт показывает, что интегральная интенсивность спектра конечна и распределение интенсивности по частотному спектру Y_ν имеет максимум, приходящийся на частоту тем большую, чем выше температура излучателя (рис. 53-2, *а*).

Таким образом, классическая статистика в применении к излучающим осцилляторам оказалась недостаточной. Для согласования теоретических и экспериментальных результатов необходимо среднюю энергию осциллятора $\bar{\varepsilon}$ принять зависящей не только от температуры, но и от частоты колебаний, поэтому по формуле (53,3) будем иметь

$$Y_\nu = \frac{2\pi}{c^2} \cdot \nu^2 \cdot \varepsilon(\nu, T). \qquad (53,5)$$

Правильный, соответствующий экспериментам вид функции $\varepsilon = \varepsilon(\nu, T)$ был найден Планком путем введения квантовых соотношений для испускания и поглощения энергии осцилляторами. Согласно Планку, осциллятор частоты ν может поглощать или излучать энергию только квантами ($\varepsilon_0 = h\nu$). Следовательно, энергия колебаний осциллятора частоты ν должна составлять

$$\varepsilon = nh\nu, \qquad (53,6)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

В таком случае при исчислении среднего взвешенного значения $\bar{\varepsilon}$ вместо интегрирования должно быть применено суммирование и, значит, согласно (18,6),

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \qquad (53,7)$$

Так как

$$\varepsilon_0 = h\nu, \qquad (53,8)$$

то

$$Y_\nu = \frac{2\pi}{c^2} h\nu^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}, \qquad (53,9)$$

что и представляет собой формулу Планка. Результат будет тот же, если рассматривать излучение как совокупность фотонов (ансамбль

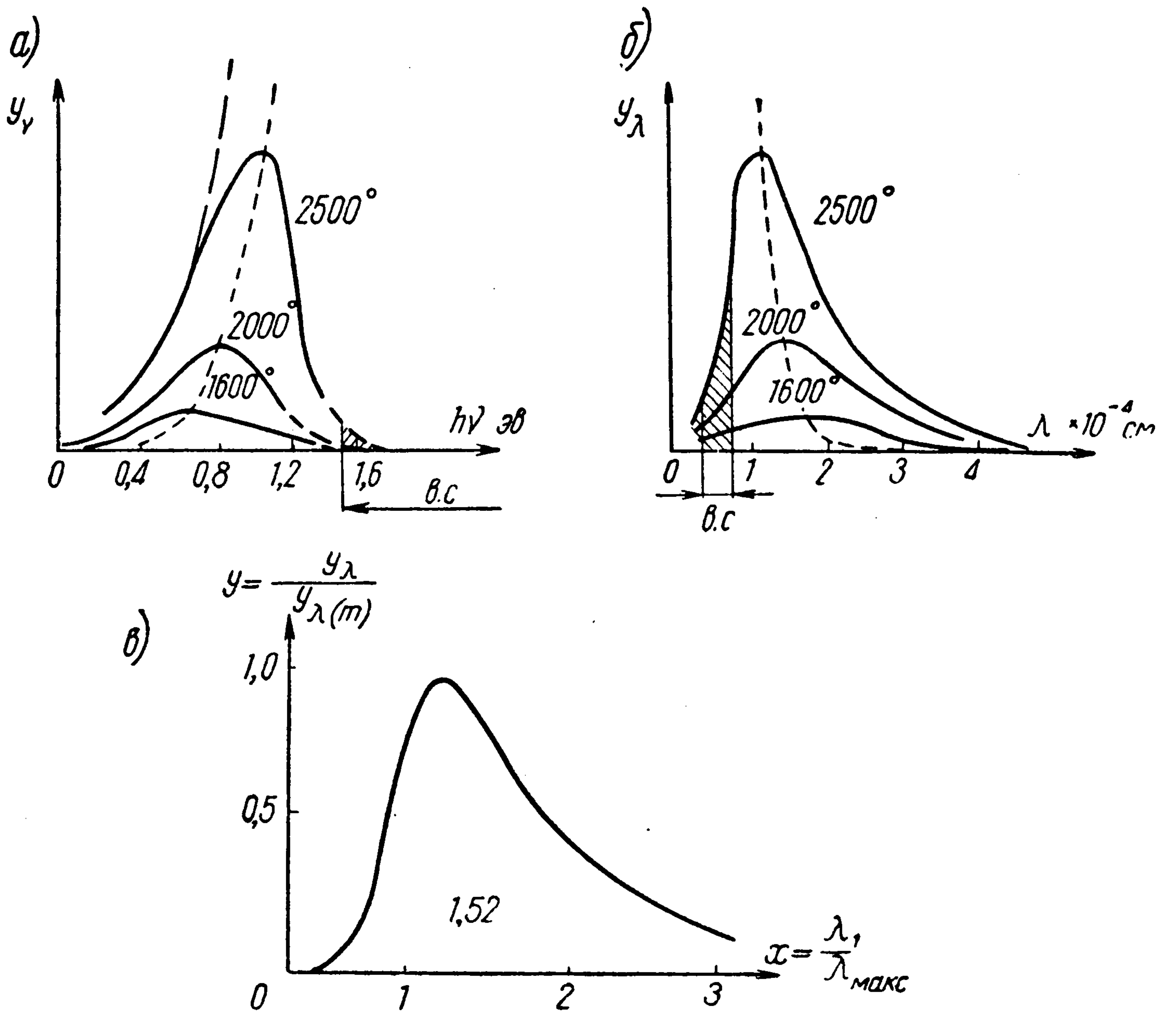


Рис. 53-2. Распределение спектральной плотности излучения в температурном спектре:

а) по частотам (точечным пунктиром показано изменение $(Y_\nu)_m = f(h\nu)$; *б*) по длинам волн; *в*) инвариантная кривая распределения

световых частиц) и применить к нему квантовую статистику, по которой число частиц в единице объема, энергия которых заключена между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, составляет

$$dn_\varepsilon = F(\varepsilon) \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot d\varepsilon. \qquad (53,10)$$

Здесь $F(\varepsilon)$ — характеристическая функция ансамбля. Для фотонов, т. е. для непостоянного числа частиц, неразличимых и не взаимодействующих, обладающих различными энергиями, согласно статистике Бозе—Эйнштейна, имеем:

$$F(\varepsilon) = \frac{8\pi}{h^3} m^{3/2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}, \qquad (53,11)$$

где m — масса фотона, $\beta = \frac{1}{kT}$. Согласно (53,10), концентрация частиц будет

$$dn_\varepsilon = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon, \qquad (53,12)$$

а объемная плотность энергии излучения для избранного интервала значений ε составит

$$dw_\varepsilon = \bar{\varepsilon} dn_\varepsilon = dw_\nu, \qquad (53,13)$$

причем $h\nu = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} = mc^2$.

Интенсивность излучения в заданном интервале энергии фотонов и объемная плотность энергии излучения при учете поляризации ($^1/_2\ I$) и направления лучеиспускания в полном излучателе (см. рис. 53-1) ($^1/_2\ I$) связаны соотношением:

$$dI = \frac{c}{4} dw_\nu,$$

поэтому

$$Y_\nu = \frac{dI}{d\nu} = \frac{c}{4}\frac{dw_\nu}{d\nu} = \frac{c}{4} U_\nu. \qquad (53,14)$$

Таким образом, распределение интенсивности по частотам выражается такой же закономерностью, что и распределение объемной плотности энергии излучения по частотам.

Подставляя в (53,14) значение dw_ν из (53,13), а значение dn_ε из (53,12) и учитывая, что $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} = c\sqrt{m}$, получаем (рис. 53-2, *а*):

$$Y_\nu = \frac{c}{4} h\nu \frac{8\pi}{h^3} c \frac{h^2\nu^2}{c^4} \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi}{c^2} h\nu^3 (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}, \qquad (53,9')$$

т. е. ту же формулу для спектрального распределения излучения по Планку [см. (53,9)]. В вакууме $\lambda\nu = c$, поэтому для наглядности часто рассматривается распределение интенсивности в спектре не по частотам, а по длинам волн $\lambda = \frac{c}{\nu}$ излучения в вакууме. При этом должно быть выполнено условие:

$$dI = Y_\nu \cdot d\nu = -Y_\lambda \cdot d\lambda, \qquad (53,15)$$

и, значит,

$$Y_\lambda = -Y_\nu \frac{d\nu}{a\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} Y_\nu. \qquad (53,16)$$

Таким образом, формула Планка принимает вид (рис. 53-2, *б*)

$$Y_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{c^3}{\lambda^3} \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} = C_1 \lambda^{-5} \left(e^{C_2 \cdot \frac{1}{\lambda T}} - 1\right)^{-1} =$$

$$= \frac{C_1}{\lambda^5} F\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right), \qquad (53,17)$$

где $C_1 = 2\pi hc^2 = 3{,}74 \cdot 10^{-5}$ *эрг* $\cdot$ *см*$^2 \cdot$ *сек*$^{-1}$ $= 3{,}74 \cdot 10^{-16}$ *дж* $\times$ $\times$ *м*$^2 \cdot$ *сек*$^{-1}$; $C_2 = 1{,}43$ *см* $\cdot$ *град* $= 1{,}43 \cdot 10^{-2}$ *м* $\cdot$ *град*.

С повышением температуры интегральная интенсивность излучения (площадь графика на рис. 53-2, *б*) круто возрастает, причем максимум спектральной плотности излучения смещается в сторону коротких волн.

Из формулы Планка для спектрального распределения интенсивности излучения вытекают два опытных закона температурного излучения. Полагая для нахождения максимума $\frac{dY_\lambda}{d\lambda} = 0$, получаем

$$\frac{C_2}{\lambda T} F'\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) + 5 \cdot F\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) = 0. \qquad (53,18)$$

Решение этого трансцендентного уравнения будет иметь вид

$$\frac{C_2}{\lambda_{(m)} \cdot T} = 4{,}965$$

или

$$\lambda_{(m)} \cdot T = 0{,}2896 \text{ см} \cdot \text{град} \qquad (53,19)$$

— закон Вина.

Вместе с тем, полагая $\frac{2\pi h}{c^2} = g$, находим, согласно (53,3) и (53,9), что интегральная интенсивность излучения

$$I = \int_0^\infty Y_\nu \, d\nu = g \int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \qquad (53,20)$$

Вводя новую переменную $x = \frac{\nu}{T}$ (так что $d\nu = T dx$), получаем

$$I = gT^4 \int_0^\infty x^3 F(x)\, dx = \sigma T^4 \qquad (53,21)$$

— закон Стефана—Больцмана, поскольку определенный интеграл не зависит от T и представляет собой некоторую постоянную величину ($\sigma = 5{,}66 \cdot 10^{-5}$ *эрг* $\cdot$ *см*$^{-2}$ *сек*$^{-1} \cdot$ *град*$^{-4}$ $= 5{,}66 \cdot 10^{-8}$ *дж* $\times$ $\times$ *м*$^{-2}$ *сек*$^{-1} \cdot$ *град*$^{-4}$).

Из полученных соотношений вытекает, что для возбуждения излучений ультракоротковолновой области спектра ($\lambda \geqslant 300$ *мк*) достаточны температуры излучателей в десятки градусов, но интегральная интенсивность излучения будет при этом очень мала (см. 53,21), для оптической области спектра ($\lambda = 10$ *ммк* $\div$ 350 *мк*) необходимы температуры в сотни и тысячи градусов, причем инте-

гральная интенсивность спектра излучения круто возрастает; наконец, для области ионизирующих излучений (рентгеновское и гамма-излучение), т. е. для $\lambda = (100 \div 0{,}01)$ Å, необходимы температуры в миллионы и десятки миллионов градусов. Такие температуры в земных условиях возможны лишь в недрах атомных ядер. Пользуясь законом Вина (53,19), можно построить единую для всех температур кривую распределения интенсивности излучения по спектру (рис. 53-2, *в*). Полагая

$$x = \frac{\lambda}{\lambda_{(m)}} \quad \text{и} \quad y = \frac{Y_\lambda}{Y_{\lambda_m}},$$

из (53,17) получаем

$$y = ax^{-5}\left(e^{\frac{b}{x}} - 1\right)^{-1}. \qquad (53,22)$$

Здесь $a = \left(e^{\frac{C_2}{0{,}29}} - 1\right) = 142{,}32$ и $b = \frac{C_2}{0{,}29} = 4{,}965$, так что

$$y = 142{,}32 \cdot x^{-5}\left(e^{\frac{4{,}965}{x}} - 1\right)^{-1}. \qquad (53,23)$$

Максимуму соответствуют значения $x_{(m)} = 1$ и $y_{(m)} = 1$. Интегральная интенсивность всего спектра в относительных единицах, выражаемая площадью графика, составит $\int\limits_0^\infty y dx = 1{,}521$ вне зависимости от температуры излучателя. В соответствии с законом Вина и формулой Планка возрастание температуры излучателя вызывает не только смещение максимума в спектре, но и резкое возрастание спектральной плотности излучения для $\lambda_{(m)}$, а именно: $Y_{\lambda_{(m)}} \sim T^5$.

Энергетический выход видимой части спектра

$$\eta_э = \frac{\int\limits_{0,4}^{0,8} Y_\lambda \cdot d\lambda}{\int\limits_0^\infty Y_\lambda \cdot d\lambda};$$

он будет достигать своего максимального значения при температуре полного излучателя, соответствующей значению $\lambda_m = 0{,}4$ *мк* ($T \approx 7000°$ K). Примерно на ту же область температур приходится максимум светового к. п. д.:

$$\eta_c = \frac{\int\limits_{0,4}^{0,8} V_\lambda Y_\lambda \, d\lambda}{\int\limits_{0,4}^{0,8} Y_\lambda \, d\lambda},$$

где V_λ — функция видности (рис. 53-3).

Металлы, используемые обычно в качестве накаливаемого тела, являются селективными излучателями, почему радиационные соот-

ношения, установленные для полного излучателя (формула Планка), должны быть снабжены поправочным коэффициентом излучения ψ, зависящим от длины волны и температуры. Для вольфрама, например, при $T = 3000°$ К значение этого коэффициента в области видимого излучения $\lambda = 0,4 \div 0,8$ *мк* изменяется соответственно от $\psi_{0,4} = 0,46$ до $\psi_{0,8} = 0,40$.

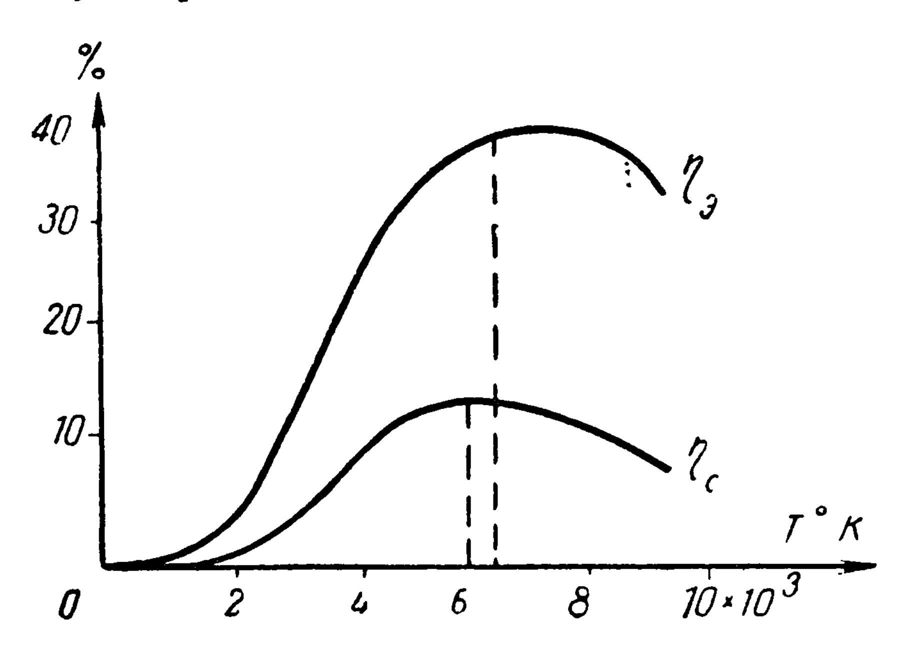


Рис. 53-3. Зависимость энергетического ($\eta_э$) и светового (η_c) выходов видимого излучения от температуры полного излучателя

Радиационный коэффициент интегральной интенсивности излучения (закон Стефана — Больцмана) при температуре $T = 3000°$ К для вольфрама равен $i_{3000} = \frac{I_{ист}}{I} = 0,33$.

Законы температурного излучения находят важное применение при измерениях высоких температур ($T > 2000°$ К) удаленных источников. Селективность лучеиспускания и лучепоглощения различных источников и сред не позволяет определять истинную температуру удаленного источника с помощью спектра его лучеиспускания. Существуют три оптических способа измерений температуры удаленных раскаленных тел.

Принцип действия радиационного пирометра (рис. 53-4) основан на законе интегрального излучения Стефана—Больцмана. Прибор

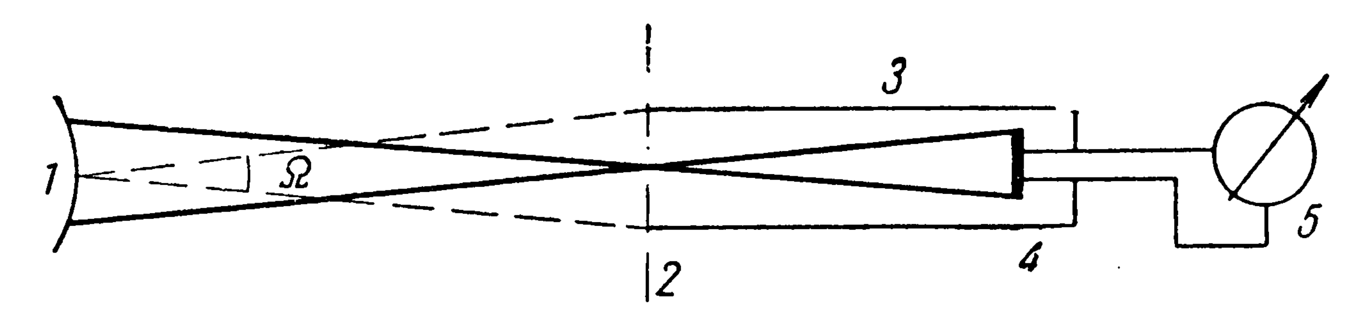


Рис. 53-4. Схема радиационного пирометра:

1 — удаленная излучающая поверхность; *2* — объектив телескопа; *3* — корпус телескопного тубуса; *4* — черный поглотитель с рабочим спаем термопары; *5* — градуированный индикатор термоэлектрического эффекта облучения

градуируется по излучению черного тела. Если радиационный коэффициент для исследуемого излучателя будет равен i, то истинная температура источника, согласно закону Стефана—Больцмана, будет $T = \frac{T_{рад}}{\sqrt[4]{i}}$. Так как $i < 1$, то радиационная температура $T_{рад}$ всегда несколько меньше истинной T.

Спектральный пирометр позволяет установить λ_m в сплошном спектре лучеиспускания и, значит, в соответствии с законом Вина

цветовую температуру тела $T_ц$ (рис. 53-5). Цветовая температура приближенно является той температурой полного излучателя, при которой красно-синее соотношение $Y_{0,66}$ и $Y_{0,47}$ равно такому же соотношению в спектре излучения тела при его истинной температуре T. Цветовая температура несколько превышает истинную (для вольфрама примерно на $2 \div 3\%$). Фотометрический способ применяется в яркостных пирометрах (рис. 53-6). Накаливаемая угольная нить пустотной лампы рассматривается на фоне экрана, освещаемого фильтрованным ($\lambda = 0{,}66$ *мк*) излучением источника. Равенство ярко-

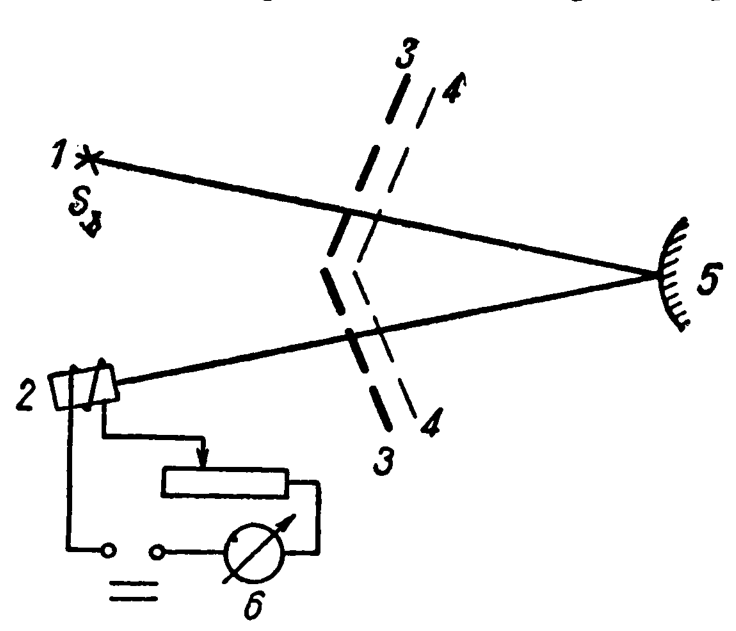


Рис. 53-5. Схема измерений цветовой температуры источника излучения:

1 — источник; *2* — образцовый излучатель; *3-3* — регулируемые диафрагмы; *4—4* — фокусировочные линзы; *5* — экран сличения цветов; *6*—индикатор цветной температуры

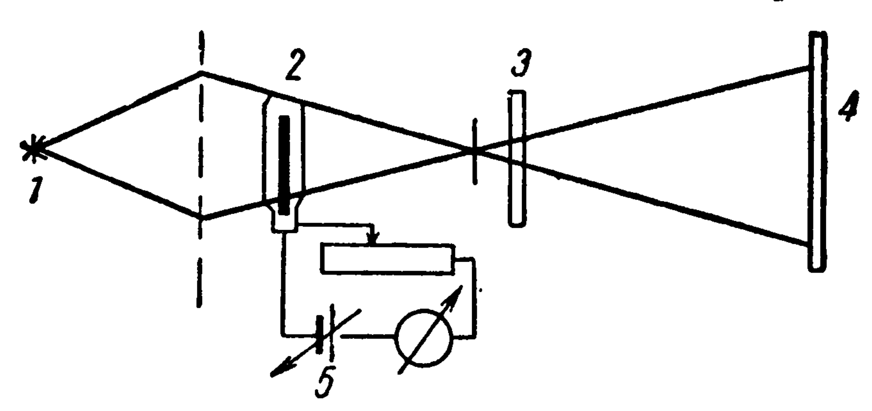


Рис. 53-6. Схема яркостного пирометра:
1 — удаленный источник излучения; *2* — лампа с нитью яркостного сравнения; *3* — красный светофильтр ($\lambda = 0{,}66$ *мк*); *4* — экран сличения яркости; *5* — источник тока; *6* — предварительно отградуированный индикатор яркостной температуры

стей определяет яркостную температуру источника, т. е. температуру полного излучателя (по которому градуировался пирометр), имеющего для $\lambda = 0{,}66$ *мк* такую же яркость, как и излучающий источник. Яркостная температура всегда ниже истинной (для вольфрама примерно на 10%). Радиационные приемники, снабженные черными поглотителями, допускающими абсолютные измерения падающей радиации, называются актинометрами, а те из них, которые специально предназначены для измерений солнечной радиации, — пиргелиометрами. С их помощью установлена постоянная солнечной радиации, которая принята равной

$$2\,\frac{кал}{см^2 \cdot мин} = \frac{8{,}38 \cdot 10^4}{60}\,\frac{дж}{м^2\,сек} \approx 1{,}4 \cdot 10^3\,\frac{дж}{м^2\,сек}.$$

Лекция 54

НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР ТОРМОЖЕНИЯ ЗАРЯДОВ

Как отмечалось ранее (42,12), для поля в точке P (рис. 54-1), обусловленного продольным ускорением $\ddot{x}$ движущегося заряда e, имеем

$$E_{r,\theta} = H_{r,\theta} = \frac{e}{rc^2}\,\ddot{x}\sin\theta \qquad (54,1)$$

при $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$,

или при $\beta \leqslant 1$

$$E_{r,\theta} = H_{r,\theta} = \frac{e}{rc^2}\ddot{x}\frac{\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)^3}. \qquad (54,1')$$

В соответствии с (42,18) интенсивность излучения в точке P

$$I_{r,\theta} = \frac{c}{4\pi}E^2_{r,\theta} = \frac{e^2(\ddot{x})^2}{4\pi r^2c^3}\cdot\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}. \qquad (54,2)$$

Как видно, при одной и той же затормаживающей электрической силе $F_x = -m\ddot{x}_x = -eE_x$ отрицательное ускорение торможения и, следовательно, интенсивность испускаемого излучения будет тем больше, чем меньше масса затормаживаемой частицы. Полная энергия излучения за все время равномерного торможения заряда от $\beta = \frac{v}{c}$ до $\beta = 0$, приходящаяся на единицу поверхности в области точки P, или импульс облученности в области точки P, составит:

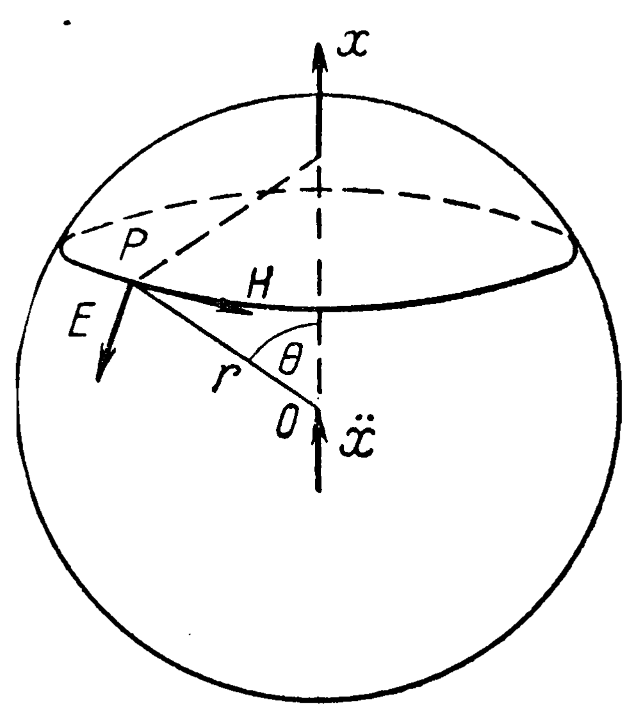


Рис. 54-1. Электромагнитное поле движущегося электрона

$$S_r = \int_0^\tau I_{r,\theta}\cdot dt. \qquad (54,3)$$

Так как электромагнитный импульс, возникший в момент t', достигнет точки P в момент $t = t' + \frac{r}{c}$, то $dt = dt' + \frac{dr}{c}$. Так как $dr = -vdt'\cos\theta = -c\beta dt'\cos\theta$ (см. рис. 54-1), то $dt = dt'(1-\beta\cos\theta)$ и поскольку $dt' = \frac{dv}{\ddot{x}} = \frac{c}{\ddot{x}}d\beta$, находим:

$$dt = \frac{c}{\ddot{x}}(1-\beta\cos\theta)\,d\beta. \qquad (54,4)$$

После подстановки $I_{r,\theta}$ из выражения (54,2) и значения dt из (54,4) в формулу (54,3) и последующего ее интегрирования в указанных границах изменения β получаем, что

$$S_{r,\theta} = \frac{e^2\ddot{x}}{16\pi r^2c^2}\frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4}-1\right]. \qquad (54,5)$$

Азимутальное распределение (54,5) импульса облученности $S_{r,\theta}$, возникающее при полном затормаживании в мишени отдельного электрона, или, иначе, пространственное распределение интенсивности излучения при ускорении торможения $\ddot{x}$ потока электронов в мишени показано на рис. 54-2 для $\beta = \frac{1}{10}$; $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{3}$. С возрастанием начальной скорости электронов максимум интенсивности испускаемого излучения все более смещается в направлении скорости движения электронов.

Непрерывный спектр торможения характерен для рентгеновского излучения, возникающего при торможении потока быстрых электронов (β-частиц), движущихся в поле атомных ядер вещества мишени. Если начальная кинетическая энергия электрона (β-частицы) до взаимодействия с ядром будет равна E, а после взаимодействия E', то по закону сохранения энергии в элементарном акте упругого взаимодействия

$$h\nu = E - E', \qquad (54,6)$$

где $h\nu$ — квант энергии испускаемого излучения. Так как при полном преобразовании кинетической энергии электрона в один квант энергии $E' = 0$, то наибольшее возможное значение излучаемого кванта энергии (квантовый предел спектра) будет

$$h\nu_0 = E = eU, \qquad (54,7)$$

где U — разность потенциалов, разгоняющая электрон. Из выражения (54,7) вытекает зависимость границы непрерывного рентгеновского спектра со стороны больших частот, или коротких длин волн, от разгоняющего напряжения. Очевидно,

$$\lambda_0 U = \frac{hc}{e} = \text{const}. \qquad (54,8)$$

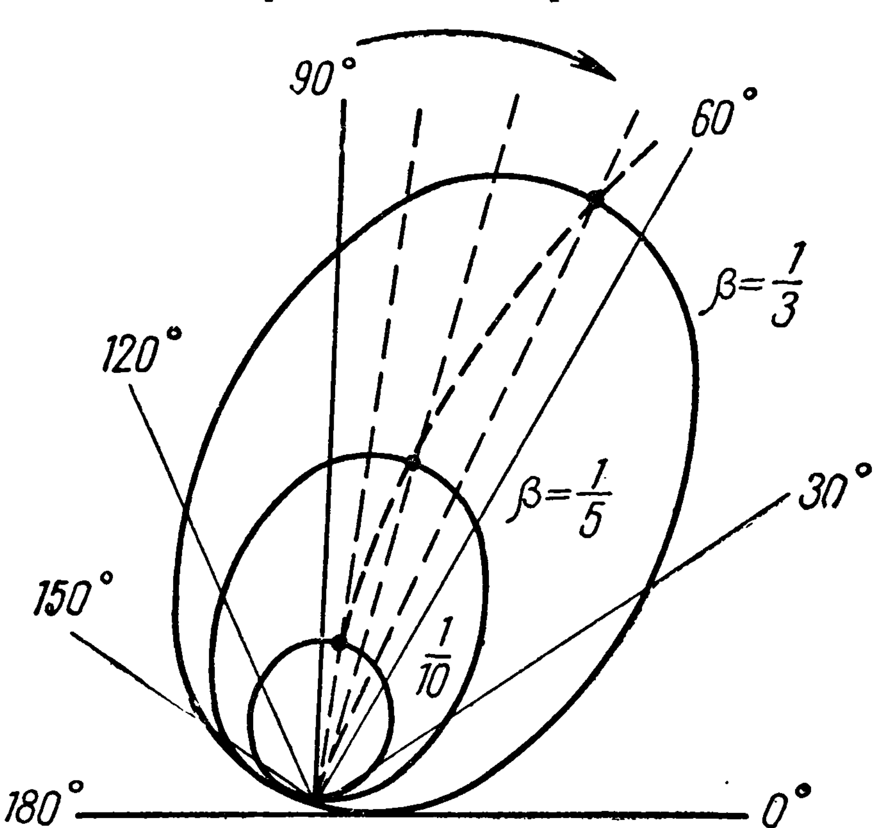


Рис. 54-2. Азимутальное распределение интенсивности рентгеновского излучения при различных значениях $\beta = \frac{v}{c}$ первичных электронов

Если λ_0 выражено в ангстремах, U — в киловольтах, то соотношение (54,8) принимает вид

$$\lambda_0 U = 12{,}35 \ (\text{Å} \cdot кв)$$

и носит название формулы Дюэна и Хента. Здесь λ_0 представляет собой граничную длину волны в спектре, U — максимальное значение напряжения генерирования излучения. По мере проникновения электронов внутрь мишени их энергия будет убывать, и, следовательно, для каждого последующего молекулярного слоя толстой мишени край возбуждаемого рентгеновского спектра будет смещаться соответственно формулам (54,7) или (54,8) (рис. 54-3). Вместе с тем вероятность q испускания того или иного кванта ($h\nu$) энергии в тонком слое мишени будет сохраняться неизменно, поэтому спектральная плотность тормозного излучения, возникающего в тонком слое dx, равна

$$dY_\nu = d\left(\frac{dI}{d\nu}\right) = \text{const} \cdot dx$$

и, соответственно (см. рис. 54-3),

$$dY_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} dY_\nu = \text{const} \cdot dx. \qquad (54{,}8')$$

Принимая закон убывания энергии электронов по глубине материала атомного номера Z в виде

$$E_0^2 - E_x^2 = bx,$$

где $b = b(\rho, Z)$ — характеристический коэффициент вещества мишени, путем интегрирования (54,8′) по толщине мишени x получаем приближенное выражение для спектральной плотности излучения в непрерывном рентгеновском спектре от толстой мишени (рис. 54-3, *а*) в виде

$$Y_\nu \approx AiZ[\nu_0 - \nu] \quad (54{,}9)$$

Если ток i выражать числом электронов, прибывающих в фокус мишени за единицу времени (1 *ма* соответствует $6{,}25 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$, то $A \approx 5 \cdot 10^{-50}$ (а. э. е.). Очевидно, по формуле (54,8′) (рис. 54-3, *б*)

$$Y_\lambda = \frac{c^2}{\lambda_0^2} AiZ \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda^3}. \quad (54{,}10)$$

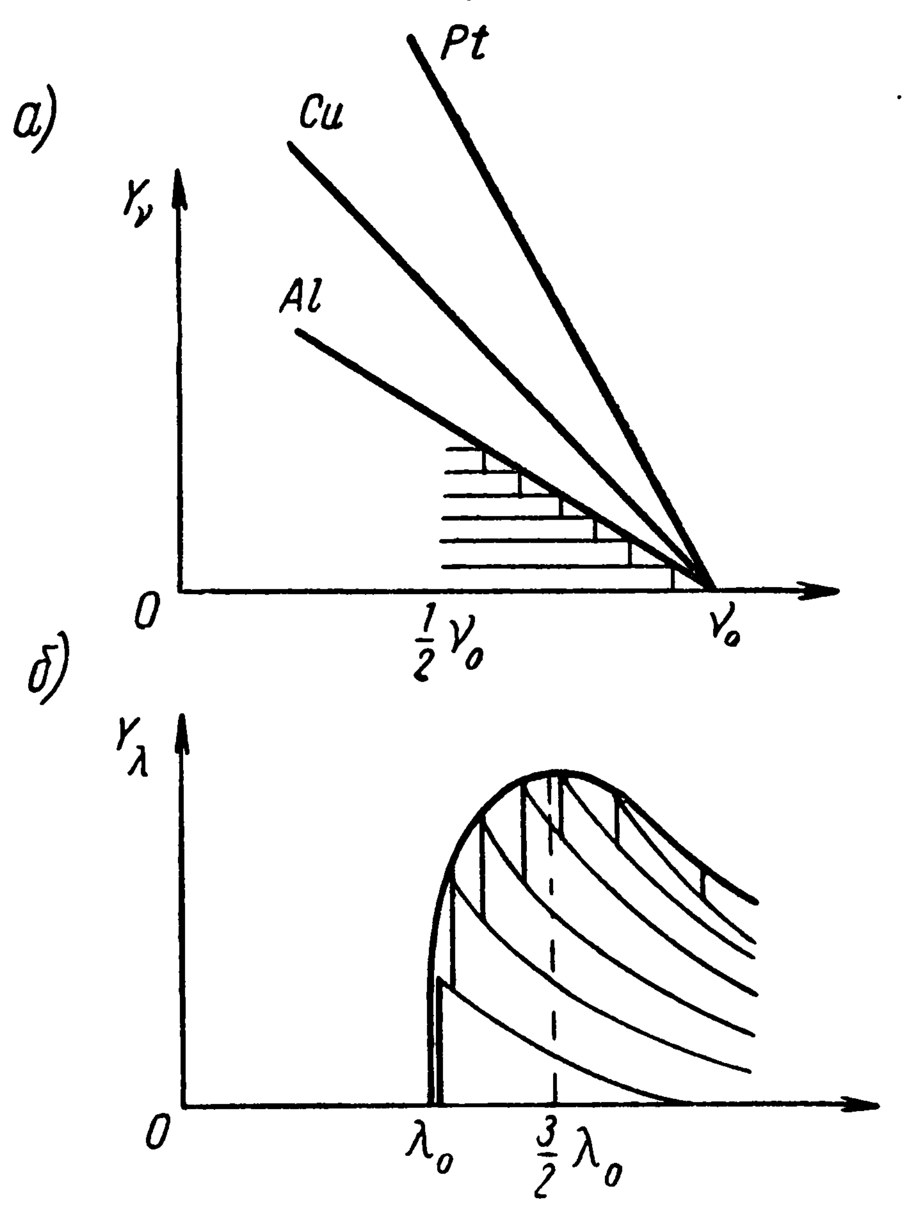


Рис. 54-3. Спектральная плотность в непрерывном рентгеновском спектре торможения:

а) формирование частотного спектра в толстой мишени; *б*) формирование распределения интенсивности в волновом спектре рентгеновского излучения от толстой мишени

Интегральная интенсивность всего не фильтрованного промежуточной средой спектра, согласно (54,8), представится в виде (рис. 54-4,*а*)

$$I = \int_0^{\nu_0} Y_\nu d\nu = AiZ \int_0^{\nu_0} (\nu_0 - \nu) d\nu = AiZ \frac{\nu_0^2}{2} = aiZU^2, \quad (54{,}11)$$

т. е. I пропорциональна квадрату подводимого напряжения (U^2), силе тока i и атомному номеру Z вещества мишени. Этот результат не зависит от направления излучения, поэтому выход рентгеновского излучения (к. п. д. рентгеновской трубки) при токе в n (*сек*$^{-1}$) электронов в секунду составит

$$\eta = \frac{a' n Z U^2}{neU} = bZU, \qquad (54{,}12)$$

где $b \approx 10^{-9}$, если U выражено в вольтах.

Формула (54,12) справедлива в меру применимости закона (54,8) об изменении энергии электронов при их проникновении в вещество, т. е. практически до энергий порядка 10^6 *эв*. Из выражения (54,10) для нефильтрованного излучения может быть найдена длина волны $\lambda_{(m)}$, соответствующая $(Y_\lambda)_m$. Полагая $\frac{dY_\lambda}{d\lambda} = 0$, получаем, что $\lambda_{(m)} = \frac{3}{2}\lambda_0$. Относительное распределение спектральной плотности излучения для всех напряжений может быть представлено единой

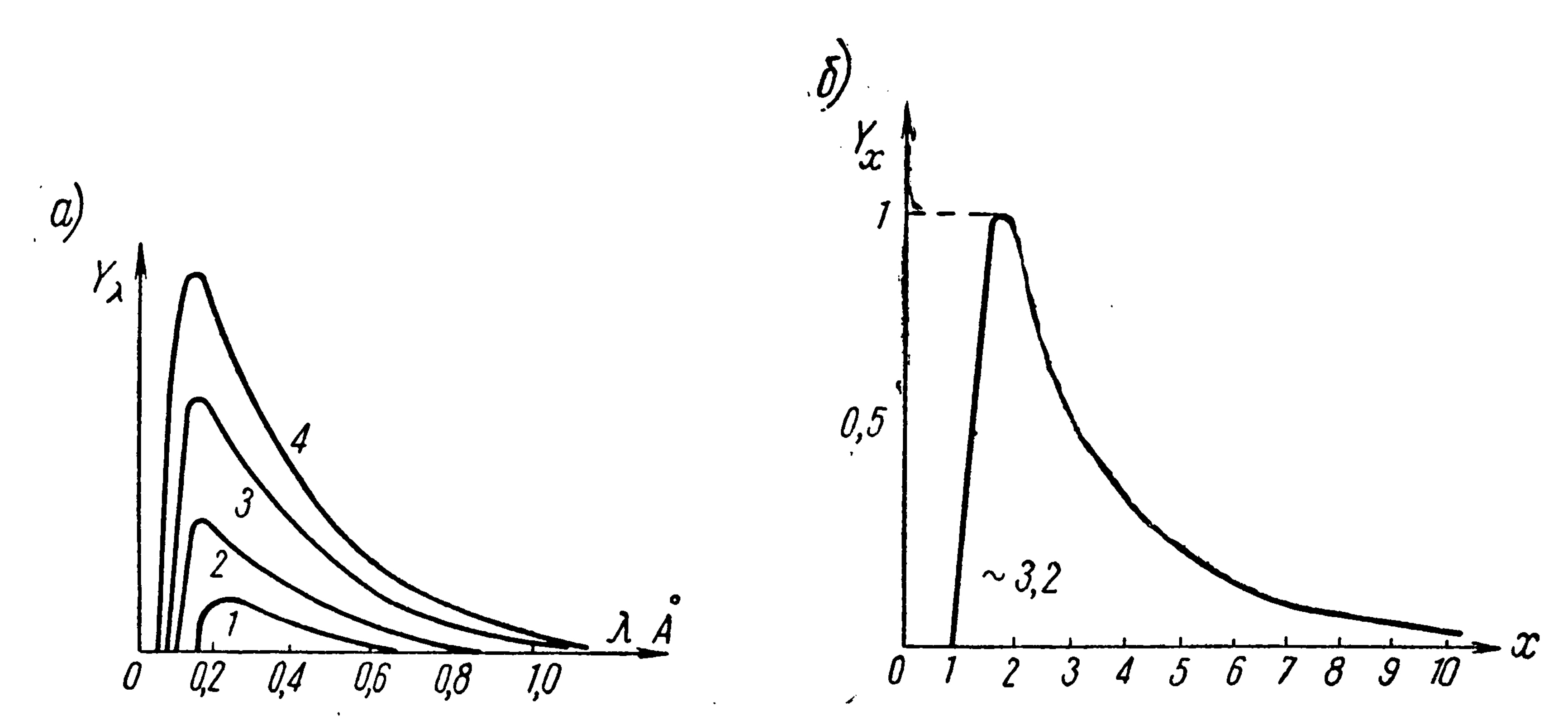


Рис. 54-4. Распределение спектральной плотности в непрерывном рентгеновском спектре:

а) кривая *1* — 75 *кв*, *2* — 150 *кв*, *3* — 275 *кв*, *4* — 300 *кв*; *б*) инвариантная кривая распределения при $x = \frac{\lambda}{\lambda_0}$, $\lambda_m = \frac{3}{2}\lambda_0$; $Y = \frac{Y_\lambda}{Y_{\lambda,\,m}} = Y_x$. Площадь кривой

$$I = \int_1^\infty Y_x\,dx \approx 3{,}2$$

кривой, если положить $x = \frac{\lambda}{\lambda_0}$. Из формулы (54,10) находим (рис. 54-4, *б*):

$$Y_m = kiZU^4\,\frac{x-1}{x^3}. \qquad (54,13)$$

Таким образом, закономерностям сплошного спектра температурного излучения соответствуют аналогичные закономерности непрерывного спектра тормозного излучения. Температурное возбуждение излучений является основным способом возбуждения оптической области излучения, в то время как способ торможения зарядов является характерным при возбуждении рентгеновского и гамма-излучений.

В целях экспериментального воспроизведения рентгеновского спектра тормозного излучения используются спектрографы с кристаллами в качестве селективных рефлекторов и фотопленками в ка-

честве приемников излучения. На рис. 54-5 показана схема щелевого рентгеноспектрографа. Узкий пучок смешанного излучения падает на сетчатую плоскость кристалла под малым варьирующим углом скольжения θ_i. Если разность хода накладывающихся лучей, рассеянных узлами кристаллической решетки соседних сетчатых плоскостей кристалла, составит целое число длин волн излучения, то под данным углом рассеяния лучей будет интерференционное усиление их интенсивности, или, иначе, правильное отражение этих лучей, от сетчатой плоскости кристалла.

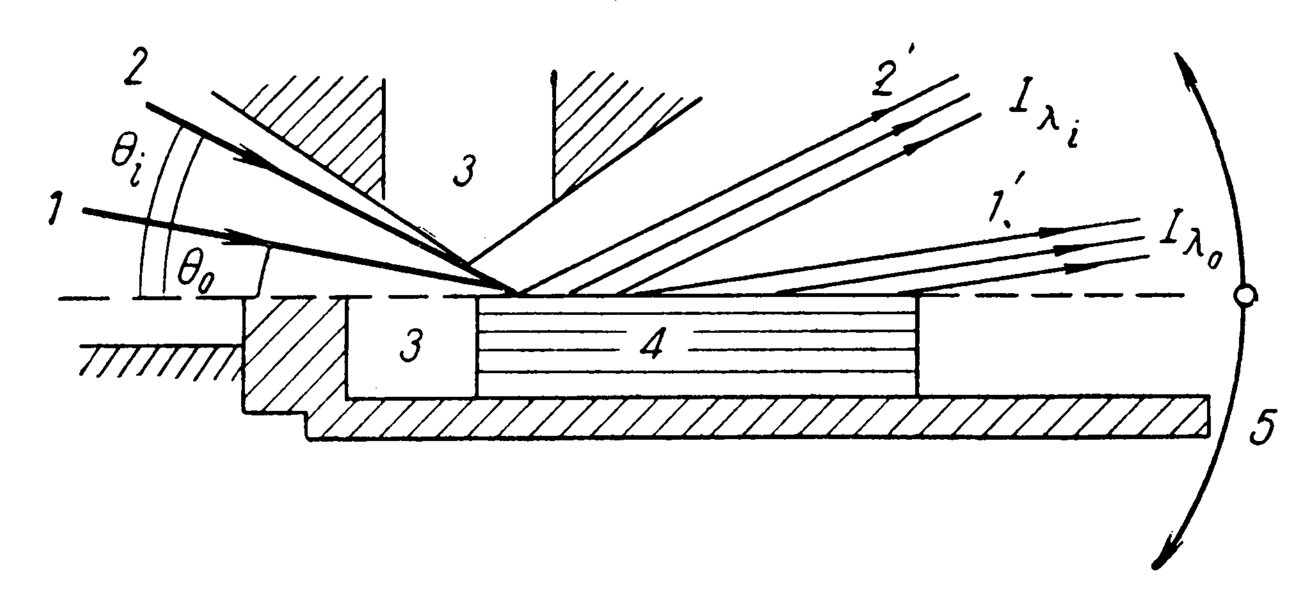


Рис. 54-5. Схема щелевого рентгеноспектрографа:
1, *1'* и *2*, *2'* — падающие и интерференционно отраженные лучи; *3—3* — щелевые ограничители; *4* — кристалл, сколотый по плоскости спайности; *5* — направления реверсивно вращательного движения спектрографа

Разность хода лучей, рассеянных узлами соседних сетчатых плоскостей кристаллической решетки, равна (см. рис. 48-5) $bc = 2d \sin \theta$, где d — постоянная решетки. Отсюда условие правильного отражения будет представлено в виде

$$2d \sin \theta_i = n\lambda_i \qquad (54,14)$$

— формула Вульфа—Брэгга.

Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ — порядок отражения. Очевидно, под углом скольжения θ_i из смешанного рентгеновского излучения правильно будут отражаться только те длины волн λ_i, которые удовлетворяют условию Вульфа—Брэгга:

$$\sin \theta_i = n \frac{\lambda_i}{2d}.$$

При достаточно малом значении $\frac{\lambda_i}{2d} \leqslant 1$ возможны отражения одних и тех же длин волн не только в первом ($n = 1$), но и во втором порядке, при этом $\sin \theta_{i,1} < \sin \theta_{i,2}$. Так как постоянные решеток, используемые в рентгеноспектроскопии неорганических кристаллов, лежат в границах от $d = 2{,}8$ Å (каменная соль) до $d = 9{,}9$ Å (слюда) и, согласно (54,14), всегда должно соблюдаться условие $\lambda < 2\,d$, то реальные углы скольжения для коротких длин волн составляют $1 \div 2°$. Формула Вульфа—Брэгга лежит в основе не

только рентгеноспектрографии, но и рентгеновского структурного анализа, так как в нее входят λ и d. Если известна одна из этих величин, то по измерению угла θ_i из (54,14) может быть найдена другая.

Смешанное рентгеновское излучение широко используется в дефектоскопии (промышленной и медицинской) и для воздействий излучением на материалы и организмы (рентгенизация и рентгенотерапия). В качестве генераторов рентгеновского излучения применяются специальные электровакуумные трубки — диоды, питаемые от источников выпрямленного высокого напряжения (рентгеновские аппараты).

Для генерирования очень коротковолновых ионизирующих излучений с длинами волн более короткими, чем у гамма-лучей, испускаемых радиоактивными атомными ядрами и, следовательно, с квантами энергии $h\nu > 10^7$ *эв* применяются импульсные индукционные ускорители электронов (β-частиц), бетатроны (рис. 54-6).

Рис. 54-6. Схематический разрез бетатрона на 20 *Мэв* (магнитное поле, перпендикулярное чертежу, обозначено точками):

1 — равновесная траектория электрона; *2* — тороидная трубка из пирекса; *3* — свинцовый коллиматор; *4* — защитный слой; *5* — графитовый фильтр; *6* — внешний защитный слой; *7* — обмотка электромагнита; *8* — ярмо электромагнита; *9* — контрольная фольга из цинка для (γ, *n*)-реакций; *10* — узкий конус первичных лучей — непрерывный спектр торможения ($\eta \approx 6\%$)

За то время, пока изменение магнитного потока сохраняет свой знак, электрон, выведенный на равновесную круговую орбиту под действием электродвижущей силы индукции, совершает в тороидной трубке очень большое число оборотов, приобретая каждый раз кинетическую энергию $E_\beta = \oint_l F_r\, dl$, где F_r — сила электрического поля, действующая на равновесной орбите. Бетатронные излучатели допускают генерирование ионизирующих излучений с квантами энергии от 20 до 200 *Мэв*. Характерной особенностью бетатронного квантового излучения является преимущественное распространение излучения вперед по движению затормаживаемых первичных электронов, которые в конце разгона внешним магнитным импульсом переводятся с равновесной орбиты на мишень. Имеется еще один вид тормозного излучения, характерный тем, что его испускают не затормаживающие заряды, а молекулы среды (видимая область спектра).

Такое электромагнитное конусное лучеиспускание молекул, возникающее на пути затормаживания заряженных частиц электронов, протонов, мезонов, аналогично образованию баллистической волны при поступательном движении тел в среде со сверхзвуковой скоростью. Оно носит название эффекта Черенкова—Вавилова. Это излучение направлено вперед по движению затормаживаемой частицы. Оно возникает всякий раз, когда скорость движения частицы в данной среде v_r превышает фазовую скорость $v_ф = \frac{c}{n}$ распространения электромагнитного излучения оптической области спектра в этой среде:

$$v_r > \frac{c}{n(\lambda)}. \qquad (54,15)$$

Такое свечение среды содержит все длины волн, удовлетворяющие условию (54,15), и образует в пространстве среды видимый конус лучей с углом раствора, для которого справедливо соотношение:

$$\cos\theta = \frac{c}{n(\lambda)v_r}. \qquad (54,16)$$

Интенсивность видимого свечения среды возрастает с увеличением начальной скорости частицы и прямо пропорциональна квадрату ее атомного номера, вследствие чего излучение Черенкова—Вавилова сразу же нашло практическое применение в технике атомных реакторов.

Лекция 55

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НАПРАВЛЕННЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Волны, испускаемые точечным источником в изотропную среду, распространяются в ней одинаково во все стороны, при этом излучаемая мощность распределяется на все большую поверхность, и, следовательно, уже одна эта причина вызывает ослабление интенсивности излучения в потоке. Если N — излучаемая мощность, а S — поверхность, сквозь которую проникает поток излучения, то при равномерном сферическом распределении излучения его интенсивность на расстоянии r от точечного источника будет равна

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}, \quad \text{откуда} \quad I \cdot r^2 = \text{const} \qquad (55,1)$$

или

$$\frac{I_0}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2.$$

Если рассматривать вакуум и, следовательно, принять, что $N = \text{const}$, а за исходную величину считать интенсивность излучения на единичном расстоянии от источника ($r_0 = 1$ *см* или $r_0 = 1$ *м*),

т. е. $I_0 = \frac{N}{4\pi}$, то интенсивность на любом другом расстоянии r будет

$$I_r = I_0 \cdot \frac{r_0^2}{r^2} = I_0 \frac{1}{r^2}. \qquad (55,1')$$

Однако во всякой среде, содержащей вещество, излучение будет претерпевать еще поглощение и рассеяние, что вызовет добавочное ослабление интенсивности направленного излучения.

Под поглощением (линейный коэффициент τ) подразумевается преобразование энергии электромагнитного излучения в любой иной вид, а под рассеянием (линейный коэффициент σ) — изменение направления распространения излучения.

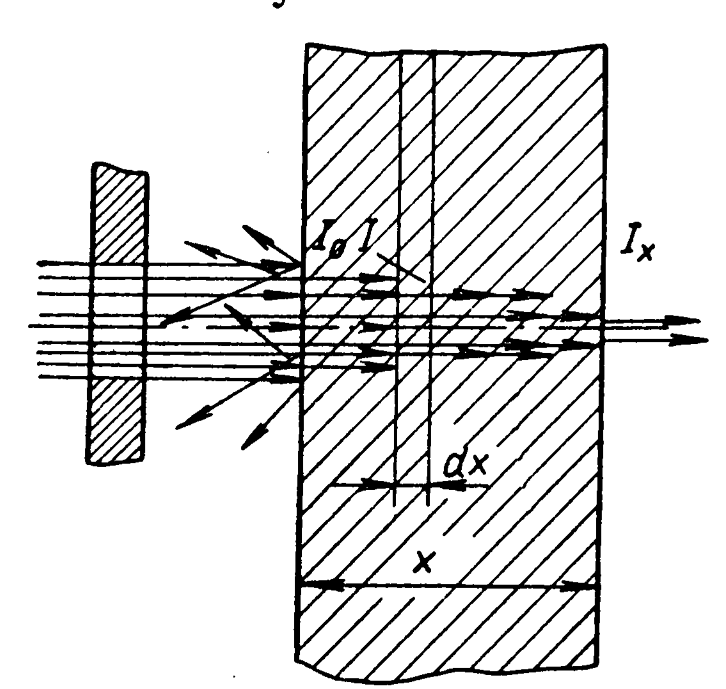


Рис. 55-1. Ослабление интенсивности параллельного пучка лучей в мутной среде

Ослабление интенсивности направленного излучения происходит также и в результате регулярного рассеяния или отражения при проникновении излучения из одной среды в другую. Если $I'_{0,\varphi}$ — интенсивность излучения, падающего на поверхность раздела двух сред, а R_φ — коэффициент правильного зеркального отражения принимающей среды относительно передающей для заданного излучения длины волны λ и угла падения φ, то интенсивность излучения, вошедшего в принимающую среду, будет равна

$$I_{0,\varphi} = I'_{0,\varphi}(1 - R_\varphi). \qquad (55,2)$$

Основной закон ослабления интенсивности излучения в мутной среде вытекает из случая проникновения узкого параллельного монохроматического пучка лучей (рис. 55-1).

Если I — интенсивность этого излучения, проникающего в элементарный слой среды толщиной dx, а $\mu = \tau + \sigma$ — линейный коэффициент ослабления излучения веществом из-за поглощения и рассеяния, то уменьшение интенсивности в элементарном слое составит

$$dI = -\mu I dx. \qquad (55,3)$$

После интегрирования (55,3) по всей толщине слоя, т. е. от $x = 0$ до $x = x$, получим

$$I_x = I_0 e^{-\mu x}. \qquad (55,3')$$

При наличии всех трех перечисленных причин, вызывающих ослабление интенсивности излучения, например для случая, показанного на рис. 55-2, будем иметь

$$I_{f+x} = I_f\left(\frac{f}{f+x}\right)^2 (1-R)\cdot e^{-\mu x}, \qquad (55,4)$$

где f — расстояние от источника до поверхности мутной среды.

Скорость распространения электромагнитного излучения в диэлектрике определяется электрической и магнитной проницаемостями, а в металлах — еще и электрической проводимостью.

Коэффициент упорядоченного отражения R при нормальном падении лучей на поверхность диэлектрической среды ($\varphi = 0$), согласно (50,12), имеет вид

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 < 1. \qquad (55,5)$$

В спектральной области излучений, для которых показатель преломления $n \approx 1$ (гамма-лучи и рентгеновское излучение, длинные радиоволны), $R \to 0$ и зеркальное отражение практически отсутствует. При проникновении излучений в металлы необходимо учитывать комплексное значение показателя преломления, равное

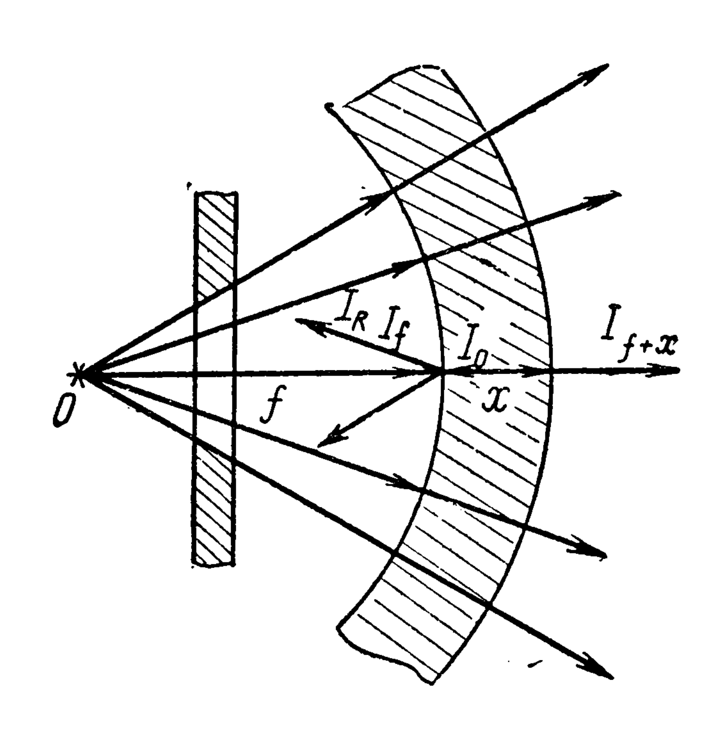


Рис. 55-2. К выводу выражения интенсивности излучения после проникновения сквозь поглощающую и рассеивающую среду (расходящийся пучок лучей)

$$n' = n - j\varkappa. \qquad (55,6)$$

Индексом поглощения $\varkappa$ учитывается наличие свободных электронов в металле. Он связан с линейным коэффициентом поглощения излучения τ и удельной проводимостью металла σ соотношением

$$\varkappa = \frac{\tau}{4\pi}\cdot\lambda = k\frac{\sigma}{\nu}, \qquad (55,7)$$

в котором k зависит только от выбора единиц.

Коэффициент упорядоченного (зеркального) отражения излучений от металла при их нормальном падении можно представить в виде

$$R = \frac{(n-1)^2+\varkappa^2}{(n+1)^2+\varkappa^2} < 1 \qquad (55,8)$$

— формула Бера.

В случае сильнопоглощаемых металлами радиоволн $\varkappa \gg (n+1)$ и, следовательно, $R \to 1$; для слабопоглощаемого гамма-излучения $\varkappa \ll (n-1)$ и, поскольку $n \leqslant 1$, $R \to 0$. Экспоненциальный множитель в (55,4) определяет ослабление интенсивности излучения в мутной среде из-за поглощения и рассеяния. В элементарных актах поглощения и рассеяния нередко рассматриваются эффективные сечения этих процессов. Под эффективным сечением под-

разумевается площадь (в $см^2$) поперечного сечения пучка лучей, вызывающих процесс, при котором рассматривается поток излучения, приходящийся на 1 $см^2$ нормально расположенной поверхности. Применительно к поглощению излучения атомом эффективное поперечное сечение этого процесса τ_a будет равно отношению поглощенной атомом энергии излучения ε к поверхностной плотности излучения $E = \frac{dW}{dS}$, т. е.

$$\tau_a = \frac{\varepsilon}{E} \ [см^2] = \frac{\tau_m}{N_0} A. \qquad (55,9)$$

Так как $\tau_e = \frac{\tau_a}{Z}$, то

$$\frac{\tau_m \cdot A}{N_0 Z} = \frac{\tau A}{\rho Z N_0} = \tau_e. \qquad (55,10)$$

Здесь τ_m — экспериментально определяемый массовый коэффициент поглощения излучения в $\left(\frac{см^2}{г}\right)$, ρ — плотность поглощаю-

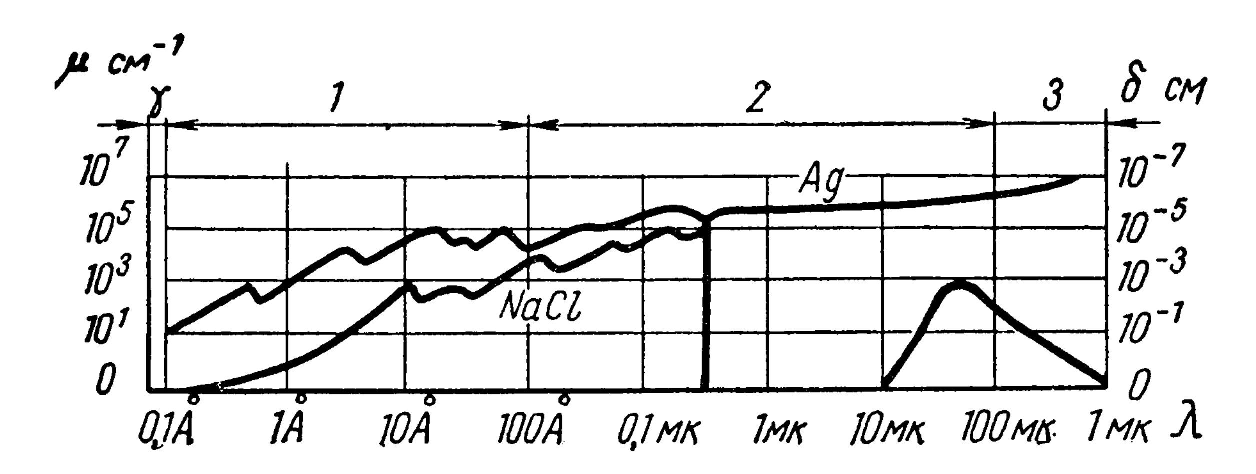


Рис. 55-3. Зависимость линейных коэффициентов ослабления в Ag и NaCl от длины волны излучения (δ — средняя глубина проникновения излучения):

1 — область рентгеновских лучей, 2 — оптических, 3 — ультракоротковолновых

щего вещества, N_0 — число Авогадро. Для легких элементов $\frac{A}{Z} \approx 2$ и, значит,

$$\tau_e = \frac{2\tau_m}{N_0} = \frac{2\tau}{\rho N_0}. \qquad (55,10')$$

Из выражений (55,3) и (55,7) вытекает, что поглощение направленного излучения веществом может быть охарактеризовано двумя величинами: линейным коэффициентом поглощения τ и безразмерным показателем поглощения $\varkappa = \frac{\tau}{4\pi}\lambda$.

В качестве примера на рис. 55-3 в логарифмической шкале приведено изменение линейного коэффициента ослабления $\mu = \tau + \sigma$ по всему спектру электромагнитных излучений для Ag и NaCl

с указанием релаксационной глубины проникновения излучения $\delta = \frac{1}{\mu}$ (*см*).

В рентгеновской области спектра, вдали от края полосы поглощения, для всех веществ приближенно можно считать, что

$$\tau_{(m)} \approx 5 \cdot 10^{-3} Z^3 \lambda^3 \left(\frac{см^2}{г}\right). \qquad (55,11)$$

Лекция 56

ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Первичными элементарными процессами поглощения энергии электромагнитного излучения веществом являются фотоэлектрические акты. Именно они позволили выявить квантовую (фотонную) природу электромагнитных излучений. Кванты энергии излучений — фотоны взаимодействуют с заряженными частицами вещества — с электронами и ядрами атомов. Пользуясь фотонными представлениями, уравнение фотоэлектрического взаимодействия в общем случае можно записать на основе закона сохранения и превращения энергии для изолированной системы в виде

$$h\nu = A + W_{кин} + h\nu'. \qquad (56,1)$$

Здесь A — работа разделения связанных зарядов (работа выхода электрона из металла, из атома или молекулы, и работа образования электронных пар); $W_{кин}$ — начальная кинетическая энергия разделенных зарядов, например, энергия освобожденного электрона совместно с ионизированным атомом, из которого он вырван, или энергия образованных в поле ядра электрона и позитрона; $h\nu'$ — квант излучения, рассеянного при фотоэлектрическом взаимодействии ($h\nu' \leqslant h\nu$).

Работа разделения связанных зарядов является мерой изменения потенциальной энергии рассматриваемой системы, например мерой энергии возбуждения атома. При вырывании квантом света свободного электрона из проводника (внешний фотоэффект)

$$A = A_{св} = (2 \div 10)\ эв;$$

при вырывании электрона из атомов (внутренний фотоэффект)

$$A = A_а = (5 \div 10^5)\ эв$$

(в зависимости от рода атома и начального уровня энергии электрона в оболочке атома); при образовании электронных пар

$$A = A_{э.\,п} \geqslant 2m_0c^2 = 1,1 \cdot 10^6\ эв$$

и при образовании протонных пар

$$A = A_{п.\,п} \geqslant 2m_{p,\,0}c^2 \approx 2 \cdot 10^9\ эв.$$

Если $h\nu < A_п$, где $A_п$ — пороговое значение работы разделения зарядов, характерное для данного вещества, то разделение связанных зарядов произойти не может (радиоволновая и инфракрасная спектральные области). Фотоны вызывают лишь смещения электронов в пределах связывающих их систем (в пределах кристаллической решетки металла, в пределах атома). При этом происходит преобразование кванта энергии $h\nu$ в энергию колебаний электронов поглощающего вещества. Пренебрегая малой кинетической энергией колебаний атома и учитывая, что колеблющийся электрон является излучателем, выражение (56,1) для этого случая можно записать в форме классического уравнения рассеяния (дисперсии) излучения: $h\nu = h\nu'$ и, следовательно, $\nu' = \nu$. Фотоэффект того или другого вида возникает при $h\nu_0 \geqslant A_п$.

Для внешнего фотоэффекта на металлах, обнаруженного и изученного Столетовым, $h\nu_0 \geqslant A_{св}$. Это соотношение устанавливает красную границу фотоэффекта.

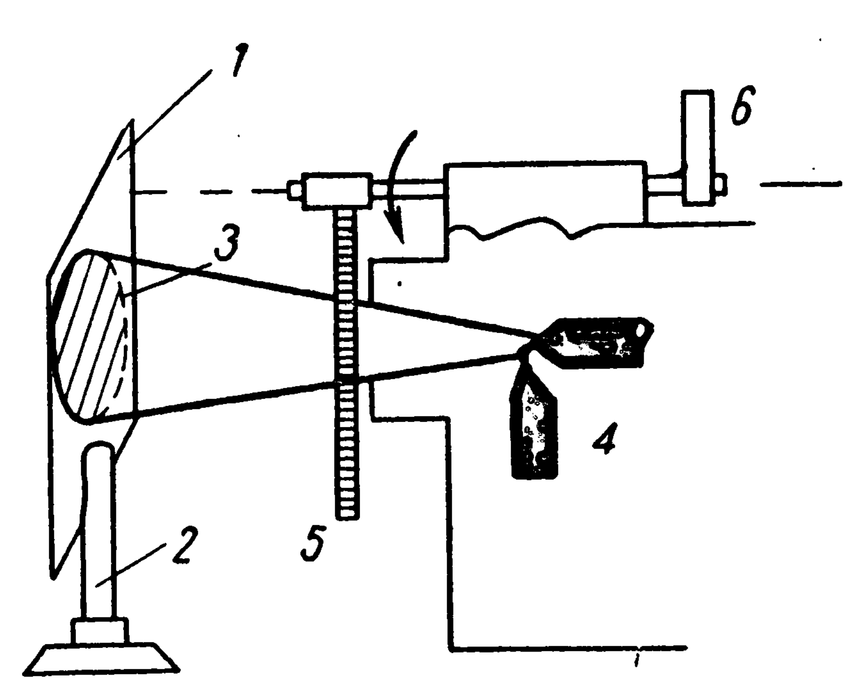


Рис. 56-1. Схема опытов Столетова: *1* — цинковая пластина; *2* — изолятор; *3* — листок электроскопа; *4* — электрическая дуга; *5* — стеклянный диск; *6* — рукоятка поворота стеклянного диска

Согласно опытным исследованиям Столетова (рис. 56-1), каждому металлу соответствует своя красная граница фотоэффекта. Очень интенсивное облучение квантами излучения $h\nu < A_{св}$ не вызывает фотоэффекта, а облучение слабым, но более коротковолновым излучением (например, ультрафиолетовым), для которого $h\nu > A_{св}$, приводит к потере отрицательного заряда металлической (например, цинковой) пластинкой. Скорость, с которой уменьшается отрицательный электростатический заряд пластины, прямо пропорциональна интенсивности действующего излучения, активного в отношении фотоэффекта.

После выяснения электронной природы свободных отрицательных зарядов у металлов (Лоренц), после введения квантовых представлений в оптику (Планк) Эйнштейном было предложено уравнение внешнего фотоэффекта в виде

$$h\nu = A + E_{кин}. \qquad (56,2)$$

Оно является частным случаем уравнения (56,1), когда $h\nu' = 0$, и показывает, что если пренебречь малой начальной кинетической энергией вырываемого электрона и малой кинетической энергией, передаваемой остатку системы, из которой электрон вылетает, то при фотоэлектрическом акте вся энергия фотона $h\nu$ преобразуется

в энергию возбуждения системы A и в кинетическую энергию первичного фотоэлектрона.

Учитывая случаи возможных больших скоростей у фотоэлектронов, когда $\beta = \frac{v}{c} \to 1$, для их кинетической энергии следует пользоваться релятивистским выражением (4,17)

$$E_{\text{кин}} = c^2 (m - m_0) = c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \qquad (56,3)$$

Однако уравнение Эйнштейна применимо и для внутреннего фотоэффекта, когда происходит вырывание фотоном ультрафиолетового, или рентгеновского, излучения связанного электрона из атома. При этом в зависимости от уровня энергии электронов в атоме, с которого вылетает фотоэлектрон (из какого слоя электронной оболочки он вырван), работа выхода изменяется в широких границах от $A = (5 \div 15)$ *эв* для внешних электронов до $A = 100$ *кэв* для внутренних электронов K-слоя оболочки тяжелых атомов.

Вырывание фотоэлектрона приводит к ионизации атома и к его возбужденному состоянию с энергией $E' > E_0$, где E_0 — энергия нормального уровня. Последующее испускание атомом кванта характеристического излучения с энергией $h\nu_x = E - E_0$ переводит атом в невозбужденное состояние.

Если рассматривать случай, когда работа выхода A фотоэлектрона мала по сравнению с энергией фотона $h\nu$, и если пренебречь начальной кинетической энергией вырываемого электрона, а также передачей малой энергии ионизированному остатку атома, то, положив в (56,3) $h\nu = E_{\text{кин}}$, получим для угла вылета фотоэлектрона выражение

$$\cos\theta = \frac{h\frac{\nu}{c}}{p} = \frac{h\frac{\nu}{c}}{m_0 \beta c} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}. \qquad (56,4)$$

Однако будет наблюдаться некоторый угловой разброс вылета фотоэлектронов около значения θ, определяемого по формуле (56,4). Как видно, $\theta = \varphi\left(\frac{v}{c}\right)$ и, значит, θ зависит от энергии фотона. При малых энергиях $h\nu \left(\beta = \frac{v}{c} \ll 1\right)$ угол вылета фотоэлектронов $\theta \approx \frac{\pi}{2}$; наоборот, при больших значениях $h\nu$ (рентгеновское излучение; $\beta = \frac{v}{c} \to 1$) $\theta \to 0$.

В тех случаях, когда $h\nu \gg A$, например при вырывании квантами энергии рентгеновского излучения ($h\nu > 10^5$ *эв*) внешних электронов оболочки атомов или при фотоэлектрическом взаимодействии с электроном гамма-кванта (10^6 *эв* $> h\nu > 10^5$ *эв*), другими словами, когда происходит фотоэлектрический акт взаимодействия между квантом излучения большой энергии и практически

свободным электроном ($A = 0$), полной передачи энергии от фотона к электрону не происходит.

Некоторая часть энергии $h\nu$ сохраняется в форме электромагнитного излучения и уносится фотоном рассеяния (квантом энергии $h\nu'$). При таком взаимодействии соблюдается не только закон сохранения кинетической энергии

$$h\nu = h\nu' + E_{\text{кин}} = h\nu' + m_0c^2\left[(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right], \qquad (56,5)$$

но и закон сохранения импульса (рис. 56-2) (см. лекцию 4), поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{h\nu'}{c}\cos\varphi + m_0\beta c(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\theta &= \frac{h\nu}{c}, \\ \frac{h\nu'}{c}\sin\varphi - m_0\beta c(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (56,6)$$

Из этих трех соотношений вытекает, что при рассматриваемом фотоэлектрическом взаимодействии отдельного кванта жесткого излучения со свободным электроном квант излучения и электрон проявляют свойства, подобные упругим свойствам соударяющихся частиц, но отличаются тем, что изменение кванта энергии происходит не за счет изменения скорости его движения, а за счет изменения массы движения. Это явление, свидетельствующее о корпускулярных проявлениях квантов излучения, носит название Комптон-эффекта, или, иначе, фотоэлектрического эффекта отдачи.

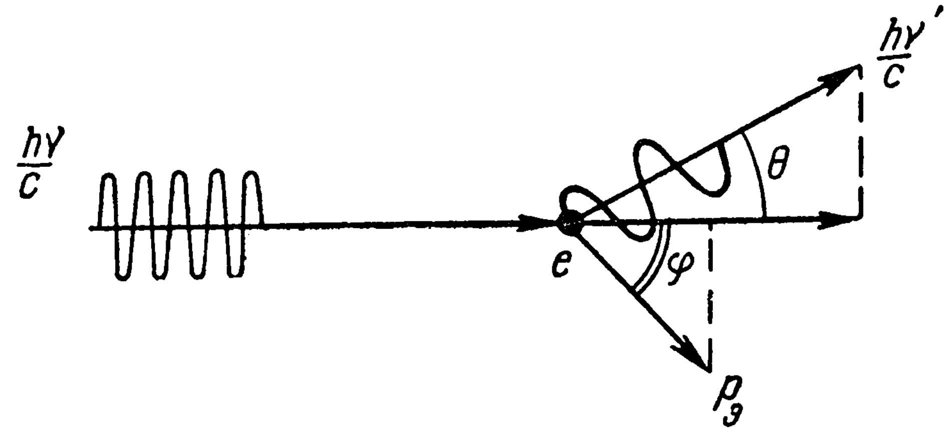


Рис. 56-2. Эффект Комптона: e — свободный электрон; $\frac{h\nu}{c}$ —импульс кванта падающего излучения; $\frac{h\nu'}{c}$ — импульс кванта некогерентно рассеянного излучения; $p_э$ — импульс электрона отдачи

Согласно (56,6), угол вылета φ кванта рассеянного излучения и угол вылета θ электрона отдачи (см. рис. 56-2) связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{1+\alpha}, \qquad (56,7)$$

где

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2}.$$

Решая систему уравнений (56,5) и (56,6) относительно рассеянного кванта энергии, найдем, что

$$(h\nu')_\varphi = \frac{h\nu}{1+\alpha(1-\cos\varphi)}, \qquad (56,8)$$

и, соответственно, кинетическая энергия электрона отдачи

$$(E_{кин})_\theta = h\nu - (h\nu')_\varphi. \qquad (56,9)$$

Угловое распределение энергии при Комптон-эффекте показано на полярной диаграмме (рис. 56-3).

Из выражения (56-8) вытекает соотношение для изменения длины волны при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi) = 0{,}024\,(1 - \cos\varphi)\,[\text{Å}]. \qquad (56,10)$$

Как видно, изменение длины волны (смягчение излучения) при Комптон-эффекте не зависит от качества излучения, а определяется

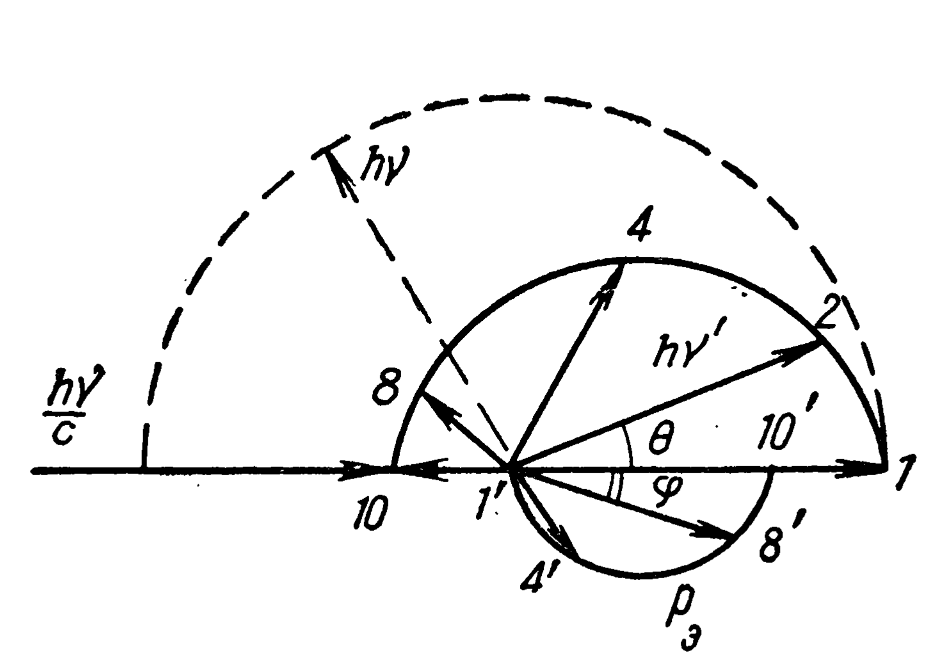


Рис. 56-3. Распределение выхода квантов рассеяния и электронов отдачи по углам рассеяния при эффекте Комптона: *1*, *2*, *4*, *8*, *10* — кванты рассеянного излучения $h\nu'$; *1'*, *4'*, *8'*, *10'* — соответствующие импульсы электрона отдачи p_0'

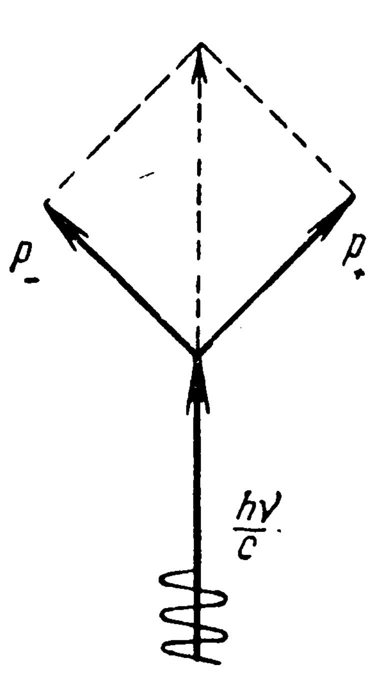


Рис. 56-4. Диаграмма импульсов при образовании позитрон-электронной пары

исключительно углом вылета φ кванта энергии рассеянного излучения. Когда по мере возрастания кванта энергии излучения будет достигнуто значение $h\nu > 2m_0c^2 = 1{,}1$ *Мэв*, фотоэлектрическое взаимодействие приобретает еще одну качественно новую форму. В поле атомного ядра квант энергии электромагнитного излучения преобразуется в электрон-позитронную пару частиц, геометрическая сумма импульсов которых равна импульсу кванта излучения (рис. 56-4), а его энергия, согласно (56,1), равна энергии образованных частиц, т. е.

$$h\nu = 2m_0c^2 + W_{кин}, \qquad (56,11)$$

где $W_{кин}$ — сумма кинетических энергий обоих образовавшихся частиц. Аналогично, если $h\nu > 2m_{p,0}c^2 = 2 \cdot 10^9$ *эв*, то квант лучистой энергии может трансформироваться в протонную пару частиц (протон — антипротон). При $h\nu > 10^{12}$ *эв* кинетическая энергия появившихся при таких преобразованиях пар частиц будет настолько велика, что эти частицы окажутся «ливнеобразующими»,

как это и наблюдается в космических лучах. Из рассмотрения сущности фотоэлектрических взаимодействий следует, что линейный коэффициент поглощения излучения τ может быть представлен в виде суммы трех коэффициентов: фотоэлектрического поглощения $\tau_ф$, комптоновского поглощения $\tau_к$ и преобразовательного поглощения $\tau_п$.

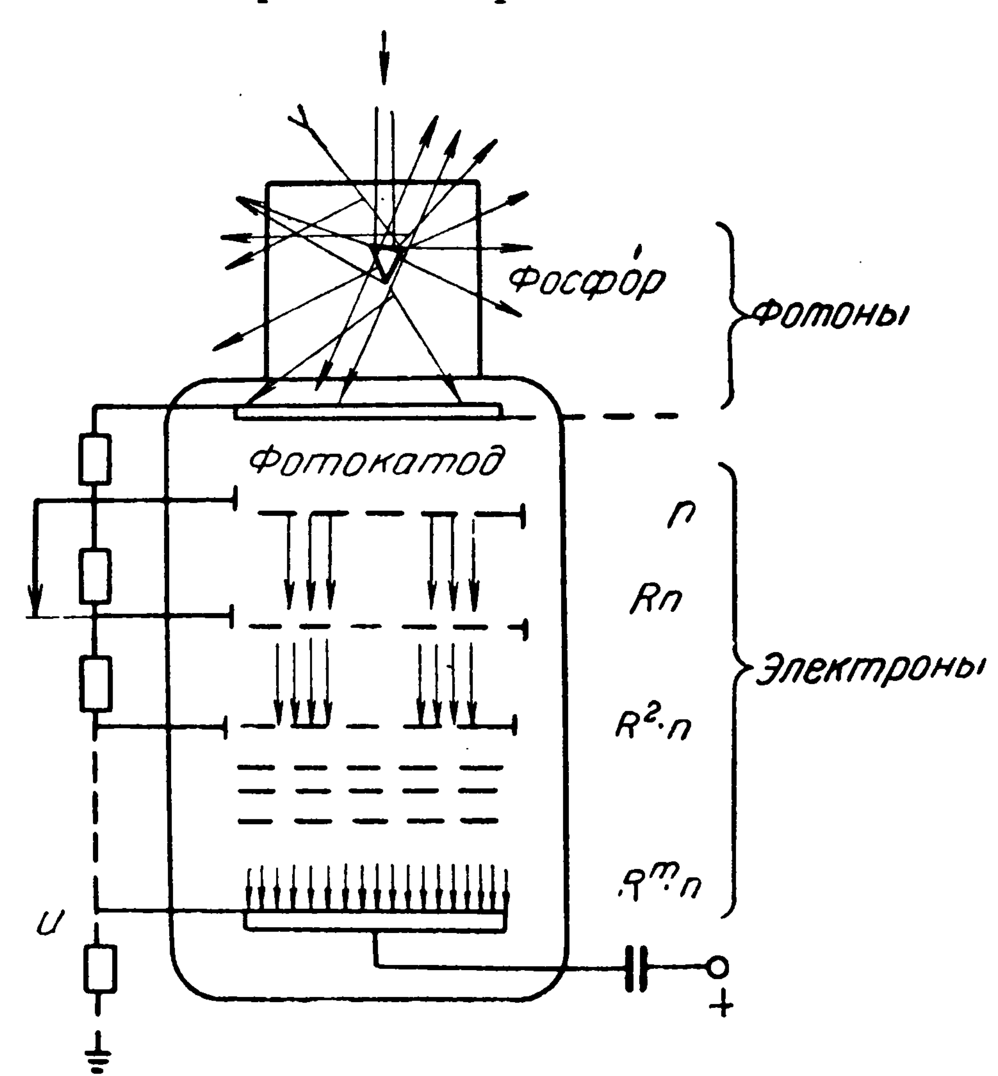


Рис. 56-5. Схема фотоумножителя для регистрации сцинтилляций

Фотоэлектрический эффект лежит в основе принципа действия фотосопротивлений, фотоэлементов и фотоумножителей. Существует много различных типов фотосопротивлений, чувствительных к действию излучений в разных областях оптического, рентгеновского и гамма-излучений. Фотоэлементы параметрического типа представляют собой электровакуумные фотосопротивления, образующие два класса приборов: класс вакуумных, практически безынерционных, фотоэлементов с интегральной чувствительностью порядка 50 *мка/лм* и класс газонаполненных инерционных фотоэлементов примерно такой же чувствительности, но имеющих меньшее внутреннее сопротивление.

Фотоумножители (рис. 56-5), в которых усиление фототока достигается путем вторичной электронной эмиссии, допускают повышение чувствительности до $2 \cdot 10^7$ *мка/лм*. Такие усиления фототока осуществляются с помощью многих каскадов усиления на нескольких промежуточных электродах — динодах, или эмиттерах.

Лекция 57

РАССЕЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЙ

Процесс, в результате которого изменяется направление распространения излучения, называется рассеянием. Рассеяние происходит вследствие взаимодействия квантов излучения с теми или другими структурными элементами вещества. Оно определяется качеством излучения (частотой ν, или квантами энергии $h\nu$), свойствами рассеивающих элементов среды (размерами, составом, формой и зарядом рассеивающих тел), а в случае макротел — еще и углом встречи лучей с поверхностью рассеивающего объекта (углом

падения). При рассмотрении явления рассеяния спектрально различных излучений на телах разных размеров и разного состава важным критерием результата рассеяния является линейное соотношение между длиной волны излучения в среде $\left(\lambda = \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{\nu}\right)$ и размерами (a) рассеивающего тела (электрона, ядра, атома, молекулы, частицы вещества, макротела). Если $a \gg \lambda$, то взаимодействия сводятся к отражению и проникновению излучения в вещество. Рассеяние, как локальный вид взаимодействия, возникает при условии $a \ll \lambda$. Таким образом, рассеивающими элементами среды будут служить электроны и ядра ($a = 10^{-13}$ *см*) для гамма-излучения и спектрально прилегающего к нему рентгеновского излучения ($\lambda \approx 10^{-11}$ *см*); атомы, молекулы и мелкие частицы ($a = 10^{-8} \div 10^{-4}$ *см*) — для рентгеновских излучений и оптической области спектра ($10^{-8} \leqslant \lambda \leqslant 10^{-4}$ *см*); макрообразования, например уплотнения и завихрения в молекулярной среде ($a = 10^{-1} \div 10^{3}$ *см*), — для радиоизлучений ($\lambda > 1$ *см* $\div$ 10 *м*). Если $a \ll \lambda$, то рассеивающий элемент практически находится в однородном периодическом поле волны и, следовательно, задача о рассеянии может решаться как электродинамическая задача о действии, вызываемом периодическим электрическим полем. Если при этом расстояние l между рассеивающимися элементами среды сравнимо с длиной волны излучения ($l \geqslant \lambda$), то на процесс диффузного рассеяния накладывается интерференция когерентных волн, испускаемых отдельными центрами. Примерами могут служить рассеяние мягкого рентгеновского излучения на узлах кристаллических решеток, рассеяние на электронах атомов тяжелых элементов (дифракция рентгеновского излучения в жидкостях).

Диффузное рассеяние соответствует тому случаю, когда между излучениями, рассеянными на отдельных элементах среды, нет никаких определенных фазовых соотношений. Такие среды называют мутными в отношении данного излучения. Линейным критерием мутности среды может служить условие:

$$a \leqslant \lambda \leqslant l. \tag{57,1}$$

Количественным выражением для вероятности рассеяния служит эффективное сечение процесса σ_0. Эта величина в рассматриваемом случае будет равна отношению рассеиваемой объектом мощности излучения к интенсивности падающего излучения в месте нахождения объекта или отношению поглощенной энергии излучения к облученности поглотителя (55,9), т. е.

$$\sigma_0 = \frac{P}{I}. \tag{57,2}$$

Соответственно различным видам рассеяния рассматриваются эффективные сечения процесса рассеяния электронами σ_e (в *см*^{2}), атомами σ_a (в *см*^{2}), или сечения, отнесенные к единице массы ве-

щества $\sigma_m\left(\text{в } \frac{см^2}{г}\right)$ и к единице объема вещества σ (в $см^{-1}$) (линейные коэффициенты рассеяния). Основные соотношения для диффузного рассеяния на электронах можно установить статистически, полагая, что частота обращений ν_0 электрона в атоме значительно меньше частоты ν изменения электромагнитного поля волны, вызывающей вынужденные колебания электрона (например случай классического когерентного рассеяния рентгеновского излучения без изменения длины волны на электронах оболочки атома).

Полагая $\ddot{x} = \frac{e}{m_0} E$ (см. рис. 54-1) при условии, что $\nu \gg \nu_0$, для неполяризованного рентгеновского излучения (рис. 57-1), т. е. для $E_y = E_z$, и, значит, для $I_y = I_z = \frac{1}{2} I_0$, получаем основные соотношения при рассеянии:

$$\left.\begin{aligned} I_{r,\varphi} &= I_0 \frac{e^4}{m_0^2 c^4 r^2}\left(\frac{1+\cos^2\varphi}{2}\right); \\ \sigma_e = \frac{P_e}{I_0} &= \frac{\int\limits_0^\pi I_{r,\varphi}\cdot 2\pi r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi}{I_0} = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m_0^2 c^4} \approx 6{,}6\cdot 10^{-25}\ см^2. \end{aligned}\right\} \quad (57{,}3)$$

Следовательно, если n — число атомов в единице объема и Z — число электронов в атоме, то массовый коэффициент рассеяния представится в виде

$$\sigma_m = \sigma_e \frac{n}{\rho} Z = \sigma_e \frac{N}{A} Z \approx 0{,}4 \frac{Z}{A}. \quad (57{,}4)$$

У легких элементов $\frac{Z}{A} = 0{,}5$ и, значит, классический массовый коэффициент рассеяния рентгеновского излучения легкими элементами ($Z < 20$) будет равен

$$\sigma_{m,0} = \frac{\sigma_0}{\rho} \approx 0{,}2\ \frac{см^2}{г}$$

независимо от длины волны излучения. Пространственное распределение интенсивности рентгеновского излучения, рассеянного мутной средой без изменений его качества в соответствии с (57,3), представится фигурой вращения индикатриссы вокруг направления излучения, проникающего в среду (рис. 57-2). Симметрия фигуры распределения рассеяния нарушается, если имеются заметные, фазовые соотношения между локальными рассеяниями ($\lambda \geqslant l$). В области гамма-излучения ($\lambda < 10^{-9}$ $см$), в которой квантовые свойства излучения (см. рис. 56-3) приводят к Комптон-эффекту (некогерентное

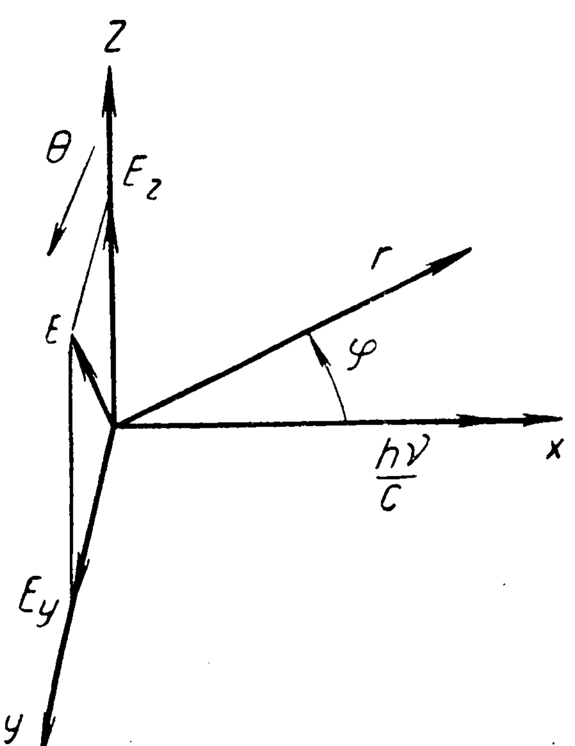


Рис. 57-1. К выводу выражений (57,3) для интенсивности рассеянного излучения

рассеяние) и к изменению качества рассеянного излучения, симметричное распределение рассеяния будет также нарушено (кривая 2 на рис. 57-2). Для этой области излучений массовый коэффициент рассеяния зависит от качества излучения, убывая с возрастанием квантов энергии излучения (с уменьшением длины волны излучения). Для массового коэффициента рассеяния рентгеновского излучения коротких длин волн будем иметь

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma_0}{\rho} \cdot \frac{1}{1+2\alpha} = 0{,}2\,\frac{1}{1+2\alpha}\left(\frac{см^2}{г}\right), \tag{57,5}$$

где

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2} \approx \frac{\varepsilon_\nu\,(Мэв)}{0{,}5\,(Мэв)} \approx 2\varepsilon_\nu.$$

В области мягких рентгеновских лучей $\lambda \to l$, поэтому возникают фазовые соотношения между локальными рассеяниями, которые и вызывают искажение индикатриссы рассеяния (см. рис. 57-2). При этом складываются не интенсивности рассеянных электронами колебаний, а их амплитуды, и массовый коэффициент рассеяния возрастет с увеличением длины волны (рис. 57-3).

В области видимого света диффузное рассеяние на электронах и атомах переходит в рассеяние на группах молекул и на микроскопических телах (золях) размерами $a_з$. Рассматривая мутные среды применительно к рассеянию излучений оптической области спектра, следует положить

$$a = a_з \leqslant \lambda \ll l_з.$$

Используя, как и ранее, электродинамические соотношения Максвелла и Клаузиуса — Мосотти $\left(n^2 = \varepsilon;\ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\alpha;\ W = \frac{E^2}{8\pi}\right)$ и принимая во внимание, что для видимой области спектра $\nu \ll \nu_0$, для сферических центров рассеяния получаем известное соотношение Релея. Так, например, в случае линейно-поляризованных лучей при $\frac{a}{l} \ll 1$ и показателе преломления рассеивающего вещества $n < 2$ находим, что

$$I_{r,\,\varphi,\,\theta} = I_0 \frac{9\pi^2}{r^2} \frac{V^2}{\lambda^4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)^2 (1 + \sin^2\theta \cos^2\varphi), \tag{57,6}$$

где $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ — объем сферического рассеивающего элемента среды, θ — угол рассеяния в плоскости, перпендикулярной центральному лучу пучка, φ — угол рассеяния в плоскости, содержащей центральный луч пучка и электрический вектор волны (рис. 57-4).

Из выражения (57,6) следует, что при отсчете углов φ от направления падающего луча и углов θ от электрического вектора волны

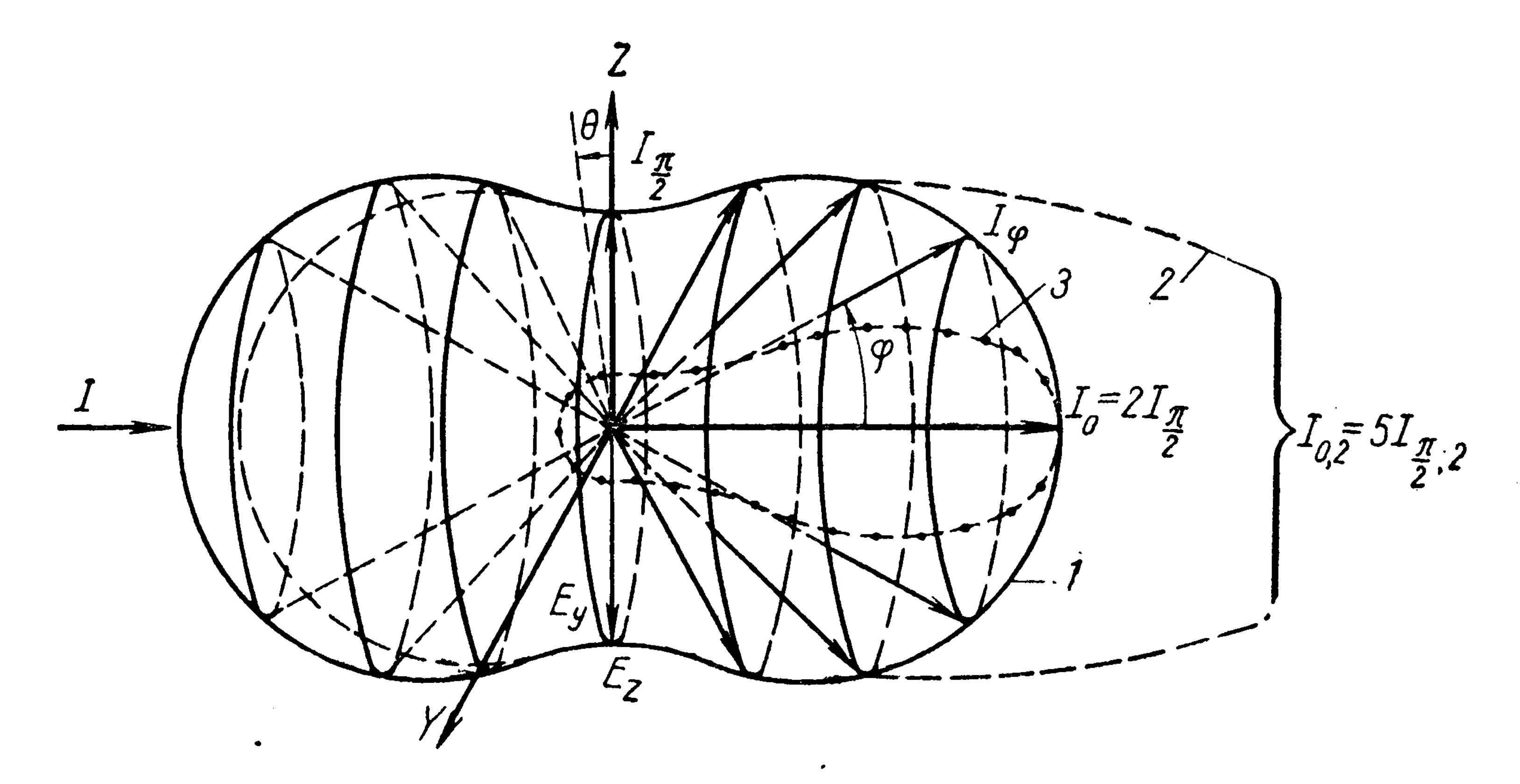


Рис. 57-2. Распределение рентгеновского и релеевского рассеяния излучений:

1 — рассеяние, согласно (57,3) и (57,7); *2* — релеевское рассеяние ($\lambda = 0{,}710$ Å в жидком мезитилене); *3* — рассеяние мягких рентгеновских лучей ($\lambda = 0{,}077$ Å) в железе

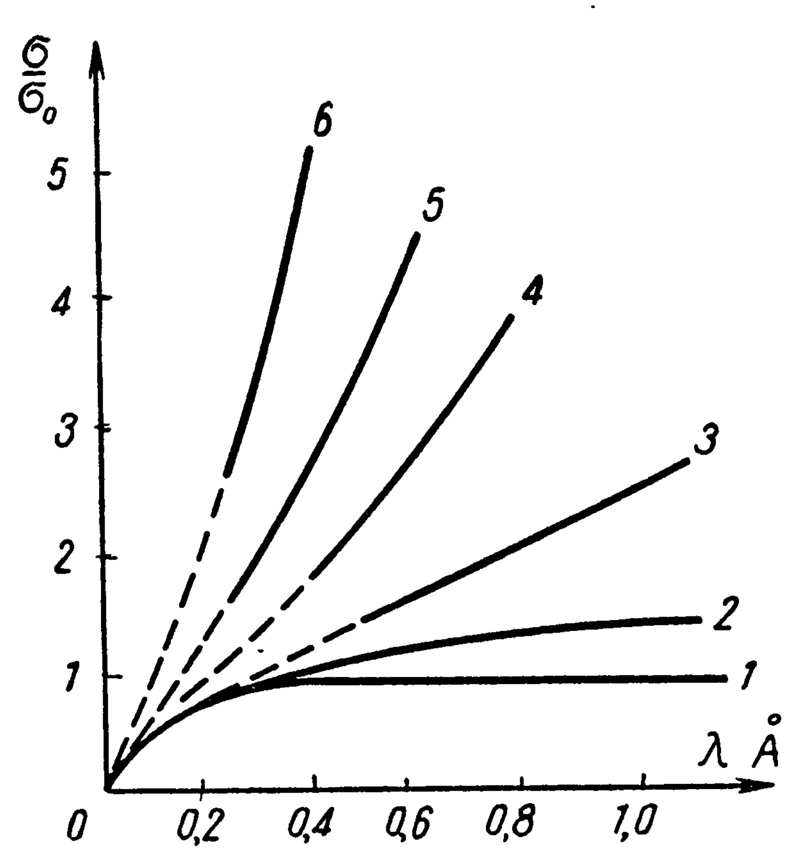


Рис. 57-3. Возрастание относительного коэффициента рассеяния рентгеновых лучей с увеличением длины волны (σ_0 — классическое значение коэффициента при когерентном рассеянии):

1 — для водорода (1); *2* — для кислорода (8); *3* — для алюминия (13); *4* — для железа (26); *5* — для серебра (47); *6* — для золота (79)

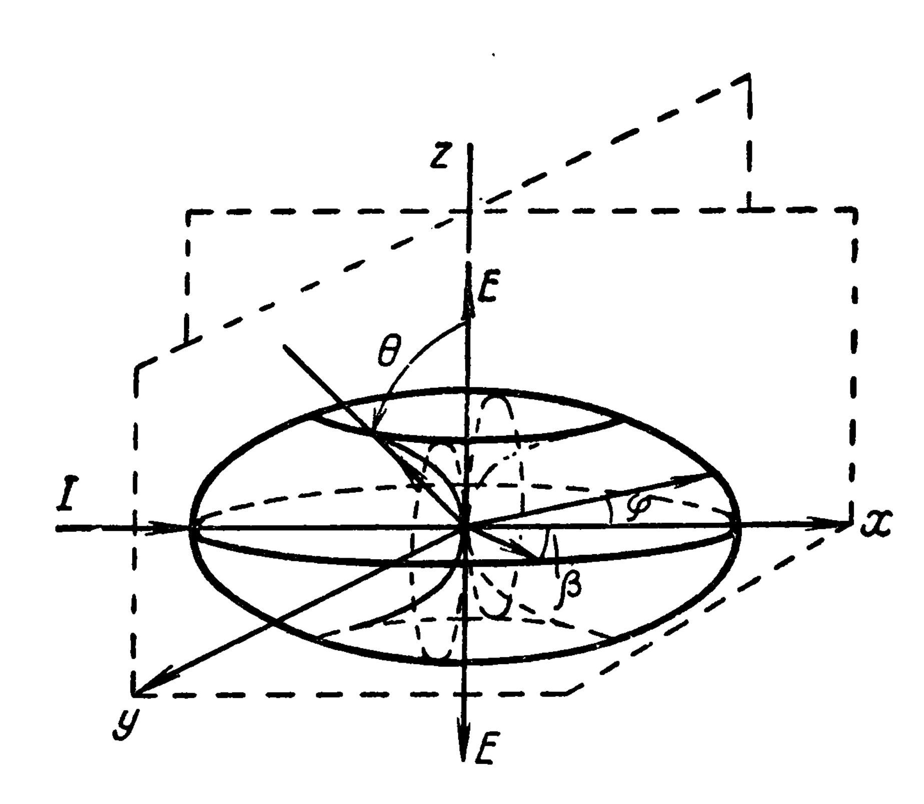


Рис. 57-4. Индикатрисса релеевского рассеяния линейно-поляризованного света от шарообразных изолированных диэлектрических частиц (φ — высотный угол; β — азимутальный угол; θ — зенитный угол)

для плоскости, перпендикулярной падающему лучу $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, интенсивность рассеянного света составит

$$I_{r,\theta} \sim \sin^2\theta;$$

для плоскости колебаний, содержащей падающий луч и электрический вектор волны ($\theta = 0$),

$$I_{r,\varphi} \sim \cos^2\varphi$$

и, наконец, для плоскости поляризации, перпендикулярной плоскости колебаний (в ней лежит магнитный вектор волны) (см. рис. 57-4)

$$I_\beta = \text{const}.$$

Для индикатриссы рассеяния естественного неполяризованного света после усреднения (57,6) по θ получим, что

$$I_{r,\varphi} = I_0 \frac{9\pi^2}{r^2} \cdot \frac{V^2}{\lambda^4} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos^2\varphi}{2}\right), \tag{57,7}$$

т. е. тот же закон, что (57,3). Эффективное сечение процесса рассеяния по Релею

$$\sigma_з = \frac{P_з}{I_0} = \frac{\int\limits_0^\pi I_{r,\varphi} \cdot 2\pi r^2 \sin\varphi \cdot d\varphi}{I_0} = 24\pi^3 \frac{V^2}{\lambda^4} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2. \tag{57,7'}$$

Таким образом, при рассеянии неполяризованного света мелкими слабо поглощающими каплями тумана ($|a_з| \ll \lambda$) интенсивность рассеянного излучения, как и сечение процесса рассеяния, прямо пропорциональна квадрату объема рассеивающей частицы — золя ($\sim V^2$) и обратно пропорциональна четвертой степени длины волны падающих лучей $\left(\sim \frac{1}{\lambda^4}\right)$. При этом рассеяние вперед и назад одинаково и в два раза больше поперечного рассеяния (см. рис. 57-2). По мере приближения размеров a рассеивающих частиц к длине волны рассеиваемого света имеется все большее отклонение рассеяния от закона Релея. Такое соотношение непригодно для ослабления излучения мутной средой, поскольку ослабление ($\mu = \tau + \sigma$) включает не только рассеяние, но и поглощение. Коэффициент ослабления μ для малых частиц пропорционален $\frac{1}{\lambda}$, а не $\frac{1}{\lambda^4}$, как это следует из формулы Релея. Для малых частиц $\left(\frac{a}{\lambda} \ll 1\right)$ коэффициент ослабления значительно превышает коэффициент рассеяния, и ослабление интенсивности света мутной средой оказывается пропорционально количеству рассеивающего вещества на пути лучей.

Можно привести примеры преимущественного рассеяния коротких волн. Голубой цвет имеет небосвод, голубоватыми представ-

ляются молочная эмульсия, табачный дым и тонкий слой кожи над венами. Вследствие преимущественного ослабления воздухом коротковолновой (синей) части солнечного спектра солнце на закате кажется менее ярким и более красным.

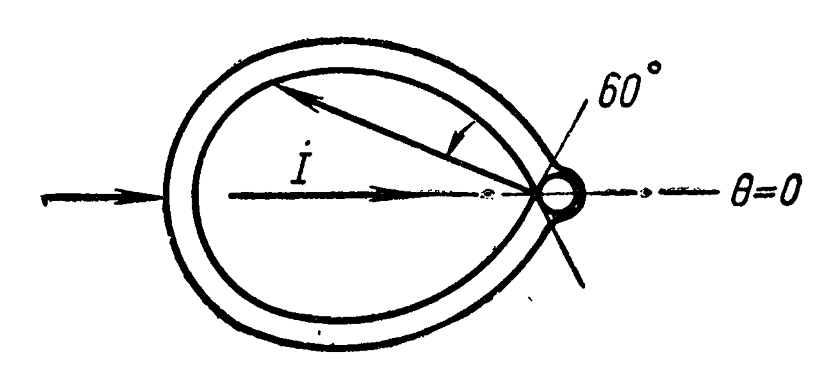


Рис. 57-5. Индикатрисса рассеяния полностью отражающей частицы.

Внутренняя кривая относится к линейно-поляризованному свету $I_{\theta=0} = 0{,}1\, I_{\theta=\pi}$

В выражения (57,7) и (57,7′) входит показатель преломления рассеивающего вещества n. В общем случае любой рассеивающей среды он является комплексной величиной (см. 55,6), так что $n' = n - j\varkappa$, причем мнимая часть этой величины учитывает поглощение излучения веществом.

Таким образом, коэффициент ослабления света мутной средой зависит как от размеров рассеивающих центров, так и от электрических параметров рассеивающего вещества — диэлектрической проницаемости и электрической проводимости среды. Например, рассеяние ультракоротких радиоволн металлами, сегнетоэлектриками и ферромагнетиками. Интенсивность рассеянного излучения при этом зависит от размеров рассеивающего тела и длины радиоволны согласно закону Релея (пропорционально v^2 и $\frac{1}{\lambda^4}$), однако угловое распределение рассеянного излучения (рис. 57-5) резко отличается от симметричного релеевского с преимущественным распространением в сторону, противоположную падающим лучам (томсоновское рассеяние).

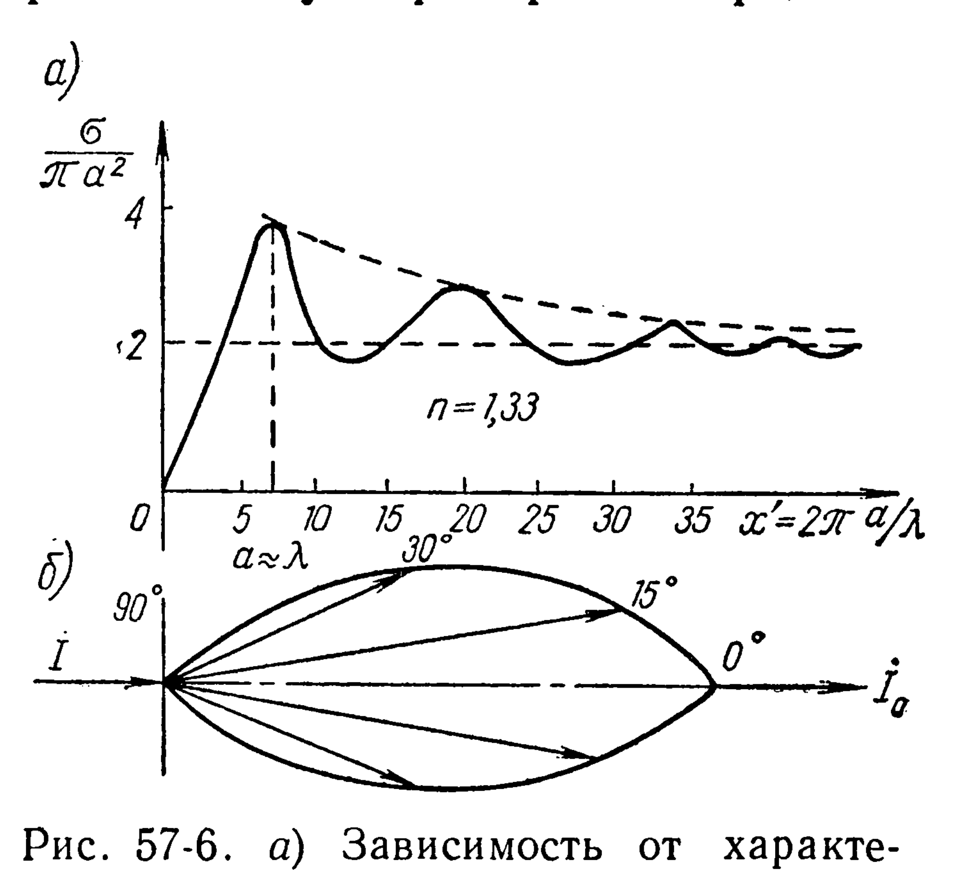


Рис. 57-6. *а*) Зависимость от характеристического параметра x' коэффициента рассеяния для капель воды при $\frac{a}{\lambda} \gg 1$. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$ ($\lambda = 0{,}6$ *мк*);
б) суммарная индикатрисса преломленного и отраженного каплей света ($x' \gg 1$)

Рассеяние на объектах, для которых $\frac{a}{\lambda} \gg 1$ (большие тела), определяется общими законами геометрической оптики. Ход изменения сечения рассеяния и общий вид индикатрисс рассеяния приведены на рис. 57-6. Как видно, эффективное сечение рассеяния с возрастанием линейного характеристического параметра рассеяния $x' = 2\pi \frac{a}{\lambda}$ стремится к некоторому предельному значению $\sigma = 2\pi a^2$,

причем рассеянное излучение направлено преимущественно вперед. В тропосфере земной атмосферы всегда имеются турбулентные неоднородности, связанные с резкими изменениями скоростей воздушных потоков. Их линейные размеры лежат в границах от $a = 10$ *см* до $a = 10$ *м*. В связи с локальным изменением температуры и плотности воздуха в областях, размеры которых $a' \ll a$, изменяется показатель преломления на величину порядка

$$\Delta n = 2 \cdot 10^{-6} \Delta T.$$

Ультракороткие радиоволны с длиной волны $\lambda < 10$ *см* претерпевают на таких турбулентных образованиях рассеяние при условиях, когда $\frac{a}{\lambda} > 1$, но $\frac{a'}{\lambda} < 1$. При этом соблюдается закон релеевского рассеяния $\left(\sim \frac{1}{\lambda^4}\right)$, так что эффективное сечение рассеяния представится в виде

$$\sigma_a = k \frac{a^3}{\lambda^4} \Delta n^2. \quad (57,8)$$

Например, для $\lambda = 0{,}3$ *см* линейный коэффициент рассеяния, или эффективное сечение рассеяния единицей объема турбулентной неоднородности, составляет $\sigma = 10^{-8}$ *см*$^{-1}$.

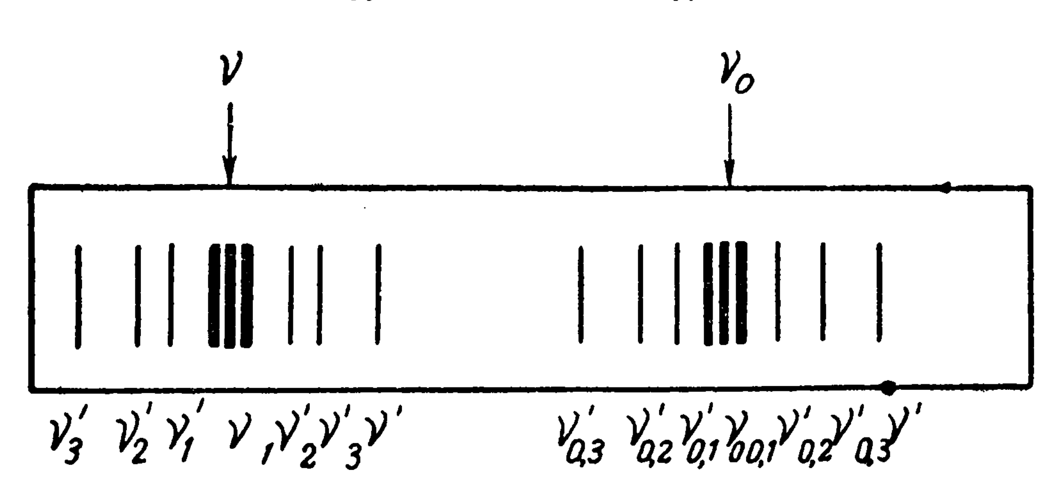


Рис. 57-7. Схема линий рекомбинационного рассеяния (жирные штрихи соответствуют нормальному рассеянию):

$\nu'_k > \nu$ — антистоксовы линии; ${}_k\nu' > \nu$ — стоксовы линии; $(\Delta\nu)_0 = \Delta\nu = {}_k\nu' - \nu$

Сравнение различных случаев рассеяния излучений показывает, что для рентгеновского и гамма-излучений все среды, содержащие атомы и молекулы, являются мутными, в то время как для оптического диапазона излучения и радиоволн среды обладают «окнами» спектрального пропускания, в которых коэффициент рассеяния прозрачных для видимых лучей сред значительно меньше, чем для рентгеновского и гамма-излучения. Например, коэффициент рассеяния радиоволн ($\lambda = 21$ *см*) воздухом составляет $\sigma = 10^{-8}$ *см*$^{-1}$ по сравнению с $\sigma = 10^{-5}$ *см*$^{-1}$ для гамма-лучей.

Случай некогерентного рассеяния на молекулах представляет так называемое комбинационное рассеяние, или эффект Рамана — Мандельштама. Эффект заключается в том, что при рассеянии света жидкостями в спектре рассеянного излучения, кроме нормальных, рассеянных жидкостью монохроматических лучей первичного спектра вещества, например ртути, наблюдаются слабые группы линий (ν'_k), расположенных симметрично относительно нормальных (ν_k) (рис. 57-7). По Раману, частотные разности $\nu - \nu'_k = \Delta\nu_k$ не зависят от первичного источника освещения, но являются характерными для рассеивающего вещества и численно совпадают с частотами полос поглощения вещества в близкой инфракрасной об-

ласти. Как и в случае Комптон-эффекта, наблюдаемого в области рентгеновского излучения, комбинационное рассеяние на молекулах объясняется квантовой природой излучений. При взаимодействии кванта излучения ($h\nu$) с молекулой вещества на основании закона сохранения и преобразования энергии имеем:

$$W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} + h\nu = W'_{\text{кин}} + W'_{\text{пот}} + h\nu', \qquad (57,9)$$

где W обозначает энергию молекулы. Так как масса молекулы во много раз превышает массу фотона, равную

$$m_{\text{ф}} = \frac{h\nu}{c^2},$$

то можно считать, что $W_{\text{кин}} = W'_{\text{кин}}$ и, следовательно,

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \frac{W'_{\text{пот}} - W_{\text{пот}}}{h}. \qquad (57,10)$$

Таким образом, если $W'_{\text{пот}} > W_{\text{пот}}$, т. е. если молекула в процессе рассеяния поглощает часть энергии, принимаемой квантом излучения, то $\Delta\nu > 0$ и, значит, рассеиваемый молекулой свет будет иметь частоту $\nu' < \nu$ или длину волны $\lambda' > \lambda$, что соответствует основному закону фотолюминесценции — закону Стокса. В противоположном случае, когда $W'_{\text{пот}} < W_{\text{пот}}$, т. е. при рассеянии на возбужденных молекулах, квант вторичного рассеянного излучения превысит квант первичного падающего излучения ($\Delta\nu < 0$) и, следовательно, $\nu' > \nu$ или $\lambda' < \lambda$. Возникает антистоксово комбинационное рассеяние.

Потенциальная энергия молекулы складывается из трех составляющих:

$W_{\text{эл}}$ — энергии электронной оболочки молекулы,

$W_{\text{рот}}$ — энергии ротации (вращения) атомов в молекуле,

$W_{\text{виб}}$ — энергии вибрации (колебания) атомов в молекуле,

так что

$$W_{\text{пот}} = W_{\text{эл}} + W_{\text{рот}} + W_{\text{виб}}. \qquad (57,11)$$

При поглощении инфракрасного излучения можно полагать, что $W_{\text{эл}} = W'_{\text{эл}}$ и тогда

$$\Delta\nu = \frac{W'_{\text{рот}} - W_{\text{рот}}}{h} + \frac{W'_{\text{виб}} - W_{\text{виб}}}{h} = \nu_{\text{рот}} + \nu_{\text{виб}}. \qquad (57,12)$$

Таким образом, величина изменения частоты $\Delta\nu$ при комбинационном рассеянии определяет уровни ротационной и вибрационной энергии молекул. Эффект Рамана—Мандельштама позволяет выяснить такие величины, характеризующие структуру молекул, как расстояния между атомами в молекулах, силы взаимодействия между ними и момент инерции молекулы.

Вместе с тем эффект Рамана—Мандельштама переносит спектральные наблюдения частотных смещений (57,12), ротационных и ротационно-вибрационных спектров молекул из трудноисследуемой инфракрасной области спектра в видимую область.

Лекция 58

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ВЕЩЕСТВА

Молекулы вещества могут быть приведены в возбужденное состояние (т. е. в состояние с потенциальной энергией, превышающей равновесную) без увеличения их средней кинетической энергии неупорядоченного движения, иначе говоря, без нагрева вещества. Возбужденное состояние молекул может быть достигнуто не только путем повышения температуры (термо), но и механическим (трибо), электрическим (электро), радиационным (фото) и химическим (хеми) воздействиями. Люминесценцией называют собственное свечение вещества в данной области спектра, если оно превосходит лучеиспускание полного излучателя в той же спектральной области и при той же температуре. По С. И. Вавилову высвечивание запасенной веществом энергии и является люминесценцией, или самосвечением вещества.

Люминесцирующее вещество (люминофор) задерживает часть поглощаемой извне энергии в форме энергии возбужденного состояния молекул вещества и, не преобразуя ее в тепло, раньше или позже испускает эту энергию в виде собственного излучения. При любом виде люминесценции справедливы два положения: во-первых, возбудителем люминесценции может служить только тот физический агент, энергия которого в той или иной мере поглощается люминофором, и, во-вторых, излучение люминесценции есть собственное свечение вещества, не зависящее от способа его возбуждения. Спектр люминесценции вещества может быть расположен как в оптической, так и в рентгеновской области спектра электромагнитных излучений (включающего и гамма-излучения атомных ядер).

Собственное свечение вещества, сопутствующее процессу возбуждения и протекающее независимо от температуры люминофора, называют флюоресценцией (свечение газов, некоторых органических кристаллов урановых стекол, эозина). Яркость флюоресценции прямо пропорциональна интенсивности возбудителя молекул. Свечение возникает как результат перехода атомов и молекул вещества с уровня возбужденного состояния (F) на энергетически более низкий уровень основного состояния (N). При флюоресценции процесс лучеиспускания протекает в энергетически изолированных атомах и молекулах (рис. 58-1, *а*), и для него характерно относительно быстрое затухание послесвечения, подчиняющегося экспоненциальному закону мономолекулярных процессов:

$$I_t = I_0 \cdot e^{-\alpha t}, \tag{58,1}$$

где I_0 — начальная интенсивность послесвечения, $\alpha = \frac{1}{\tau}$ — вероятность соответствующих энергетических переходов. При $t = \tau$ $\frac{I_0}{I_\tau} = e$. Это время τ называют длительностью возбужденного

состояния молекул люминесцирующего вещества. Для флюорофоров в большинстве случаев τ лежит в границах от 10^{-7} до 1 *сек*.

Фосфоресценция отличается от флюоресценции тем, что возбужденная молекула фосфора не сразу переходит в свое основное энергетическое состояние, а некоторое время удерживается в метастабильном состоянии с энергией, несколько меньшей энергии возбужденного состояния. Величину $\varepsilon_а = E_F - E_м$ (рис. 58-1, *б*) называют энергией активации фосфора.

Возбужденные атомы и молекулы остаются в метастабильном состоянии до тех пор, пока в результате беспорядочного движения

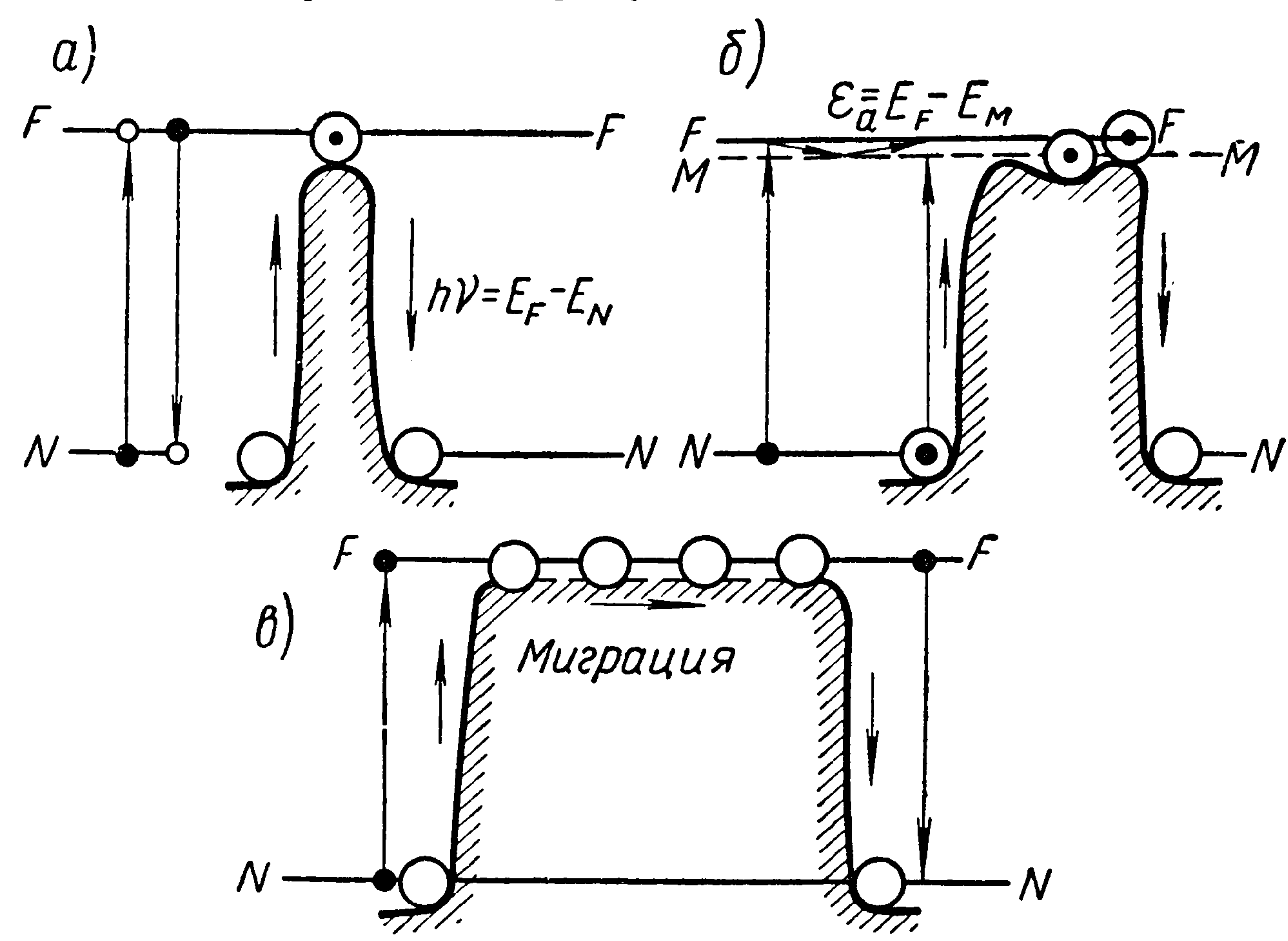


Рис. 58-1. Схемы энергетических возбуждений люминесценции: *а*) флюоресценция. Мономолекулярный процесс. Накопления возбуждения нет; *б*) фосфоресценция. Мономолекулярный процесс. Имеется накопление возбужденных состояний; *в*) рекомбинационное высвечивание. Бимолекулярный процесс. Имеется миграция энергии

молекул вещества или в результате поглощения ими энергии инфракрасного или другого электромагнитного излучения, так же как и энергии ультразвуковой волны (стимулирующие факторы), им не будет сообщена энергия активации $\varepsilon_а$, необходимая для высвечивания. На этом явлении основана работа оптических квантовых генераторов излучений. В отличие от флюорофора, фосфор запасает энергию (световую сумму) до некоторого предела (до насыщения), определяемого содержанием в нем активированных молекул (фосфорогенов). Насыщение может быть достигнуто как малой интенсивностью возбуждения в течение длительного времени, так и большой интенсивностью за короткое время. Высвечивание световой суммы, запасенной в метастабильных состояниях возбужденных молекул фосфора, при комнатной температуре и больших значениях $\varepsilon_а$ может происходить крайне медленно в течение нескольких

месяцев. Высвечивание кристаллофосфором световой суммы происходит от тепловых колебаний узлов решетки, но оно может быть ускорено под влиянием иных нетемпературных факторов, например колебаний электромагнитного поля. Форсированным применением инициирующих воздействий достигаются импульсные вспышки фосфоров в так называемых лазерах.

Световые усилители через радиацию (лазеры), иначе называемые квантовыми генераторами излучений, так же как и микроволновые усилители через радиации (мазеры) работают на принципе индуцирования люминесценции. Квантовые генераторы могут быть выполнены из вещества, находящегося в любом агрегатном состоянии. Например, рубиновый квантовый генератор представляет собой кристалл окиси алюминия (Al_2O_3), активированной хромом (Cr), решетка которого изоморфна с решеткой корунда. Кристалл помещен в цилиндре с отражающими стенками. Возбуждение атомов хрома осуществляется светом длины волны 5600 Å, излучаемым импульсными лампами (в составе их смешанного спектра), или с помощью вспомогательных газовых квантовых генераторов монохроматического излучения. Запасенная атомами хрома (рис. 58-1, *б*) световая сумма спонтанно высвечивается ими ($\lambda = 6943$ Å). Фотон, испущенный одним атомом Cr, резонансно индуцирует высвечивание ближайшего атома, так что при многократных отражениях фотонов от фокусировочных параллельных торцевых зеркал происходит быстрое нарастание фотонной лавины (раскачка). В результате острой фокусировки излучения атомов в цилиндрическом световоде из выходного окна генератора вырывается поток излучения большой интенсивности. Мощность излучения достигает нескольких киловатт. Однако из-за балластного света ламп подкачки кристалл рубина перегревается даже при работе с частотой в несколько импульсов в минуту и требует охлаждения. Газовые квантовые генераторы свободны от этого недостатка. В них возбуждение и индуцирование люминесценции производится с помощью высокочастотного ($f = 30$ *Мгц*) тлеющего разряда (50 *вт*) в газовой смеси инертных газов (например, гелия и неона или гелия и ксенона). Мощность испускаемого инфракрасного ($\lambda = 11530$ Å) излучения невелика ($\sim 0{,}01$ *вт*), но такой генератор имеет непрерывное действие и усиливает световые сигналы в 10^5 раз.

В отношении мощности испускаемого излучения, его монохроматичности и непрерывности действия большие преимущества имеют полупроводниковые и жидкостные квантовые генераторы. В последних возможно использование химического способа возбуждения люминесценции. Квантовые генераторы применяются в качестве источников строго монохроматического излучения ($\Delta\lambda = \pm 0{,}02$ Å) большой интенсивности и в качестве усилителей сигналов в локационных устройствах. Их свойства позволяют осуществить сверхдальние телефонные связи и испускаемые ими остро направленные потоки энергии излучения высокой интенсивности

вызывают высокотемпературный локальный нагрев вещества, поглощающего энергию этого излучения.

Фосфоресценция в чистом виде представляет собой мономолекулярный процесс и, следовательно, статистически затухание послесвечения также происходит по экспоненциальному закону, однако коэффициент затухания резко возрастает с повышением температуры.

Разновидностью люминесценции является рекомбинационное свечение люминофора. Оно возникает в тех случаях, когда в результате поглощения энергии активирующего процесса электроны молекул или узлов решетки кристалла оказываются полностью освобожденными от связей, иначе говоря, переведенными в зону проводимости кристаллов.

Рекомбинационное высвечивание возникает при соединении электронов с возбужденными молекулами (рис. 58-1, *в*).

Этот процесс является типично бимолекулярным, поэтому интенсивность его пропорциональна квадрату числа возбужденных центров n в единице объема вещества. Таким образом, затухание послесвечения в этом случае люминесценции подчиняется гиперболическому закону:

$$I_t = I_0 \frac{1}{(1 + bI_0t)^2}, \tag{58,2}$$

где b — характеристический множитель, зависящий от температуры; I_0 — начальная интенсивность послесвечения. При достаточно больших значениях начальной интенсивности высвечивания I_0 закон затухания рекомбинационного свечения может быть представлен в виде

$$I_t = I_0 \frac{a}{t^2} = aI_0t^{-2},$$

или

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{a}{t^2}. \tag{58,3}$$

Подобный закон характерен для тех кристаллофосфоров, у которых поглощение энергии возбудителя происходит во всей решетке, а высвечивание — в локализованных центрах, т. е. для тех случаев, когда место акта поглощения удалено от места акта высвечивания. Иначе говоря, у таких кристаллофосфоров наблюдается миграция, или блуждание энергии. При этом в процессе люминесценции участвуют не изолированные атомы или молекулы, а многие тысячи их и даже вся решетка кристаллофосфора (Ленардовы фосфоры).

Все три вида люминесценции: флюоресценция, фосфоресценция и рекомбинационное свечение — могут протекать одновременно, создавая смешанный сложный закон затухания высвечивания.

На процесс люминесценции могут также накладываться дополнительные явления, такие, как химические реакции в веществе

люминофора (старение), гашение люминесценции примесями или инфракрасным излучением и воздействие переменными электрическими полями (усиление высвечивания).

При возбуждении люминофора в зависимости от его состава, структуры и квантов энергии возбудителя наблюдаются три вида химических превращений люминесцирующих молекул. При наличии химически активного вещества происходит тушение люминесценции либо вплоть до ее полной потери (устойчивые продукты реакции), либо до временной «усталости люминофора», восстанавливаемой в темноте. Диссоциация возбужденных молекул также приводит к потере флюоресценции. Такого рода процесс не зависит от наличия в люминофоре реагирующих посторонних молекул (например молекул кислорода). Наконец, при возбуждении люминесценции кристаллофосфоров корпускулярным излучением возможны местные разрушения решетки, вызывающие уменьшение яркости высвечивания (временное или устойчивое в зависимости от продолжительности действия возбудителя).

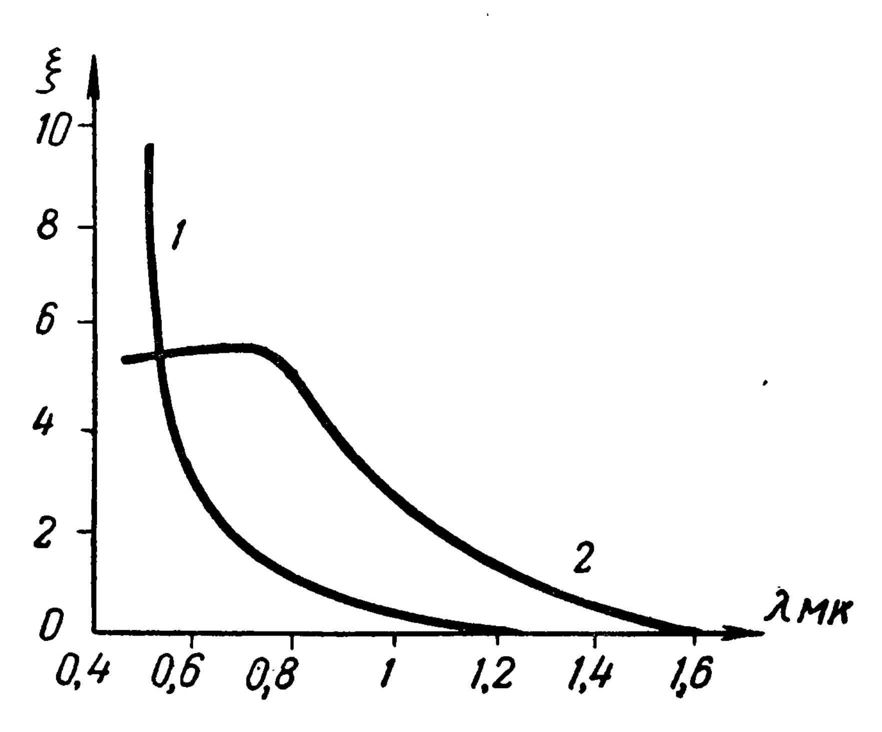


Рис. 58-2. Гашение α-люминесценции (CaSBi — α):

1 — ускорение затухания тушением возбужденных состояний. 2 — ускорение затухания высвечиванием возбужденных состояний (ξ — произвольные относительные единицы)

Гасящее действие инфракрасного излучения (рис. 58-2), оказываемое на люминесценцию, свидетельствует о наличии у возбужденных молекул фосфора полос поглощения, отсутствующих у невозбужденных молекул. Квант энергии далекой инфракрасной области спектра, поглощенный молекулой, которая находится в возбужденном метастабильном состоянии, не изменяет ее кинетической энергии настолько, чтобы мог произойти обмен энергиями с другими молекулами за время, более короткое, чем длительность возбужденного состояния молекулы. Это значит, что поглощенный квант энергии послужит стимулятором к высвечиванию фосфора. Однако поглощенные кванты энергии излучений, близкой к инфракрасной области, приводят к локальному повышению температуры (рис. 58-3), вызывающему потерю возбужденных состояний, т. е. к тушению высвечивания. Оба фактора (стимуляция и гашение) действуют одновременно и приводят к ускорению затухания высвечивания, т. е. к его гашению.

Важное практическое значение имеет фото- и электролюминесценция. При фотолюминесценции, т. е. при условии $\frac{\varepsilon_{\lambda,\,т}}{a_{\lambda,\,т}} > E_{\lambda,\,т}$, где $E_{\lambda,\,т}$ — энергия температурного излучения полного излучателя

в спектральной области λ при температуре T, справедливо правило Стокса, по которому $h\nu_в > h\nu_п$, или длина волны излучения люминесценции $\lambda_л$ всегда больше длины волны возбуждающего излучения $\lambda_в$ (исключение составляют случаи антистоксового комбинационного рассеяния).

Для сложных спектров поглощения и испускания люминофоров то же правило может быть сформулировано в ином виде. Центр спектральной плотности излучения фотолюминесценции всегда приходится на большую длину волны по сравнению с длиной волны, соответствующей центру спектральной плотности возбуждающего излучения. При этом приближенно соблюдается правило симметрии (правило Л. В. Левшина), по которому спектр люминесценции является зеркальным отражением спектра поглощения (рис. 58-4).

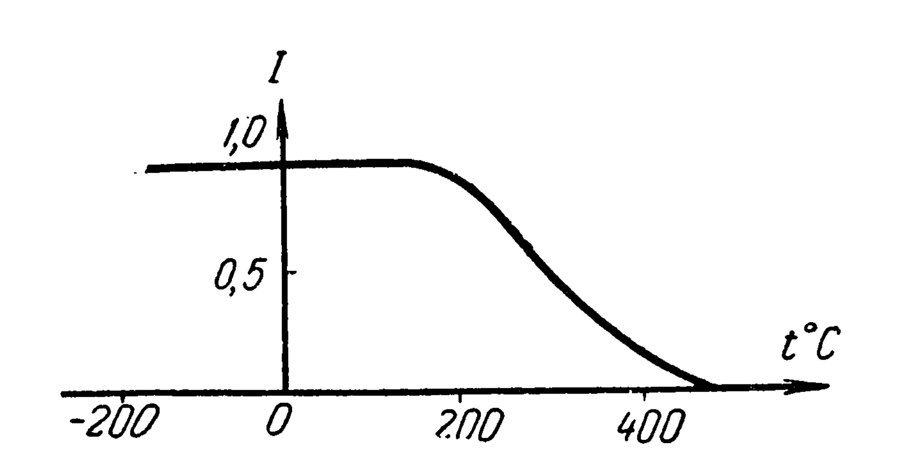


Рис. 58-3. Зависимость относительной яркости люминесценции от температуры α-люминофора (ZnSCu — α)

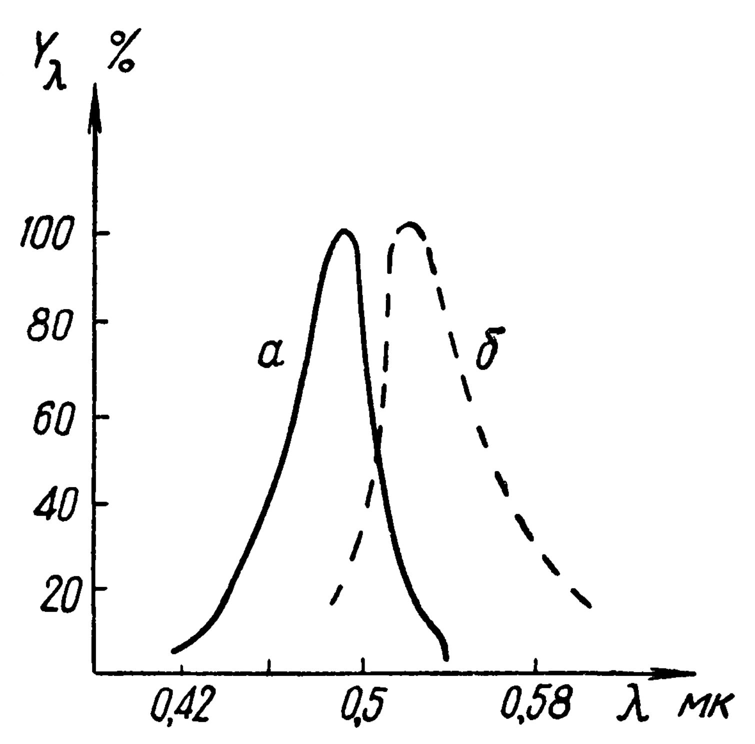


Рис. 58-4. Зеркальные спектры поглощения (*а*) и люминесценции (*б*) флуоресцеина

Обозначая через N число квантов энергии, через $Q = \frac{N_л}{N_в}$ — квантовый выход и через $\Phi = \frac{W_л}{W_в}$ — энергетический выход фотолюминесценции, можем записать, что

$$\Phi = \frac{h\nu_л}{h\nu_в} \cdot \frac{N_л}{N_в} = \frac{\lambda_в}{\lambda_л} Q. \qquad (58,4)$$

Так как поглощенный квант излучения не возбуждает более одной молекулы люминофора, то даже при $Q = 1$ энергетический выход $\Phi < 1$. Таким образом, с энергетической точки зрения желательно, чтобы отношение $\frac{\lambda_в}{\lambda_л}$ не было слишком мало или, иначе, чтобы излучение, возбуждающее видимое свечение, не лежало слишком далеко в ультрафиолетовой области спектра.

Фотолюминесценция используется в установках для оптических квантовых генераторов (лазерах) и при анализе состава неорганических и органических веществ. Относительно немногочисленные спектры люминесценции жидких и твердых тел настолько харак-

терны, что при анализе на чистоту вещества их можно с уверенностью относить к определенному веществу. Флюоресцентный анализ имеет ряд преимуществ: возможность анализа относительно нестойких соединений, которые разрушались бы при электрическом разряде или при нагревании; возможность применения значительно меньших количеств вещества, чем при абсорбционном анализе. При количественном флюоресцентном анализе нельзя считать, что интенсивность свечения точно прямо пропорциональна концентрации активного вещества. Правильные результаты могут быть получены только по градуировочным кривым, построенным по температуре. Широкое применение имеет фотолюминесцентный технический анализ самых разнообразных материалов в исследовательских целях, например для наблюдения микробиологических объектов, для обнаружения изменений вещества (окисление, старение), для обнаружения различных изъянов, пятен и фальсификации в документах, для распознавания различной маркировки, для обнаружения и исследования различных гидросвязей (в реках, озерах, кроветоках и в растениях).

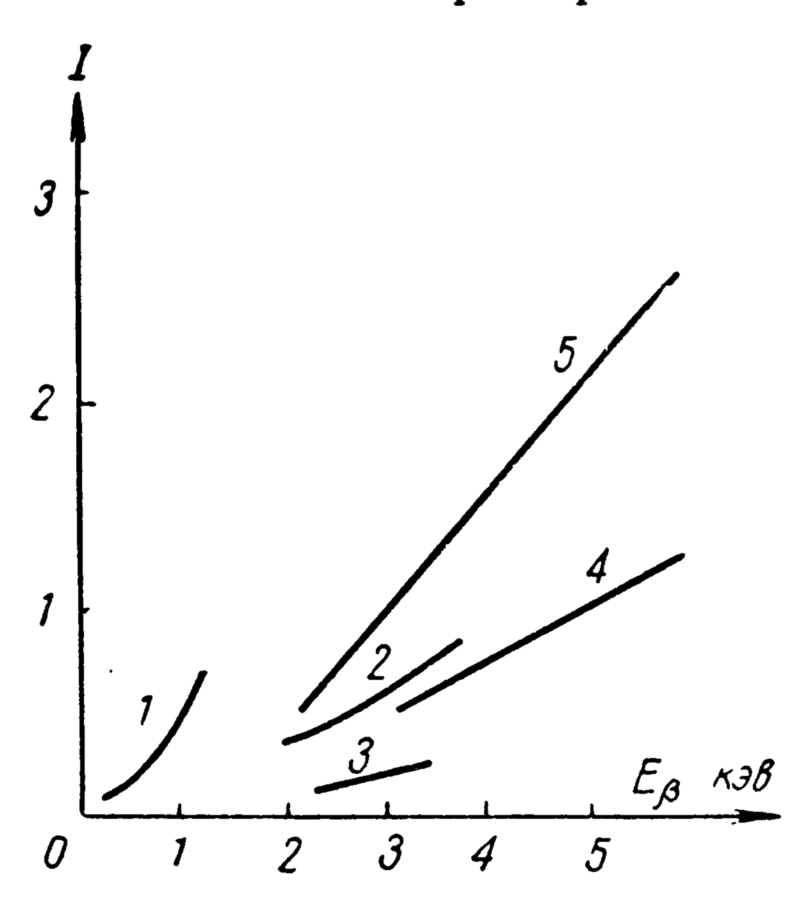


Рис. 58-5. Зависимость свечения кристаллофосфорных экранов от энергии падающих электронов:

1 — для силиката цинка $ZnSiO_4Mn$ при $i = 10^{-3}a$; *2* — для сульфида цинка (ZnS) при $i = 10^{-4}a$; *3* — для сернистого цинка-кадмия (ZnCdSCu) при $i = 10^{-4}$ a; *4* — для силиката цинка при $i = 10^{-4}a$; *5* — для силиката цинка при $i = 2 \cdot 10^{-4}$ a

Хорошо известно применение фотолюминесценции для экранов путем использования светящихся составов. При этом светимость органических неустойчивых на свету красок составляет (500 ÷ 3000) микроламбертов $= (5 \div 30) \frac{лм}{м^2}$, в то время как устойчивые неорганические светящиеся краски дают светимость, в сотни раз меньшую.

Экраны, флюоресцирующие под действием излучений (например, рентгеновского или гамма-излучений) или под воздействием потока электронов (телевизионные экраны), известны из их повседневного применения (дефектография, медицинская рентгенодиагностика, телевизоры).

Для электролюминесценции основной зависимостью является соотношение между интенсивностью свечения экрана и плотностью потока электронов заданной энергии.

Плотность электронного потока определяется плотностью тока i, а энергия электронов — разгоняющей разностью потенциалов U, поэтому

$$I_п = ai_э (U - U_0)^n, \quad (58,5)$$

где U_0 — пороговое значение разгоняющей разности потенциалов для данного люминофора, равное $(10 \div 100)$ *в*, $n = 1 \div 3$ — показатель, зависящий от энергии электронов (рис. 58-5), a — коэффициент, зависящий от выбора единиц измерений. Энергетический выход электролюминесценции экранов не превышает 10%. В зависимости от назначения кристаллофосфоры представляют собой сульфиды цинка (ZnS, ZnSCu, ZnSAg), кадмия (ZnCdSAg), применяемые для радиоактивных красок, рентгеновских и телевизионных экранов визуального наблюдения (4600÷5200 Å); вольфраматы кальция (шеслит $CaWO_4$), кадмия ($CdWO_4$) — для усиливающих экранов (4200 ÷ 4800 Å); силикаты цинка и кадмия, активированные марганцем ($ZnSiO_4Mn$), ($Cd\ SiO_4\ Mn$), — для люминесцентных ламп (5300÷6000 Å); рубины (Al_2O_3Cr), обладающие большим запасом световой суммы, — для сцинтиллирующих кристаллофосфоров Ленарда; урановые стекла — для индикаторов ультрафиолетового излучения и оболочек газоразрядных трубок.

Среди прочих люминесцирующих веществ применяются органические фосфоры (сцинтилляторы), борные фосфоры Видемана (длительное послесвечение), молекулярные двойные соли типа $MePt(CN)_4 \cdot 4H_2O$, например платиносинеродистый барий, и минералы.

Лекция 59

АТОМНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ

К спектрам люминесценции относятся и линейчатые характеристические спектры атомов, состоящие из серий спектральных линий, расположенных по всему спектру электромагнитных излучений от далекой инфракрасной области до жестких рентгеновых лучей. Каждую серию составляет группа линий, одинаково изменяющихся при перемене условий возбуждения спектра. Со стороны коротких длин волн линии спектральных серий (рис. 59-1) располагаются близко друг к другу, и место расположения самой коротковолновой из этих линий определяет границу, или голову серии.

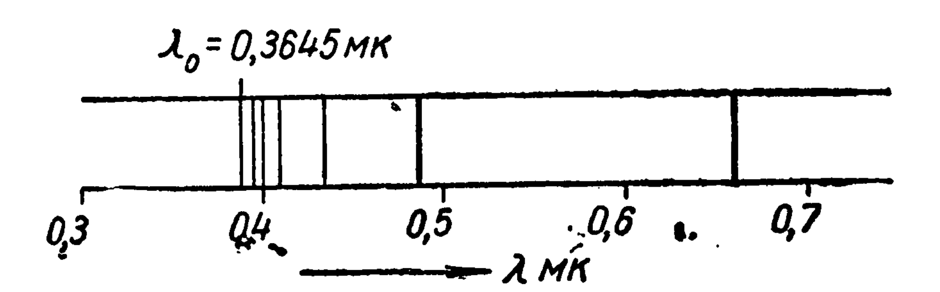


Рис. 59-1. Серия спектральных линий в видимой части водородного спектра — серия Бальмера $\left(\lambda_0 = \frac{4}{R} = 0{,}3645\ \textit{мк}\right)$

Наиболее простым атомным спектром является спектр атома водорода, имеющего в оболочке единственный электрон. Для спектра водорода с поразительной точностью оказалась справедлива эмпирическая сериальная формула Бальмера — Ридберга, имеющая вид

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R}{k^2} - \frac{R}{n^2}, \qquad (59,1)$$

где $R = 109678$ $см^{-1}$ — так называемая постоянная Ридберга, k и n — два значения целого квантового числа. Каждой серии водородного спектра соответствует одно и то же значение k, а каждой i-й линии серии — определенные значения целого числа $n_i > k$.

Для известных пяти серий водородного спектра квантовые числа имеют следующие значения:

		K	n_i		
Серия	Лаймана	1	2,3,4	Ультрафиолетовая	область
»	Бальмера	2	3,4,5	Видимая	»
»	Пашена	3	4,5	Инфракрасная	»
»	Брэккэта	4	5,6	»	»
»	Пфунда	5	6,7	Далекая инфракрасная	»

Формула Бальмера — Ридберга была объяснена Н. Бором на основании динамической модели атома и представлений о квантовании действия и энергии. В теории Бора используются термины и соотношения классической механики, между тем как электрон, являясь микрообъектом, подчиняется не классической, а квантовой механике. Подобное обстоятельство заставляет рассматривать элементарную теорию водородного атома по Бору лишь как некоторое наглядное приближение к адэкватному отображению структуры атома. Теория базируется на постулате о природе сил, удерживающих электрон на орбите, по которой он обращается, и на постулатах о квантовании орбит и о квантовании излучаемой атомом энергии.

Согласно первому постулату, центростремительная сила, удерживающая орбитальный электрон, является силой электростатического взаимодействия зарядов электрона (e) и ядра атома (eZ), поэтому для круговой орбиты радиуса r_k будем иметь

$$\frac{e^2Z}{r_k^2} = \frac{m_0 v_k^2}{r_k}, \tag{59,2}$$

или

$$\frac{e^2Z}{r_k} = m_0 v_k^2,$$

или

$$|E_{кин}| = \frac{mv_k^2}{2} = \frac{1}{2}|E_{пот}|, \tag{59,3}$$

и значит,

$$E = E_{кин} + E_{пот} = \frac{1}{2}|E_{пот}| - |E_{пот}| = -\frac{1}{2}|E_{пот}| = -E_{кин}. \tag{59,3'}$$

Согласно (59,2), в атоме возможны всякие круговые электронные орбиты, так как $r_k v_k^2 = \frac{e^2Z}{m_0} = \text{const}$, и любому значению $v_k > 0$ отвечает одно определенное значение r_k и, наоборот, для всякого $r_k > 0$ может быть найдено соответствующее значение $|v_k| \neq 0$.

По второму постулату Бора о квантовании орбит число возможных орбит ограничивается квантовым соотношением. Сущность

этого постулата заключается в том, что стационарными орбитами, т. е. такими, находясь на которых движущийся электрон, несмотря на имеющееся центростремительное ускорение, не излучает энергии, будут только те, для которых потенциальная энергия электрона составляет целое число квантов энергии частоты, равной частоте обращения электрона, т. е.

$$E_{\text{пот}} = 2E_{\text{кин}} = m_0 v_k^2 = k \cdot h \cdot \nu_k, \tag{59,4}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

Так как $v_k = r_k \omega_k = 2\pi \nu_k r_k$, то после подстановки этого значения в (59,4) имеем

$$m_0 r_k v_k = k\hbar, \tag{59,4'}$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — приведенный квант действия, или приведенная постоянная Планка [см. (1, 7')].

Таким образом, условие стационарности орбит может быть сформулировано как квантовое условие, по которому момент количества движения электрона на k-й стационарной орбите должен быть кратен приведенной постоянной Планка. Кратность k есть главное квантовое число.

Третий постулат Бора о квантовании излучаемой атомом энергии относится к механизму излучения. По этому постулату атом излучает энергию только квантами и притом всякий раз, когда происходит переход электрона с одной стационарной орбиты на другую, стационарную, но с меньшей энергией, т. е.

$$h\nu_{n \to k} = E_n - E_k = -\frac{1}{2} E_{\text{п}, n} + \frac{1}{2} E_{\text{п}, k} = \\ = \frac{1}{2} e^2 Z \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_n} \right). \tag{59,5}$$

Из формул (59,4') и (59,3) имеем

$$v_k = \frac{1}{k} \frac{e^2 Z}{\hbar} \tag{59,6}$$

и

$$r_k = k^2 \frac{\hbar^2}{e^2 Z m_0}; \tag{59,7}$$

следовательно,

$$h\nu_{n \to k} = \frac{1}{2} \frac{e^4 m_0 Z^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right). \tag{59,8}$$

Теоретически полученные выражения допускают сравнение с экспериментальными данными.

Поскольку $\bar{\nu} = \frac{\nu}{c}$, из (59,8) прежде всего получаем сериальную формулу Бальмера — Ридберга:

$$\bar{\nu} = \frac{e^4 m_0}{4\pi \hbar^3 c} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), \tag{59,9}$$

где $R = \frac{e^4 m_0}{4\pi\hbar^2 c} = 109678$ $см^{-1}$, т. е. полностью соответствует экспериментальному значению постоянной Ридберга.

Полагая $n = \infty$ и $k = 1$, для работы ионизации атома водорода определяем значение $eU_i = h\nu_{гр} = Rhc = 13{,}5$ *эв*, что также находится в полном соответствии с экспериментом.

Для водородного атома ($Z = 1$), согласно (59,7), радиус основной орбиты $k = 1$ будет

$$r_k = \frac{\hbar^2}{e^2 m_0} \approx 0{,}5\ \text{Å},$$

а по формуле (59,6) линейная скорость обращения электрона

$$v_k = \frac{e^2}{\hbar} \approx 2{,}5 \cdot 10^8\ см \cdot сек^{-1}.$$

В силу сделанных допущений (круговые орбиты, единственный орбитальный электрон, классическая механика) теория Бора не

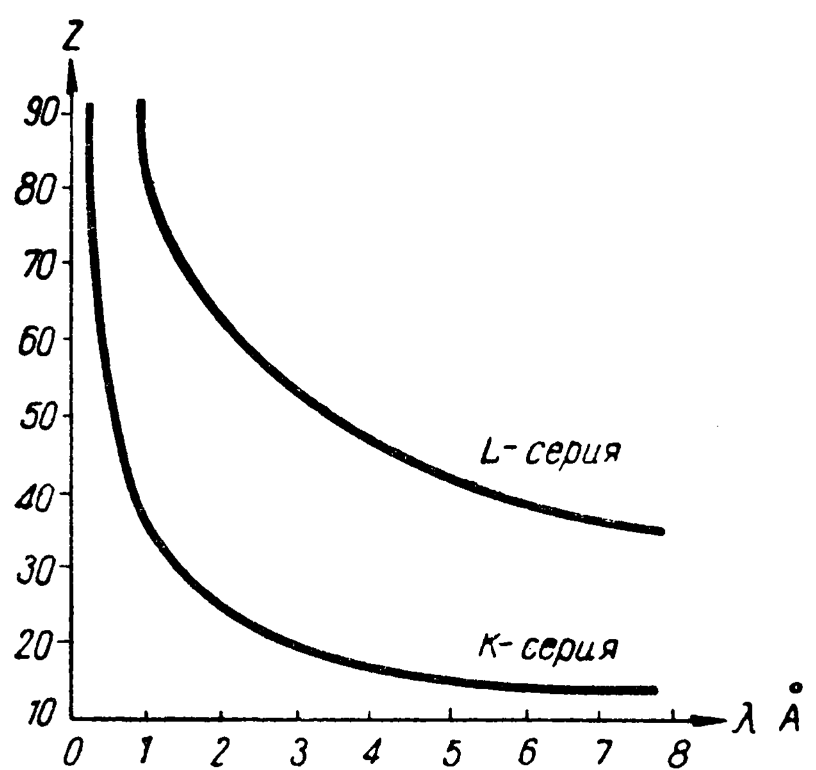


Рис. 59-2. Экспериментальные данные Мозли относительно рентгеновских характеристических спектров:

K-серия атома всегда более жесткая, чем *L*-серия; $\lambda\ (K) < \lambda\ (L)$

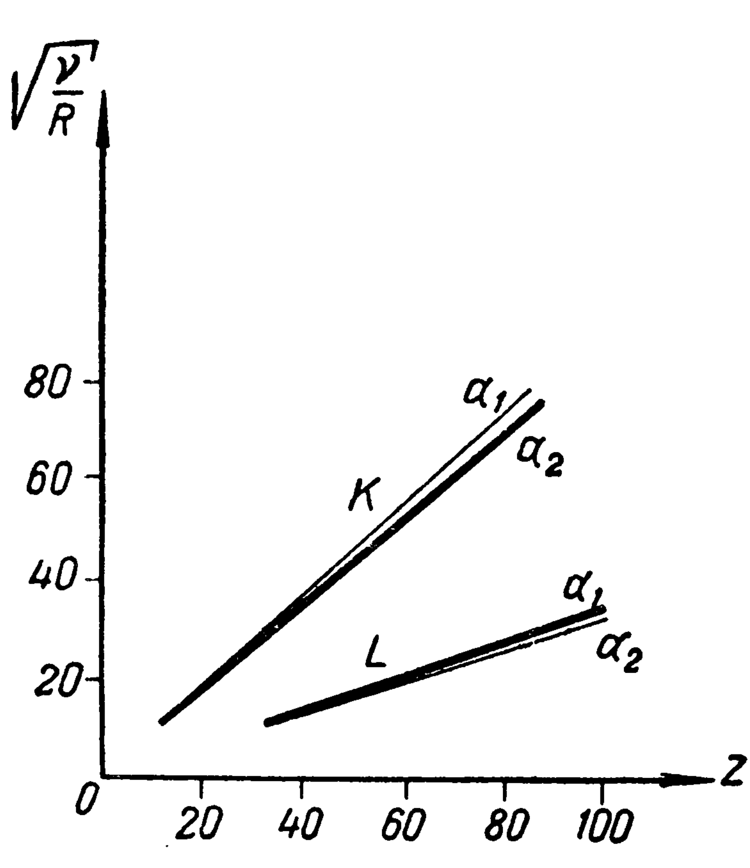


Рис. 59-3. К линейной зависимости, выражаемой спектральной формулой Мозли

может быть распространена на спектры всех атомов. Эти спектры значительно сложнее, так как состояние электрона определяется не одним главным квантовым числом, а четырьмя квантовыми числами. Однако для внутренних слоев электронной оболочки атомов вновь допустимо применение теории Бора, если только в ней будет учтено экранирующее влияние зарядов электронов остаточных слоев оболочки. Именно такой результат был получен Мозли при исследованиях характеристических рентгеновских спектров металлов (рис.59-2).

По Мозли, сериальная формула для рентгеновских характеристических спектров имеет вид (рис. 59-3)

$$\sqrt{\frac{\bar{\nu}}{R}} = a(Z - b), \qquad (59,10)$$

где b — постоянная величина для каждой серии, a — постоянная для каждой линии, R — постоянная Ридберга. Для самой коротковолновой K-серии характеристического рентгеновского спектра всех металлов $b = 1$, а для самой длинноволновой линии этой серии k_α имеем $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$, поэтому

$$\bar{\nu} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right). \qquad (59,11)$$

Подобным образом для L-серии и аналогичной L_α-линии имеем $a = \sqrt{5/36}$ и $b = 7,4$, так что

$$\bar{\nu} = R(Z-7,4)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right). \qquad (59,12)$$

Выражения (59,11) и (59,12) представляют собой спектральные формулы, подобные формуле Бальмера — Ридберга, но отличаются тем, что в них введена поправка b на электростатическое экранирование положительного заряда ядра отрицательными зарядами тех электронов, которые остаются в слоях, ближайших к ядру, после переноса электрона с данного слоя. Таким образом,

$$\bar{\nu} = R(Z-b)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n^2}\right). \qquad (59,13)$$

Сериальная формула (59,13), применимая к внутренним слоям электронных оболочек всех атомов, позволяет построить единую схему энергетических уровней для этих внутренних слоев (рис. 59-4). Приняв за единицу работу ионизации атома с самого близкого к ядру слоя K, т. е. работу перевода электрона из энергетического состояния при главном квантовом числе $n = 1$ в состояние, свободное от связей при $n = \infty$, когда энергия связи $E = 0$, можно построить уровни L, M, N и т. д. последовательно на расстоянии $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$ вниз от уровня $n = \infty$ (см. рис. 59-4).

На рис. 59-4 показаны также переходы, отвечающие возникновению серий характеристического рентгеновского спектра, подуровни энергий в слоях и наибольшее разрешенное число электронов в каждом заполненном слое. Появление рентгеновских спектральных линий является результатом перехода электрона с одного уровня энергии на другой меньшей энергии, с которого предварительно был удален электрон. Оптические же спектры возникают при переходе внешнего электрона с возбужденных уровней на нормальный внешний уровень или же на другие уровни возбуждения. Богатые линиями сложные оптические атомные спектры сильно изменяются при переходе от одного элемента к другому. Внутренние электронные слои атомов построены одинаково у всех элементов, и характе-

ристические рентгеновские спектры имеют поэтому аналогичную сериальную структуру (серии K, L, M, N). Отношение частот соответствующих линий одной и той же серии характеристического

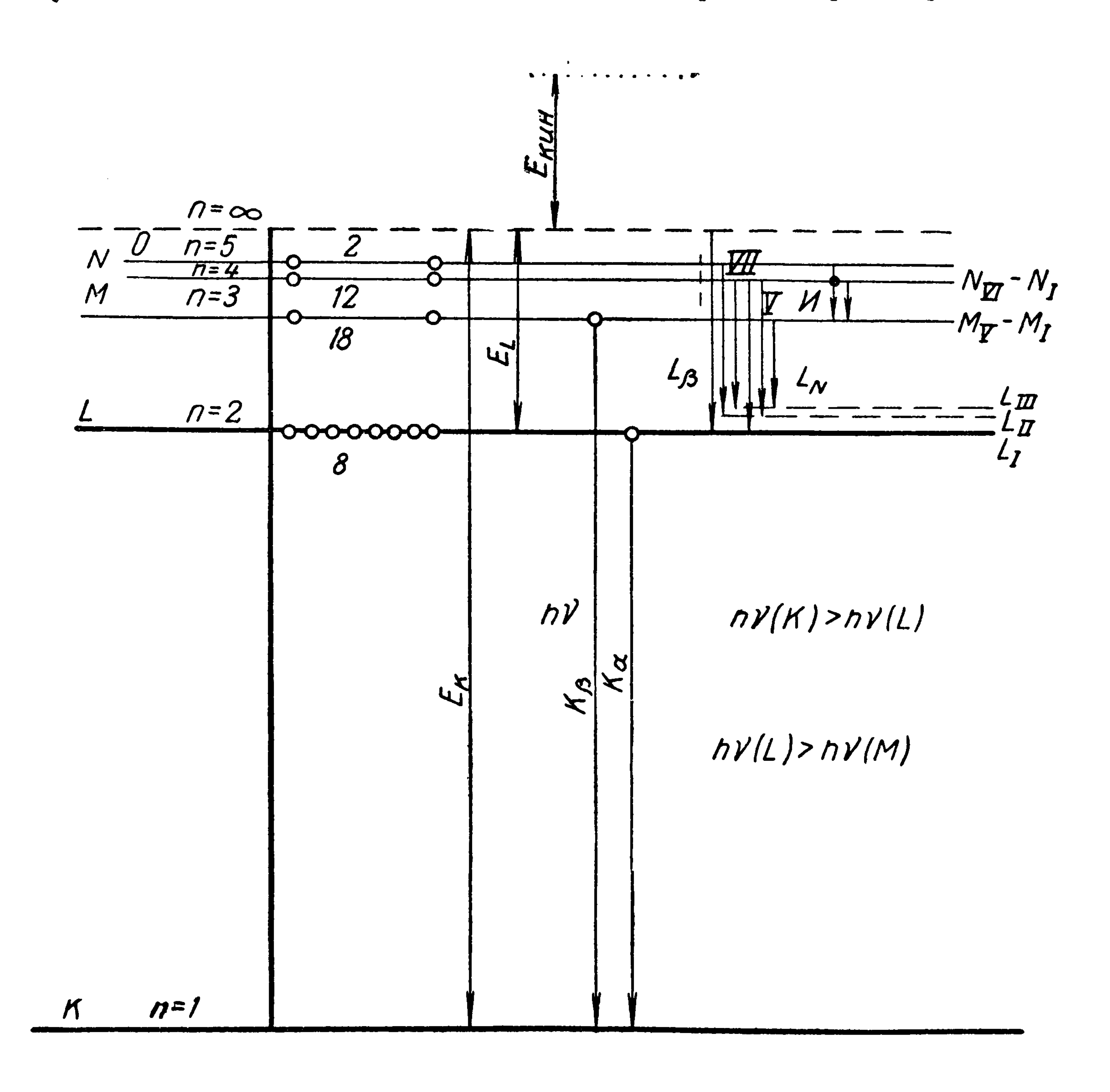


Рис. 59-4. Схема энергетических уровней внутренних слоев электронной оболочки атомов:

$E_{кин}$ — кинетическая энергия электрона, вырванного из оболочки; $E_к = eU_к$ — работа ионизации со слоя K; слой L имеет три подуровня соответственно трем возможным значениям внутреннего квантового числа; слой M — пять подуровней и слой N — семь подуровней

рентгеновского спектра различных атомов по формуле (59,13) будет равно

$$\frac{\nu(K_\alpha) Z_1}{\nu(K_\alpha) Z_2} = \left(\frac{Z_1 - b}{Z_2 - b}\right)^2. \qquad (59,14)$$

Можно отметить также, что соотношение интенсивностей первых трех линий серии K для всех атомов с $Z > 20$ устойчиво сохраняется одинаковым и приблизительно равным

$$I_{\alpha,1} : I_{\alpha,2} : I_{\beta,1} = 100:50:25.$$

Лекция 60

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В первой вводной лекции уже отмечалось, что автоматическое перенесение механических закономерностей макрообъектов на микромир означало бы пренебрежение диалектическим принципом познания природы, а именно законом перехода количественных изменений в качественные. Проявление свойств всякого физического объекта связано с тем или иным взаимодействием его с другими объектами. Однако действия квантованы и кванты действия соответствуют постоянной Планка h. Конечность значения $h = 6{,}6 \times \times 10^{-27}$ *эрг · сек* $= 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж · сек* определяет механические соотношения для микромира.

В классической механике Ньютона, оперирующей детерминантными понятиями о траектории движения частиц или тел, о скоростях и ускорениях их движений в каждый данный момент, об энергии состояния или движения, сохраняющейся в течение определенного времени, неточности, возникающие из-за конечности кванта действия h, не играют роли по причине малости его значения. При определении массы тела порядка одного грамма не имеет значения масса одной молекулы или при стрельбе снарядами — отклонения попаданий от центра мишени на размер одного атома. Подобно этому квантовые неточности, связанные с конечностью значения h, не вызывают в механике макротел сколько-нибудь заметных неопределенностей.

Однако в механике микрочастиц нельзя пренебрегать конечностью значения кванта действия так же, как нельзя пренебречь массой одной молекулы при рассмотрении плотности космического вакуума или нельзя пренебрегать отклонением микрочастицы на размер атома от центровой прямой при изучении рассеяния альфа-частиц на ядрах атомов.

Таким образом, первое, качественно новое свойство, которое присуще микрообъектам при их взаимодействии, заключается в неопределенности для микрообъектов тех критериев движения, которыми пользуется классическая механика Ньютона. Конечность значения предельной скорости c взаимодействий вызвала в классической механике неопределенность понятия одновременности двух мировых событий, конечность элементарного кванта действия h — неопределенность в одновременном установлении места и времени проявления микрочастицы.

Квантовое соотношение неопределенности в терминах классической механики может быть записано в виде

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar, \qquad (60,1)$$

где Δx — неточность установления координаты микрочастицы (например, электрона); Δp — неточность одновременного установле-

ния ее импульса, или в виде

$$\Delta\varepsilon \cdot \Delta t \geqslant \hbar, \qquad (60,1')$$

где $\Delta\varepsilon$ — неточность установления энергии состояния микросистемы (например, атома), Δt — неточность одновременного определения длительности этого состояния.

Вместо определенных закономерностей, связывающих механические критерии объектов классической механики, квантовая механика оперирует также определенными соотношениями для вероятностных критериев состояния микрообъектов.

Чтобы составить уравнения, которые позволили бы адэкватно отобразить статистические результаты квантовых свойств микрообъектов, необходимо воспользоваться экспериментальными наблюдениями над взаимодействием микрочастиц.

При объяснении эффекта отдачи, вызванного рассеянием квантов рентгеновского излучения на свободном электроне [эффект Комптона; (56,6)], возникли корпускулярные представления о квантах лучистой энергии (фотонах). При этом оказалось, что поток таких световых частиц с энергией $h\nu = m_ф c^2$, существующих только при скорости c ($c = \nu\lambda$), подчиняется типично волновым закономерностям электромагнитного излучения с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{m_ф \cdot c} = \frac{h}{p_ф}. \qquad (60,2)$$

Так как $m_ф \cdot c = p_ф$ представляет собой механический импульс световой микрочастицы (фотона), то по де Бройлю [см. (3,3)] для любых других микрочастиц, в том числе и для тех, которые обладают массой покоя (электронов, протонов, ионов, нейтронов) должно быть справедливо подобное механическое соотношение, если ввести понятие фазовых волн, определяющих состояние движения микрочастиц длиной волны

$$\lambda_ф = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{p}. \qquad (60,2')$$

Здесь m_0 — масса покоя микрочастицы, v — скорость ее движения в лабораторной системе отсчета, $\lambda_ф$ — та длина волны, которую следует принять для описания статистического проявления микрочастиц заданного импульса. Фазовой волне не отвечает в природе какой-либо реальный волновой процесс, но она является определяющей квантовой характеристикой микрочастиц в механическом отношении. Это заключение полностью подтверждается экспериментами с проникновением потока электронов сквозь тонкие слои вещества, сопровождаемым дифракцией электронов (опыты Дэвисона и Джермера; рис. 60-1). Приближение магнита смещает всю дифракционную картину в направлении действия силы Лоренца. Аналогичные результаты были получены и для других заряженных и незаряженных микрочастиц.

Таким образом, второе, качественно новое свойство, присущее микрообъектам при их взаимодействиях, заключается в свойственной им волновой характеристике фазы состояний и движений, причем длина фазовой волны определяется механическим импульсом частицы. Для макрообъектов с большой массой даже при незначительных скоростях, длина фазовой волны настолько мала, что движение и взаимодействие макротел определяется классическими законами соударений. Однако при очень малых скоростях (покой) поведение макротел также подвержено флуктуациям, определяемым свойствами фазовой волны (60,2′). При очень больших скоростях $v \to c$ длина фазовой волны микрочастицы также становится очень малой, и частица в своем движении проявляет корпускулярные свойства проникающих излучений (треки частиц в конденсационных камерах).

Если учитывать характеристическую фазовую волну, связанную с импульсом микрочастицы, то уравнение движения и состояния для микрообъектов записывается как линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (Шредингер, 1923 г.). Волновая комплексная функция Ψ для микрочастиц играет ту же роль, что и напряженность электрического поля в электромагнитном поле волны для фотонов. Она принимает положительные и отрицательные значения и характеризует дифракционные явления в потоках микрочастиц, а действительное значение квадрата модуля волновой функции Ψ (x, y, z, t), т. е. произведения волновой функции на комплексно-сопряженную функцию $(\Psi\Psi^*)$, в данной точке определяет отнесенную к единице объема вероятность обнаружения микрочастицы в области этой точки в данный момент или вероятность того, что в данный момент система имеет конфигурацию, соответствующую аргументам волновой функции.

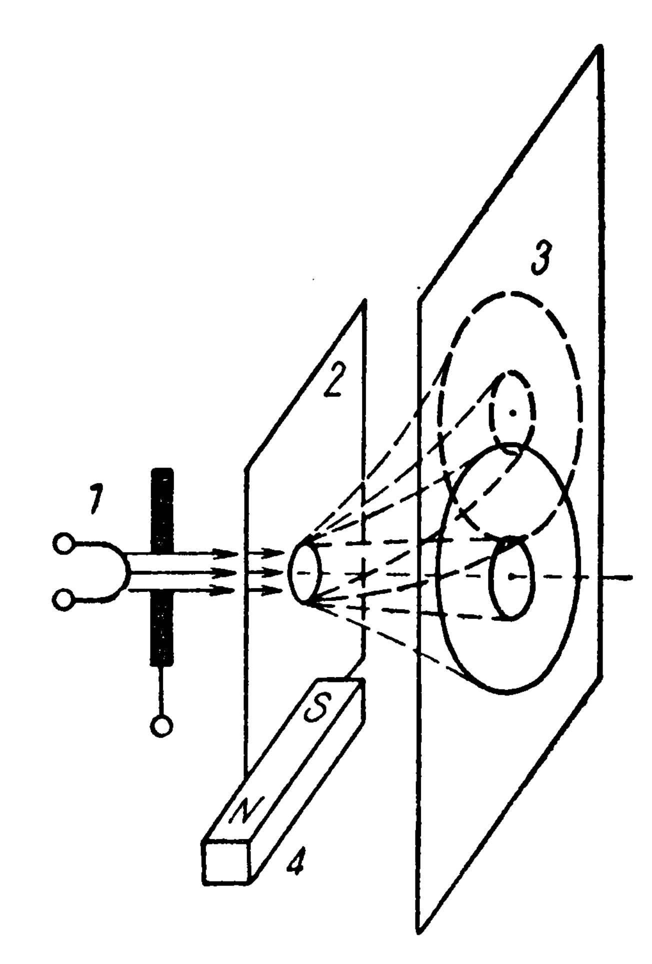


Рис. 60-1. Схема наблюдения дифракции электронов:
1 — электронный эмиттер; *2* — тонкая слюда; *3* — экран или фотопленка; *4* — магнит

В квантовой механике, таким образом, вероятности входят непосредственно в фундаментальные механические соотношения как характеристические величины, а не как результаты недостаточности знаний механических деталей движения микрочастиц. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных относительно комплексной функции Ψ, соответствующее фазовой волне де Бройля, которая представляет состояние и движение микрочастицы в поле сил, есть уравнение Шредингера.

Для частицы с одной степенью свободы это уравнение имеет вид:

$$-\frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} + k_S U(x)\Psi(x, t) = \frac{\hbar}{j}\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t}, \qquad (60,3)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

При отсутствии внешних полей потенциальная энергия $U(x) = 0$, и уравнение (60,3) принимает вид уравнения трансляции, но отличается от него тем, что в правой части содержится мнимый множитель. Это означает, что уравнение Шредингера имеет периодические решения, представленные в виде

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)\cdot\varphi(t), \qquad (60,4)$$

где $\Psi(x)$ — амплитудный сомножитель волновой функции, не зависящий от времени и удовлетворяющий условиям конечности, непрерывности и однозначности только при определенных дискретных значениях собственной энергии частицы $E_1, E_2, \ldots, E_n$; $\varphi(t)$ — соответствующая периодическая функция частоты $\nu_n = \frac{E_n}{h}$. Общее решение этого дифференциального уравнения представляет сумму всех частных решений, поэтому

$$\Psi(x, t) = \sum_n a_n \Psi(x) e^{-2\pi j\frac{E_n}{h}t}. \qquad (60,5)$$

Согласно уравнению плоской монохроматической волны,

$$\Psi = \Psi_0 \sin 2\pi\nu_ф\left(t - \frac{x}{u}\right),$$

где частота $\nu_ф = \frac{u}{\lambda_ф}$, u — фазовая скорость волны де Бройля, т. е. величина, которую следует принять за скорость в волновом уравнении

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \qquad (60,6)$$

Так как $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2\nu_ф^2\Psi$, то $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda_ф^2}\Psi = 0$. При условии, что $\lambda_ф = \frac{h}{m_0 v}$ и $\frac{v}{c} \ll 1$, имеем:

$$\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}E_{кин}\Psi(x) = 0. \qquad (60,7)$$

Обозначая $\nabla^2\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi$ и учитывая, что $E_{кин} = E - E_{пот} = E - U$, основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера, не содержащее время, можно в общем случае записать

$$\nabla^2\Psi(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U)\Psi(x) = 0. \qquad (60,8)$$

Для фазовых волн уравнение Шредингера играет ту же роль, что и уравнения Максвелла для волн электромагнитных.

Таким образом, третьим, качественно новым свойством, присущим микрообъектам, является фазовое квазиреальное поле, волновое уравнение которого квадратом модуля амплитуды определяет вероятность нахождения микрочастицы в данное время в данном месте. Замечательным следствием из уравнения (60,8) является автоматически вытекающее из него квантование энергии. При условии конечности, непрерывности и однозначности функции Ψ это уравнение имеет решение только при определенных дискретных значениях полной энергии микрочастицы. В приложении к электронной оболочке атомов это означает слоистость ее структуры. Потенциальная энергия U для электронной оболочки атома водорода представляется сферически симметричной функцией $U = -\frac{e^2}{r}$; поэтому решение для основного состояния будет также сферически симметричным, выражаемым формулой

$$\Psi(r) = e^{-\frac{1}{a}r}, \qquad (60,9)$$

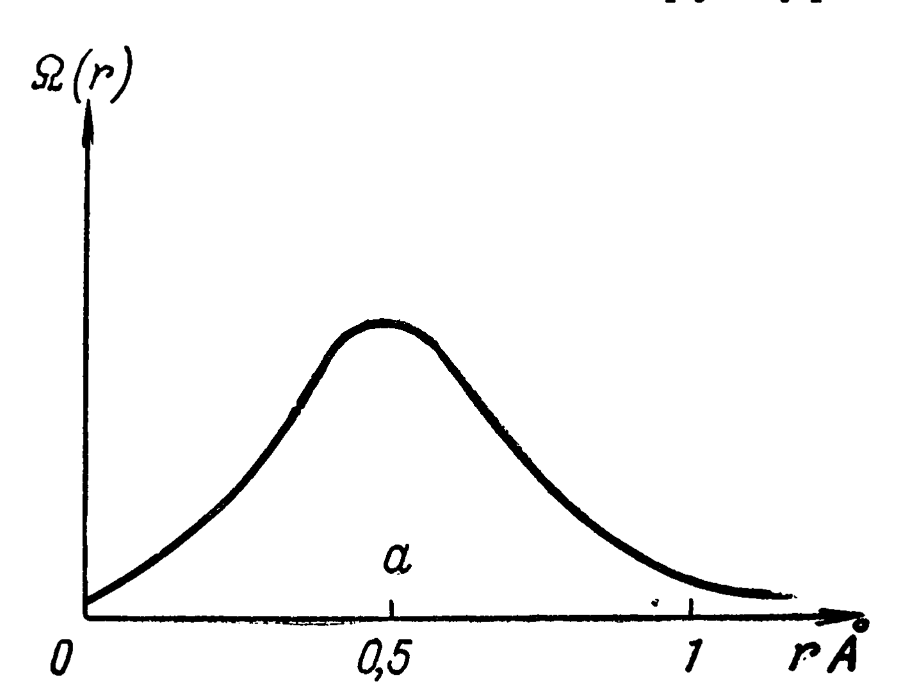


Рис. 60-2. Распределение вероятности обнаружения электрона по радиусу для основного состояния водородного атома

где постоянная a связана со значением полной энергии E электрона. Подстановка значения $\Psi(r)$ в (60,8) после замены переменных приводит к следующим результатам:

$$E = -\frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} = -E'_{\text{кин}} \quad \text{и} \quad a = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2},$$

которые полностью соответствуют выражениям (59,3) и (59,7), полученным из элементарной теории Бора при $Z = 1$ и $k = 1$.

Однако в теории Бора кинетическая энергия электрона, движущегося в кулоновском поле ядра, в каждый данный момент определенна и равна $E_{\text{кин}} = -E$; в квантовой механике U и $E_{\text{кин}}$ квантово неопределенны и представляют собой лишь средние статистические значения полной энергии электрона.

Вместе с тем значение $\Psi^2\, dV = dW$ представляет вероятность обнаружения электрона в сферическом слое объемом $dV = 4\pi r^2\, dr$. Таким образом, распределение вероятности обнаружения электрона по расстоянию от ядра будет (рис. 60-2) представлено в виде

$$\Omega(r) = \frac{dW}{dr} = 4\pi\Psi^2 r^2 = 4\pi r^2 e^{-\frac{1}{a}r}. \qquad (60,7)$$

Как видно, функция $\Omega(r)$ имеет максимум при значении $r = a$, т. е. при расстоянии, равном боровскому радиусу нормальной орбиты электрона в водородном атоме. Однако эта функция не обращается в нуль для $r \gtrless a$.

В частности, имеется хотя и малая, но конечная вероятность обнаружить электрон на расстоянии $r \gg a$, т. е. вдали от ядра. Между тем по классической механике этого не должно было бы быть, поскольку кинетическая энергия всегда положительна и, следовательно, невозможны состояния, при которых потенциальная энергия превышала бы полную энергию частицы. Так как $U = -\frac{e^2}{r}$, $E = -\frac{m_0 e^4}{2\hbar^2}$, то, полагая предельно возможное $U \leqslant E$, имеем

$$r \leqslant \frac{2\hbar^2}{m_0 e^2} \leqslant 2a. \qquad (60,8)$$

Таким образом, по классической механике частица не могла бы проникнуть за потенциальный барьер U поля ядра атома, если ее энергия $E < U$, в то время как квантовая механика микрочастиц, учитывающая их качественно новые свойства, такое проникновение предусматривает.

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

ЯДЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Лекция 61

ИСХОДНЫЕ МИКРОЧАСТИЦЫ

Группу явлений, возникающих в результате внутриядерных процессов, называют радиоактивностью. Эти явления не зависят от таких внешних макровоздействий, как давление, температура, электрические и магнитные поля. Вмешательство во внутриядерные процессы возможно лишь с помощью других микрочастиц. Малые размеры ядер порядка нескольких ферми (1 *фм* $= 10^{-13}$ *см*), специфические свойства ядер, как, например, необычайно большие плотности ядерного вещества (10^{14} *г/см*^{3}), высокие температуры этого вещества (порядка 10^{10} °К) и взаимные превращения ядерных частиц (нуклонов), могут быть изучены путем выделения тех микрочастиц, состав которых в настоящее время остается еще не выясненным. Такие частицы в ядерных соотношениях являются исходными и в этом смысле называются элементарными.

Для количественного выражения свойств элементарных частиц и атомных ядер используется система относительных единиц (безразмерные числа). Так, масса частиц выражается числом элементарных масс покоя электрона, заряд — числом Z элементарных зарядов электрона, спин — числом I элементарных моментов количества движения ($\hbar$) и магнитный момент — числом G ядерных магнетонов. В качестве ядерной единицы массы в общей абсолютной системе физических единиц СГС принимается масса, численно равная величине, обратной числу Авогадро, т. е.

$$1 \textit{а. е. м.} = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{6 \cdot 10^{23}} = 1{,}66 \cdot 10^{-24}\ \textit{г}.$$

Нередко применяется единица времени, соответствующая длительности пролета фотоном ($\tau = 10^{-23}$ *сек*) расстояния, равного поперечнику ядра. Элементарные частицы характеризуются рядом признаков, и прежде всего массой и зарядом. В табл. 25 приведены наименования, обозначения и характеристические величины наиболее изученных элементарных частиц.

Таблица 25

Название класса	Наименование частицы	Обозначение: частицы	Обозначение: античастицы	Масса покоя: в m_e	Масса покоя: в *Мэв*	Среднее время жизни в *сек*	Схема распада	Кинетическая энергия образовавшихся частиц в *Мэв*	Спин в $\hbar$	Магнитный момент в ядерных магнетонах	Странность S	Статистика частиц	Взаимодействие по параметрам f, e, g
Фотоны	Квант	γ ($h\nu$)		0	0	Стабилен [2]	$\gamma \to e^+ + e^-$ при $h\nu_\gamma > 2m_ec^2$	$W_e = h\nu_\gamma - 2m_ec^2$	1	—	—	Б—Э	e
Лептоны	Нейтрино [1]	ν	$\tilde{\nu}$	0	0	Стабильно	—	—	$^1/_2$	10^{-10}	—	Ф—Д	f
	Бета	e^-	$\tilde{e}^+$	1	0,510	Стабильны	$\tilde{e}^+$ аннигилирует с e^-	1,02	$^1/_2$	$\pm\frac{1}{1836}$	—	»	e
	μ-мезон (мюон)	μ^-	$\tilde{\mu}^+$	207	105,6	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$\mu^{\pm} \to e^{\pm} + \nu + \tilde{\nu}$	105	$^1/_2$	—	—	»	—
Мезоны	π-мезон (пион)	π^+	$\tilde{\pi}^-$	273	139,5	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu\ (\tilde{\nu})$	34	0	—	0	Б—Э	e
		π^0	$\tilde{\pi}^0$	265	135	$10^{-16} - 10^{-15}$	$\pi^0 \to 2\gamma$; $\pi^0 \to e^+ + e^- + \gamma$	—	0	—	0	»	f
	K-мезон	K^+	$\tilde{K}^-$	966	493,7	$1,3 \cdot 10^{-8}$	$K^{\pm} \to 2\pi^{\pm} + \pi^{\mp}$	75	0	—	± 1	»	e
							$K^{\pm} \to 2\pi^0 + \pi^{\pm}$	—					
		K^0	$\tilde{K}^0$	965	493	$10^{-6} - 10^{-10}$	$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$	214	0	—	± 1	»	g
							$K^0 \to \pi^{\pm} + e^{\mp} + \tilde{\nu}\ (\nu)$	—					

Барионы	а) Нуклоны протон	p^+	$\tilde{p}^-$	1836	938	Стабилен	$\tilde{p}^-$ аннигилирует с p^+	$2 \cdot 10^3$	$^1/_2$	$\pm 2,79$	0	Ф—Д	*e*
	нейтрон	n^0	$\tilde{n}^0$	1839	939,5	1100	$n(\tilde{n}) \to p^+(\tilde{p}^-) + e^{\mp} + \tilde{\nu}(\nu)$	0,79	$^1/_2$	$-1,91$	0	»	*f*
	б) Гипероны гиперон лямбда	Λ^0	$\tilde{\Lambda}^0$	2182	1114,7	$2,8 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0(\tilde{\Lambda}^0) \to p^+(\tilde{p}^-) + \tilde{\pi}^-(\pi^+)$	36,9	$^1/_2$	—	-1	»	*e*
	гиперон сигма [3])	Σ^+	$\tilde{\Sigma}^+$	2325	1187	$7 \cdot 10^{-11}$	$\Sigma^{\pm}(\tilde{\Sigma}^{\pm}) \to p^+(\tilde{p}^-) + \pi^0(\tilde{\pi}^0)$	116	$^1/_2$	—	-1	»	*e*
		Σ^-	$\tilde{\Sigma}^-$	2341	1196	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^{\pm}(\tilde{\Sigma}^{\pm}) \to n(\tilde{n}) + \pi^{\pm}(\pi^{\mp})$	110	$^1/_2$	—	-1	»	*e*
		Σ^0	$\tilde{\Sigma}^0$	2335	1187	$< 10^{-11}$	$\Sigma^0(\tilde{\Sigma}^0) \to \Lambda^0(\tilde{\Lambda}^0) + \gamma$	—	$^1/_2$	—	-1	»	*e*
	гиперон кси	Ξ^-	$\tilde{\Xi}^-$	2580	1321	10^{-10}	$\Xi^-(\tilde{\Xi}^-) \to \Lambda^0(\tilde{\Lambda}^0) + \pi^-(\tilde{\pi}^-)$	67	$^1/_2$	—	∓ 2	»	*e*
		Ξ^0	$\tilde{\Xi}^0$	2566	1320	10^{-10}	$\Xi^0(\tilde{\Xi}^0) \to \Lambda^0(\tilde{\Lambda}^0) + \pi^0(\tilde{\pi}^0)$	—	$^1/_2$	—	∓ 2	»	*e*
		Y^-	$\tilde{Y}^-$	2740	1410	10^{-11}	$Y^-(\tilde{Y}^-) \to \Lambda^0 + \pi^-(\tilde{\pi}^-)$	155	$^1/_2$	—	∓ 1	»	*e*

Каждой элементарной частице вещества соответствует античастица тождественной массы, но отличающаяся одним из последующих свойств — зарядом, направлением спина, направлением магнитного момента. Буквенное обозначение античастицы такое же, как и частицы, но оно снабжено сверху волновым дефисом. Особенностью элементарных частиц является их взаимная превратимость, распад и возбужденные состояния. По характеру превращений частицы и по соответствию между видом взаимодействия и временем жизни частицы каждой частице приписывают еще одну квантовую целочисленную величину, называемую странностью (S). Приведенные в таблице значения чисел странности дают удовлетворительное согласие с экспериментальными данными о совместном зарождении частиц. Частица и зарядово-сопряженная с ней античастица данного поля имеют противоположные по знаку странности. Если $S \neq 0$, то частица и античастица не будут идентичными даже при нулевом заряде (например, K^0 и $\tilde{K}^0$).

Взаимодействия элементарных частиц можно подразделить на три типа соответственно значениям безразмерного числа

$$\frac{q^2}{\hbar c},$$

где q — заряд соответствующего поля. При сильных и быстрых ($\sim 10^{-23}$ *сек*) взаимодействиях, характерных для проявлений ядерных зарядово-независимых сил сцепления ядерных частиц и для процессов возникновения «странных частиц» с $S \neq 0$ (Юкава-взаимодействие),

$$q = g \quad \text{и} \quad \frac{g^2}{\hbar c} \approx 15, \qquad (61,1)$$

причем g представляет собой заряд ядерного мезонного поля. Сильные взаимодействия отмечаются в случаях ядерных превращений, когда в них участвует четное число странных частиц. Если взаимодействия имеют электромагнитную природу с участием фотонов и если времена их осуществления более чем в 137 раз превышают времена сильных взаимодействий, то

$$q = e \quad \text{и} \quad \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Такие взаимодействия называют электромагнитными, или Дирак-взаимодействиями. При слабых взаимодействиях (Ферми-взаимодействиях), происходящих в течение времени, превышающем 10^{-9} *сек*, и характерных для распада частиц (гиперонов) и распада ядер (β-распады) с участием нейтрино,

$$q = f \quad \text{и} \quad \frac{f^2}{\hbar c} \approx 10^{-14}.$$

Можно отметить, что приближенные значения масс покоя всех элементарных частиц с $m > m_e$ находятся в определенной связи с массой покоя электрона через параметр электромагнитного взаимодействия или через постоянную тонкой структуры атомных спектров, а именно:

$$2m = 137 \cdot k m_e. \qquad (61,2)$$

Здесь k — является целым (калибровочным) числом ($2 < k < 54$). Для нуклонов, например, $k = 27$ ($m_n \approx 1840\ m_e$), для неустойчивых частиц промежуточной массы, таких как π-мезоны (пионы), $k = 4$ ($m_\pi \approx 274\ m_e$). Все частицы с целым спином (0 или 1) являются бозонами (статистика Б—Э), частицы с полуцелым спином, в том числе и стабильные частицы — электроны и протоны, — фермионами (статистика Ф—Д).

Группа «Фотоны» представляет собой движущиеся кванты электромагнитного поля, или частицы поля. Они существуют только при одной инвариантной скорости перемещения c. При $h\nu > 2m_e c^2 = 1{,}1$ *Мэв* в поле атомного ядра может происходить превращение этого вида материи (фотона) в другую форму материи, а именно в пару частиц — электрон и позитрон (частица и античастица). Происходит и обратный процесс — аннигиляция (исчезновение из наблюдения в виде частиц) электрон-позитронных пар и появление двух полевых частиц, или двух квантов энергии.

Группа частиц лептонов представлена нейтрино, β-частицами и μ-мезонами. Прослеженные к настоящему времени наилегчайшие частицы — нейтрино и антинейтрино не имеют массы покоя и заряда, вследствие чего подвержены только слабым взаимодействиям. Нейтрино обладают исключительно большой длиной пробега, в миллиарды раз превышающей средний радиус земной орбиты.

Энергия, уносимая потоком нейтрино, зарождающимся в недрах Солнца, составляет 10% всей излучаемой Солнцем световой энергии. Плотность нейтринного потока на земной поверхности составляет 10^{10} частиц на каждый квадратный сантиметр в секунду. Нейтрино зарождаются при распаде неустойчивых элементарных частиц (мезонов и гиперонов) и при β-распаде атомных ядер. Роль этих частиц в образовании микрообъектов природы находится в стадии изучения.

β-частицы представлены электронами и позитронами. Электрон в земных условиях представляет собой наиболее легкую заряженную и стабильную частицу вещества. Античастица — позитрон в тех же земных условиях аннигилирует с электроном за время порядка 10^{-6} *сек*.

Мюоны, или μ-мезоны, — неустойчивые частицы. Обладая слабым и длительным (10^{-6} *сек*) взаимодействием с ядрами вещества, они составляют основную часть проникающей компоненты космического излучения. Мюоны возникают в ядрах при распаде виртуальных более тяжелых π-мезонов (пионов). Распад в ядрах мюо-

нов приводит к испусканию электронов β-активными ядрами (β-распад ядер). Пионы и K-мезоны представляют зарядовый «триплет», т. е. могут иметь заряды: плюс, минус и нуль. Виртуальный пион является ядерным «вяжущим», так как служит обменной частицей, вызывающей возникновение близкодействующих зарядово-независимых сил сцепления нуклонов в ядре. π-мезонам, как и нуклонам, приписывают числа странности $S = 0$; K-мезоны имеют неожиданно большое время жизни, несмотря на сильные взаимодействия. Их странность оценивается как $S = \pm 1$, K-мезоны и являющиеся продуктом их распада пионы в отношении статистики составляют группу бозонов. Барионы, или, иначе, тяжелые частицы, состоят из нуклонов (ядерных частиц) и гиперонов (чрезмерно тяжелых частиц). Нуклоны представлены протонами и нейтронами. Устойчивые частицы — протоны и зарядово-сопряженные с ними античастицы — антипротоны — основные элементы вещества (фермионы). Аннигиляция этих частиц приводит к образованию пионов и мезонов (бозонов). Протоны вследствие своей устойчивости составляют основную часть космического излучения, достигающего атмосферы Земли. Они возникают в недрах сверхновых звезд и выбрасываются при взрывах этих звезд в космическое пространство. Протон совместно с присущим ему пионным облаком образует некоторую желеобразную частицу радиусом порядка классического радиуса электрона ($1{,}5 \cdot 10^{-13}$ *см* = 1,5 *фм*). Если рассматривать эффективность взаимодействия заряда протона с движущимся элементарным зарядом, то функция распределения заряда протона в зависимости от радиального расстояния имеет максимум при $r = 0{,}77$ *фм*. Нейтрон — беззарядовая, распадающаяся в течение 1000 *сек* частица с массой, несколько превышающей массу покоя протона. При исследовании упругого взаимодействия нейтрона с движущимся элементарным зарядом выяснилось, что отсутствие заряда у нейтрона можно рассматривать как своеобразное распределение в нем равного количества положительного и отрицательного электричества. Нейтрон спонтанно, на время порядка 1/4 периода жизни, диссоциирует в сильно связанную систему, состоящую из протона и отрицательного пиона. За это время нейтрон приобретает специфическую зарядовую структуру с положительным концентрированным зарядом в окружении ($\sim 10^{-13}$ *см*) слоя отрицательного и снова слоя положительного заряда. Такое распределение зарядов (эффективный заряд $10^{-16} e$) в динамике нейтрона объясняет наличие у него отрицательного магнитного момента. Нейтроны взаимодействуют с ядрами атомов вещества. Пробег нейтронов низких энергий (0,025 *эв*) в воздухе при распределении их скоростей, соответствующем максвелловскому, при комнатных температурах составляет $R_n \approx 10^4$ *см*. Нейтроны высоких энергий входят в состав первичных космических излучений.

Неустойчивые частицы, называемые гиперонами, рассматриваются как возбужденные состояния нуклонов. Эти частицы обра-

зуются в результате столкновений пионов с нуклонами и при распаде превращаются в эти же частицы. В настоящее время общее число прослеженных элементарных частиц и гиперонов достигло большой величины (до восьмидесяти), и дальнейшее изучение их свойств, по-видимому, потребует пересмотра наших представлений об элементарности этих микрочастиц.

Лекция 62

АТОМНЫЕ ЯДРА

Атомные ядра представляют собой необыкновенно плотные образования из ядерных частиц, или нуклонов. Внутри атомных ядер ($r \approx 10^{-13} \div 10^{-12}$ *см*) действуют специфические силы взаимной связи нуклонов и происходят их взаимные превращения. Вне ядер эти частицы проявляют себя как протоны и нейтроны, поэтому говорят о числе протонов и нейтронов в ядрах. Ядра не содержат образований в виде легких частиц, например электронов, однако лептоны могут виртуально возникать в ядрах при взаимных превращениях нуклонов, например, при схемах превращений:

$$n_1 \to p_1 + \pi^- = p_2 + \pi^- \to n_2$$

или

$$p_1 \to n_1 + \pi^+ = n_2 + \pi^+ \to p_2. \qquad (62,1)$$

Виртуальный $\pi^\pm$ - мезон претерпевает распад $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu\ (\tilde{\nu})$ и далее $\mu^\pm \to e^\pm + 2\nu\ (\tilde{\nu})$ с выходом бета-частицы и двух нейтрино. В ядрах нет также локальных устойчивых образований из нуклонов типа α-частиц, однако при беспорядочном движении нуклонов в условиях ядерного тесного сближения частиц виртуально могут создаваться четверки частиц (два протона + два нейтрона), которые при подходящих условиях могут быть испущены ядрами в виде α-частиц.

Так как массы покоя протонов и нейтронов близки друг к другу, то общее целое число нуклонов в ядре

$$A = Z + N,$$

где Z — число протонов, N — число нейтронов в ядре, называют массовым числом.

Ядра-изотопы характеризуются равенством числа протонов ($Z_1 = Z_2$), и поскольку $N_1 \neq N_2$, то и $A_1 \neq A_2$. Все химические элементы представляют собой природные смеси изотопов. Водород, например, имеет три изотопа: легкий изотоп с ядром H^1 (протоний 99,98%), тяжелый изотоп с ядром H^2 (дейтерий 0,02%) и искусственный изотоп с ядром H^3 (тритий Т). У самого тяжелого из естественных элементов — урана ($Z = 92$) имеется двенадцать изотопов с массовыми числами от $A = 228$ до $A = 239$, однако в природном химическом элементе в основном содержатся только два из них: U^{235} (0,7%) и U^{238} (99,3%).

В настоящее время известны 270 устойчивых изотопов, 60 естественно радиоактивных и около 1000 искусственных радиоактивных.

Ядра с одинаковым числом нейтронов ($N_1 = N_2$) называются ядрами-изотонами, а с одинаковым общим числом нуклонов ($A_1 = A_2$) — ядрами-изобарами. Если при этом $Z_1 = N_2$ и $N_1 = Z_2$, то ядра-изобары оказываются зеркальными. Однако возможны неустойчивые ядра с одинаковым числом протонов и нейтронов ($Z_1 = Z_2$ и $N_1 = N_2$), но различными схемами распада (рис. 62-1).

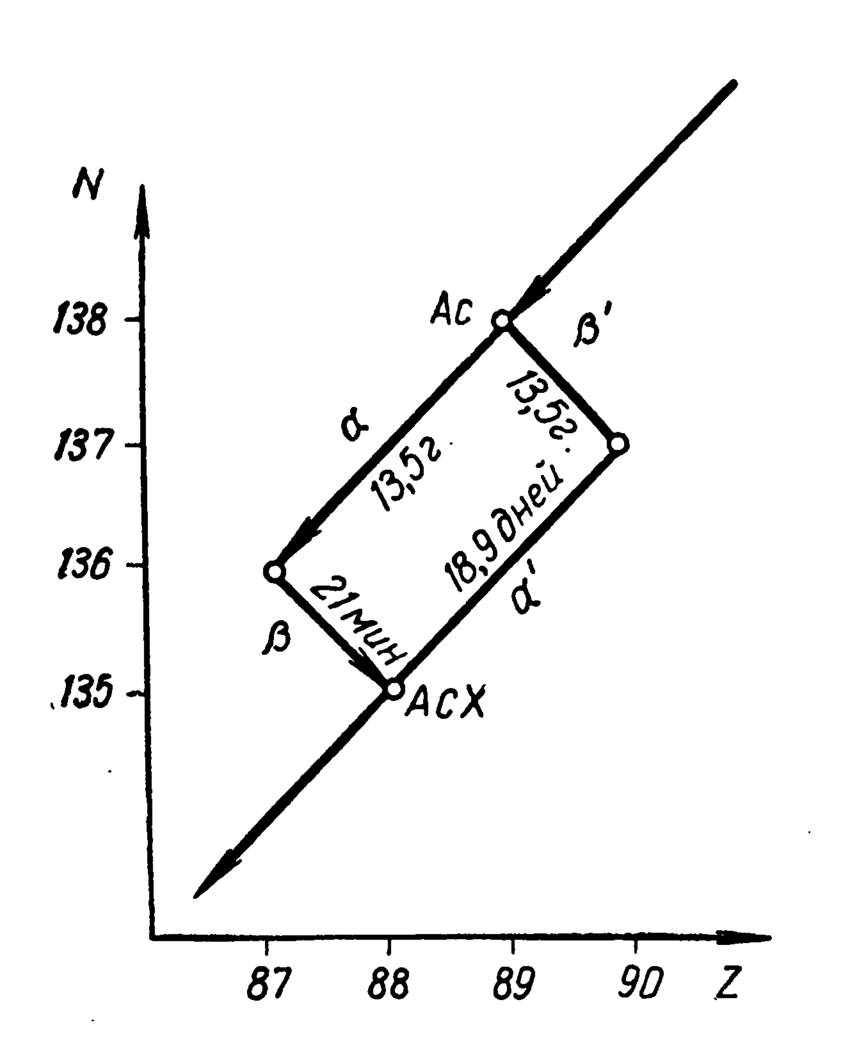


Рис. 62-1. Ядерная изомерия. Возможны распады по схеме α, β или по схеме β', α'.

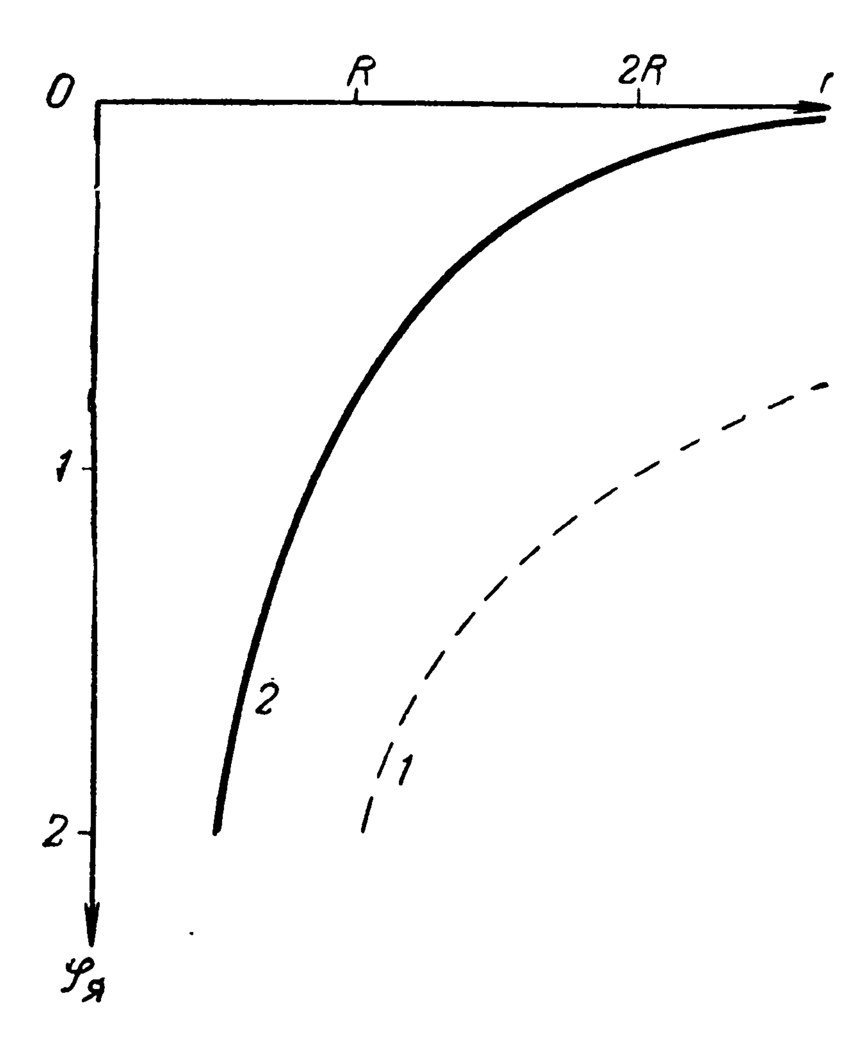


Рис. 62-2. Изменение потенциала мезонного поля ядра:

1 — в случае дальнодействия; *2* — для близкодействующих сил

Такие ядра называют ядрами-изомерами. Нуклоны удерживаются в ядрах специфическими, близкодействующими и зарядово-независимыми силами сцепления. Эти силы имеют обменный характер, причем обменной частицей является π-мезон (см. 61,1). Таким образом, в ядрах образуются мезонные поля сильных связей, характеризуемые параметром g взаимодействия. Потенциал поля близкодействующих ядерных сил может быть представлен в виде (рис. 62-2)

$$\varphi_я = -\frac{g}{r} e^{-r/R}, \qquad (62,2)$$

где g — эффективный заряд мезонного поля ядерных сил, $R = \frac{\hbar}{m_\pi c} \approx 1,2 \cdot 10^{-13}$ *см* — радиус сферы действия ядерных сил притяжения нуклонов. Ядерные частицы, удерживаемые в ядре близкодействующими силами мезонного поля, практически взаимо-

действуют только с ближайшими соседними частицами. Они образуют, таким образом, чрезвычайно малую по размерам, но очень плотную по массе ($\rho_{я.в} = 10^{14} г\,см^{-3}$) каплю вещества. Объем ядра пропорционален числу частиц в нем и, следовательно, радиус капельного ядра $R_я$ пропорционален $A^{1/3}$.

В соответствии с рассеянием α-частиц ядрами, как и в соответствии с энергией этих частиц при испускании их радиоактивными ядрами, размер ядер определяется зависимостью вида

$$R_я = \frac{e^2}{2m_0c^2} A^{\frac{1}{3}} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}\ см, \qquad (62{,}2')$$

где $\frac{e^2}{2m_0c^2}$ — электростатический радиус сферического электрона. Частицы, приблизившиеся к границам ядра на расстояние действия ядерных сил, будут захвачены ядром, вследствие чего ядро перейдет в возбужденное состояние с измененным энергетическим балансом. Так как потенциальная энергия ядерной частицы на границе ядра больше, чем внутри, то капельное ядро обладает сильным поверхностным натяжением $\alpha = 10^{20}$ *эрг/см*^{2}, создающим устойчивость ядра против распада. Исходя из представлений о капельном ядре, уравнение энергетического баланса этого образования можно представить в следующем виде:

$$_ZM^A \cdot c^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 - W_{я.с} + W_{п.н} + W_э + \varphi(A, Z). \qquad (62{,}3)$$

Здесь $_ZM^A$ — масса ядра, образовавшегося из Z протонов (m_p) и N нейтронов (m_n); — $W_{я.с}$ — отрицательная энергия притяжения ядерных частиц; $W_{п.н}$ — положительная энергия поверхностного слоя, равная работе перехода в этот слой ядерных частиц; $W_э$ — энергия электростатического отталкивания ядерных протонов и $\varphi(A, Z)$ — поправочный член, учитывающий влияние попарных взаимодействий нуклонов в ядре. Полагая, что энергия притяжения ядерных частиц $W_{я.с}$ определяется π-мезонным обменом (62,1), в котором симметрично участвуют протоны и нейтроны, можно считать, что отрицательная энергия притяжения нуклонов

$$W_{я.с} = -a_{я1}A + a_{я2} \cdot \frac{(N-Z)^2}{A}. \qquad (62{,}4)$$

Поправочный член отличен от нуля только для тяжелых ядер, у которых $N > Z$. Энергия поверхностного слоя, очевидно, составляет

$$W_{п.н} = 4\pi R_я^2 \alpha = 4\pi r_0^2 \cdot \alpha A^{2/3} = a_s A^{2/3}. \qquad (62{,}5)$$

Электростатическое отталкивание протонов обусловлено дальнодействующими кулоновскими силами, и для Z взаимодействующих протонов энергия отталкивания составляет

$$W_э \approx \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{R_я} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0} Z^2 A^{-\frac{1}{3}} = a_э Z^2 A^{-\frac{1}{3}}. \qquad (62{,}6)$$

Таким образом, если поправка $\varphi(A, Z)$ будет учитывать преимущественную устойчивость ядер с четными числами A и Z, то уравнение (62,3) может быть записано в форме

$$W_с = zM^Ac^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 - a_{я1}A + a_{я2}\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_э Z^2 A^{-\frac{1}{3}} + \varphi(A, Z) = (Zm_p + Nm_n)c^2 - \left[a_{я1} - a_{я2}\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2\right] A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_э\left(\frac{Z}{A}\right)^2 A^{5/3} + \varphi(A, Z). \quad (62,7)$$

Из этого выражения вытекают важные следствия. С увеличением числа ядерных частиц отрицательная энергия притяжения частиц растет пропорционально первой степени A, а положительная энергия электростатического отталкивания — пропорционально $A^{5/3}$ (отношение $\frac{A}{Z}$ меняется от 2 до 2,6 при изменении Z от 1 до 92). Однако, поскольку устойчивость капельного ядра определяется еще относительным влиянием поверхностного натяжения, увеличение $\frac{A}{Z}$ свыше 2,6 нарушает равновесный баланс. Если соотношение между энергией электростатического отталкивания протонов и энергией ядерного притяжения частиц, характеризуемое значением $\frac{Z^2}{A}$, таково, что $\frac{Z^2}{A} < 25$ $(Z < 50)$, то ядро не только устойчиво, но и обладает правильной сферической формой.

При $\frac{Z^2}{A} > 45$ $(Z > 90)$ ядра неустойчивы и спонтанно распадаются. Для $\frac{Z^2}{A} > 50$ $(Z > 125)$ устойчивое равновесие полностью отсутствует. Энергия связи $w_с$ частиц в ядре характеризуется той работой, которую необходимо совершить, чтобы разъединить частицы, образующие ядро. Эта энергия, как видно из (62,3), определяется дефектом массы, возникающим при образовании ядра, и составляет

$$w_с = c^2(Zm_p + Nm_n - zM^A) = c^2 \Delta M. \quad (62,8)$$

При этом энергия связи, приходящаяся на один нуклон, будет

$$\omega = \frac{w_с}{A} = c^2 \frac{\Delta M}{A}. \quad (62,9)$$

Величина ω зависит от числа нуклонов A в ядре (рис. 62-3). В области значений A от 40 до 120 удельная энергия связи имеет примерно постоянное значение $\omega = \omega_0 = 8{,}6$ *Мэв*, но монотонно убывает для значений $A > 120$. При $A < 20$ удельная энергия связи не только имеет значения, намного меньшие 8,6 *Мэв*, но и претерпевает резкие отклонения от монотонного изменения при $A = 4n$, где $n = 1{,}2,\ 3{,}4$. Это обстоятельство указывает на образование

в ядрах устойчивых группировок из четырех частиц (двух протонов и двух нейтронов). Ядро Be^8 ($n = 2$) с удельной энергией связи, равной 7,02 *Мэв,* вообще представляется как две связанные альфа-частицы с такой же удельной энергией связи.

Значения коэффициентов в полуэмпирическом соотношении (62,7) находятся из экспериментальных данных и составляют (энергия в *Мэв*):

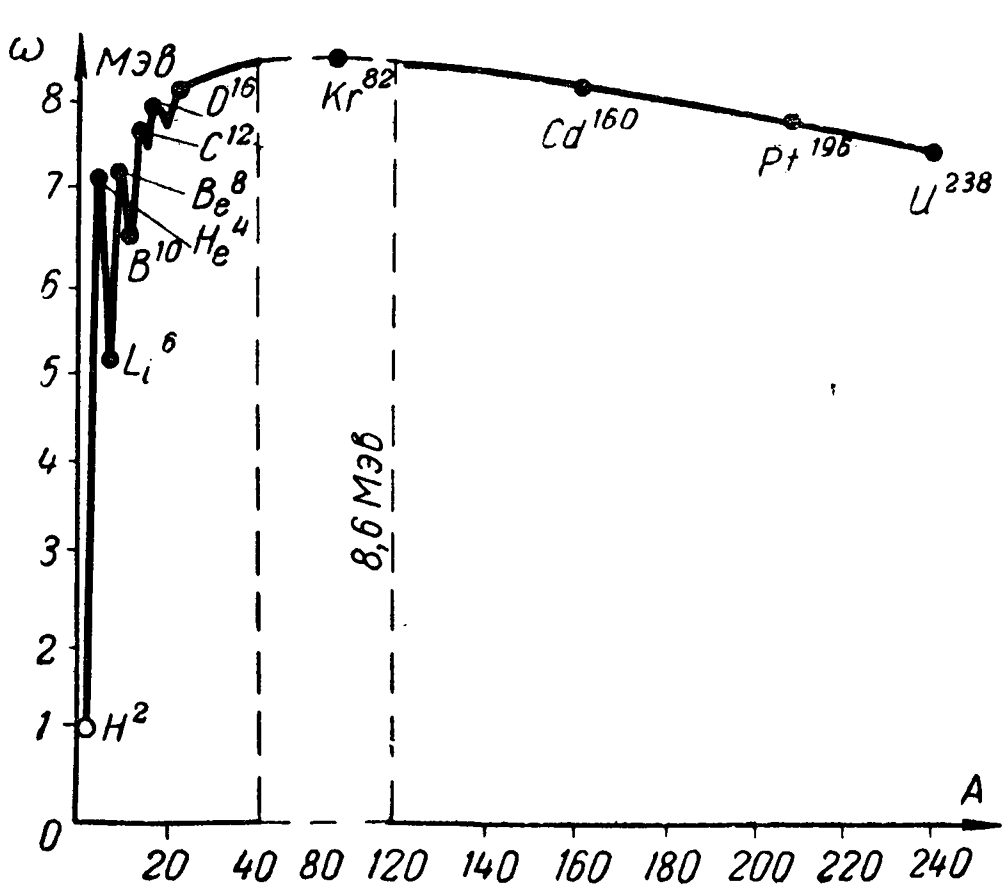


Рис. 62-3. Зависимость удельной энергии связи от числа частиц в ядре

$$a_{я1} = 931a_1 = 14{,}00;$$
$$a_{я2} = 931a_4 = 7{,}70;$$
$$a_s = 931a_2 = 13{,}1 \text{ и}$$
$$a_э = 931a_3 = 0{,}58,$$

причем для четно-четных (A, Z) ядер $\varphi(A, Z) = -33A^{-3/4}$; для нечетных значений A $\varphi(A, Z) = 0$ и для четно-нечетных (A, Z) ядер $\varphi(A, Z) = +33A^{-\frac{3}{4}}$.

Таким образом, согласно (62,7), можно вычислить энергию связи любых ядер (62,8).

Когда ядро захватывает тяжелую частицу (нейтрон, протон, альфа-частицу), то вследствие возрастания A баланс энергии ядра претерпевает резкое изменение, в результате которого устойчивое равновесие нарушается. Для захвата ядром нейтрона требуется лишь приближение его к поверхности ядра на расстояние порядка $R_я$. При захвате или проникновении в ядро тяжелых заряженных частиц (протонов, дейтронов, альфа-частиц) кулоновское отталкивание зарядов создает на границе ядра потенциальный барьер для этих частиц (рис. 62-4). Потенциальный барьер показывает замену на границе ядра положительной потенциальной энергии отталкивания зарядов на отрицательную энергию притяжения частиц ядерными, зарядово-независимыми силами. В этом смысле ядро находится в некоторой потенциальной яме глубиной порядка 22 *Мэв* против нулевого уровня и полуши-

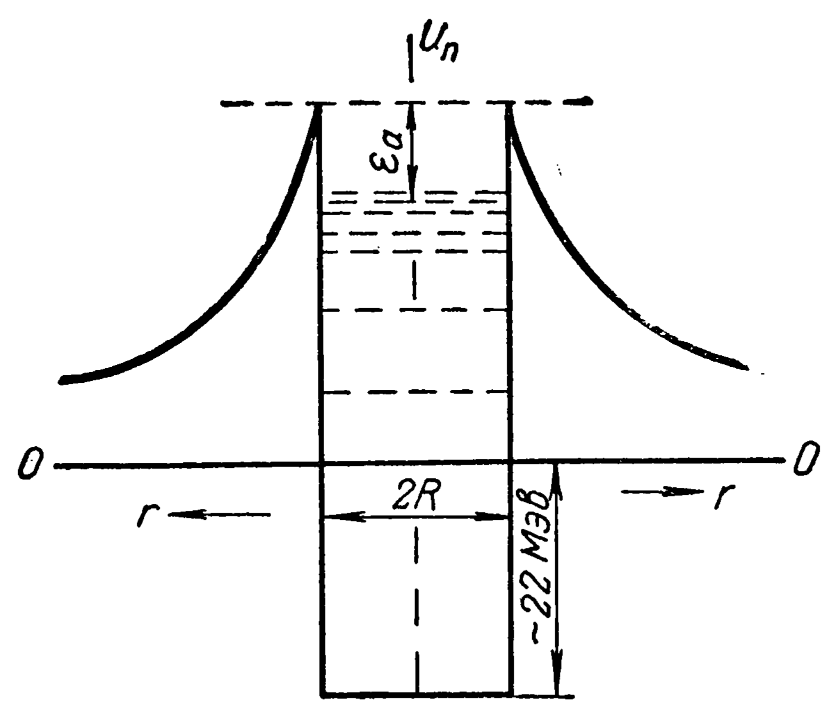


Рис. 62-4. Потенциальный барьер электрического поля ядра (ε_a — энергия активации распада ядра)

риной, равной радиусу сферического ядра. В соответствии с волновыми представлениями о фазовом состоянии микрообъектов длина фазовой волны нуклона по де Бройлю составит

$$\lambda_\text{ф} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_0}}, \qquad (62,10)$$

где E_0 — энергия связи, приходящаяся на одну ядерную частицу. Для невозбужденного состояния сферического нуклона, кроме того, должно быть справедливо соотношение

$$\lambda_\text{ф} = 2\pi r_0. \qquad (62,11)$$

Здесь r_0 — эффективный радиус одного нуклона. Из (62,10) и (62,11) имеем

$$r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_p E_0}} \approx 1,5 \cdot 10^{-13} \ \text{см}$$

и, значит, для ядра с A нуклонами радиус R будет иметь уже приведенное в (62,2′) значение $R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$. Кроме основного квантового состояния, ядру свойственны дискретные энергетические уровни квазистационарных возбужденных состояний. Плотность таких энергетических уровней ядра быстро возрастает с энергией возбуждения. Не прибегая к каким-либо структурным моделям ядра, наиболее подходящим соотношением для расстояний ε между энергетическими уровнями в зависимости от энергии возбуждения E в *Мэв* (рис. 62-5), можно указать формулу вида

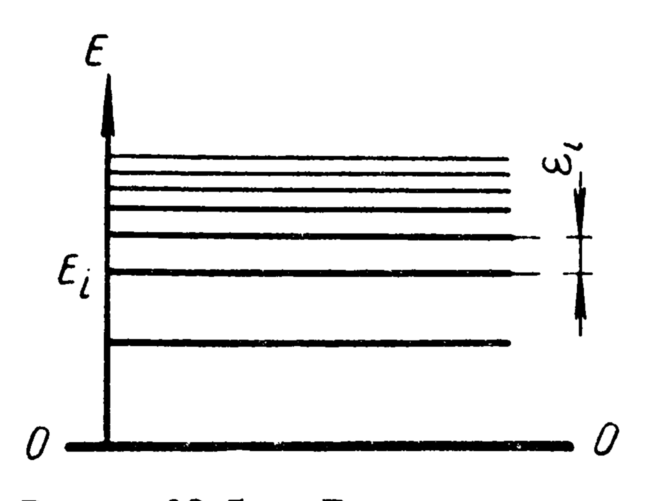


Рис. 62-5. Распределение энергетических уровней возбуждения ядра (OO — уровень основного состояния; ε_i — расстояние между i-ым и $(i+1)$-ым уровнями)

$$\varepsilon = ae^{-b\sqrt{E}},$$

где $a = 10^6$ *эв* $= 1$ *Мэв* при $b = 2$ для легких ядер ($A \approx 20$) и $a = 10^5$ *эв* $= 0,1$ *Мэв* при $b = 4$ для тяжелых ядер ($A \approx 200$). Если захватываемая ядром тяжелая незаряженная частица (нейтрон) или проникающая в легкое ядро заряженная частица (протон) имеет такую полную энергию, которая необходима для образования составного ядра (компаунд-ядро) в одном из его возбужденных состояний, то вероятность захвата частицы велика,и поэтому захват называют резонансным (рис. 62-6). Возбужденные ядра в зависимости от энергии возбуждения могут претерпевать различные превращения, сопряженные с испусканием частиц (распад), захватом электрона из K-оболочки (K-захват), испусканием нейтрино или гамма-кванта электромагнитного излучения. Неустойчивые ядра по времени существования можно разделить на три группы:

группа Iа — ядра с временем существования возбужденного состояния от 10^{-21} до 10^{-18} *сек* и вылетом быстрой тяжелой частицы (нейтрона, протона или α-частицы) и

группа Iб — ядра с временем возбужденного состояния от 10^{-17} до 10^{-6} *сек* и с выходом энергии возбуждения путем испускания гамма-квантов;

группа II — ядра с временем возбужденного состояния от 10^{-6} *сек* до 10^{12} лет, к которой относятся все β-радиоактивные, многие α-радиоактивные и многие ядра-изомеры, испускающие γ-излучение;

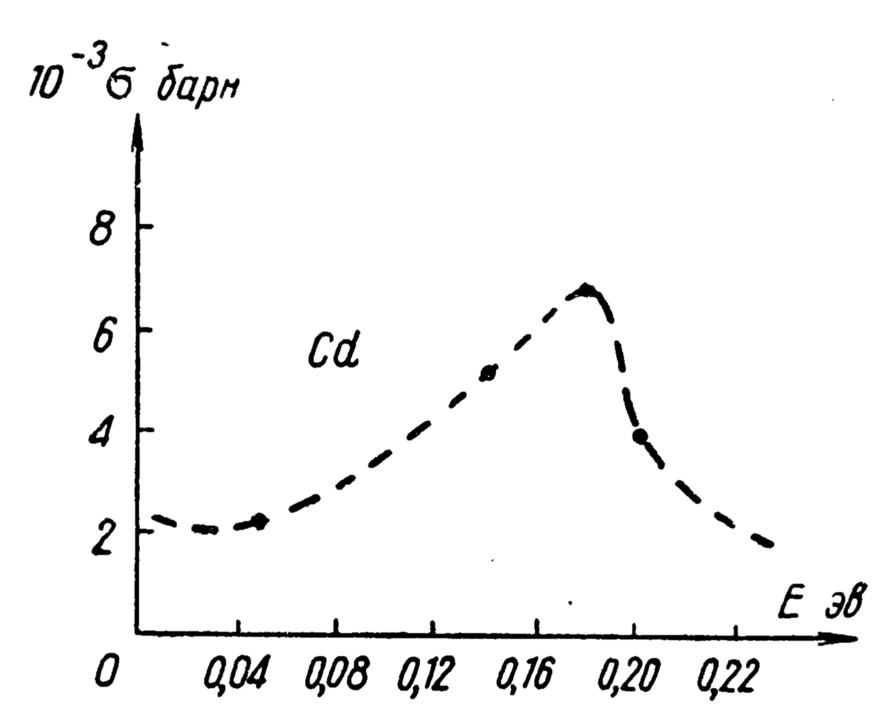


Рис. 62-6. Сечение процесса резонансного захвата медленных нейтронов кадмием

группа III — ядра, существующие в возбужденном состоянии столь длительно, что их неустойчивость практически незаметна (период полураспада более 10^{14} лет).

Лекция 63

СПОНТАННЫЕ ЯДЕРНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Нуклоны в атомных ядрах находятся в состоянии движения и взаимных превращений. Средняя кинетическая энергия нуклонов в несколько раз превышает среднюю энергию связи частиц в ядре и составляет

$$W_{\text{кин}} \approx 20 \text{ Мэв},$$

что соответствует $T \approx (2 \cdot 10^{11})$ °К. Отличительной особенностью неупорядоченного движения нуклонов является изменчивость распределения энергии между частицами во времени, проистекающая из-за их взаимных превращений. Может оказаться, например, что значительная часть энергии сконцентрируется на том или другом виртуальном образовании внутри ядра. Наиболее устойчивым из таких образований является комбинация из двух протонов и двух нейтронов, поэтому при подходящих условиях такая комбинация из четырех нуклонов может вылететь из ядра в виде α-частицы с превращением ядра (α-распад ядра) по схеме:

$$_{Z}X^{A} \rightarrow {}_{Z-2}Y^{A-4} + {}_{2}He^{4} + (h\nu)_{\gamma}. \qquad (63,1)$$

Здесь $(h\nu)_{\gamma}$ — гамма-квант, испускаемый ядром-продуктом $_{Z-2}Y^{A-4}$, образующимся в возбужденном состоянии после вылета α-частицы

(рис. 63-1, *а*). Для вылета α-частицы необходимо, чтобы уровень ее энергии был выше потенциального барьера на границе ядра. Однако, если образование α-частицы в ядре происходит вблизи его границы, то возможны случаи локального экранирования протонных зарядов и, следовательно, местного изменения высоты потенциального барьера. При этом α-частица будет обладать энергией ниже гребня потенциального барьера ядра в состоянии неподготовленности к α-распаду. При квантово-механическом рассмотрении вылета α-частицы можно сказать, что всегда существует некоторая малая вероятность того, что α-частица окажется вне границ ядра при ее энергии, меньшей высоты потенциального барьера ядра. В ядрах осуществляется и другой вид превращений, связанных с преобразованием нуклонов (рис. 63,1,*б*), например,

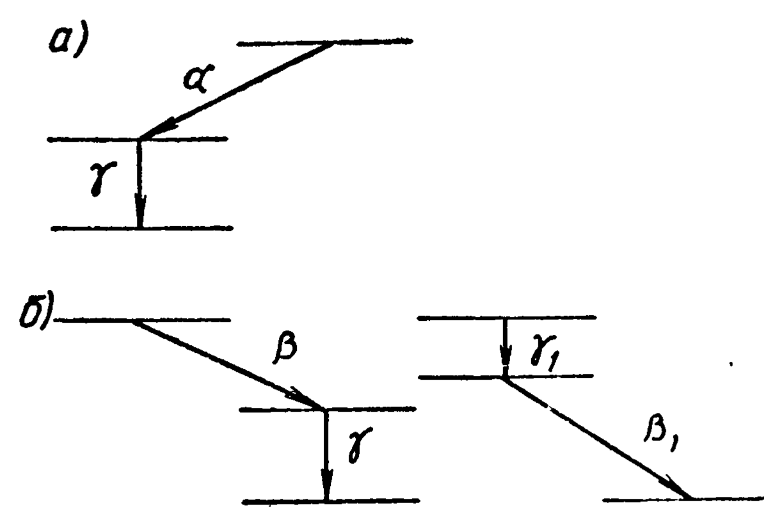


Рис. 63-1. Примерные схемы α- и β-распада ядер: а) α-распад (число частиц убывает на 4; заряд — на 2). Моноэнергетические α-частицы и γ-кванты; б) β-распад (изомерия. Число частиц в ядре постоянно, заряд изменяется на ±1. Непрерывный энергетический β-спектр)

$$\left.\begin{array}{l} n \to p + \pi^- \to p + \mu^- + \tilde{\nu} \to p + e^- + 2\tilde{\nu} \\ \text{или} \\ p \to p + e^- + e^+ \to n + e^+ + \nu \quad (\text{см. } 63{,}8), \\ \text{а также} \\ p + (e^-)_K \to n + \nu + (h\nu)_K. \end{array}\right\} \qquad (63{,}2)$$

β-распад происходит при этом по схемам:

$$\left.\begin{array}{l} {}_Z\mathrm{X}^A \to {}_{Z\pm1}\mathrm{Y}^A + e^{\mp} + \tilde{\nu}\,(\nu) \\ \text{или} \\ {}_Z\mathrm{X}^A + (e^-)_K \to {}_{Z-1}\mathrm{Y}^A + \nu + (h\nu)_K \qquad (K\text{-захват}). \end{array}\right\} \qquad (63{,}3)$$

В последнем случае возбужденное ядро захватывает *К*-электрон оболочки атома. Таким образом, при β-распаде происходит: превращение ядра, испускание β-частицы (электрона или позитрона), испускание антинейтрино, или нейтрино, испускание γ-кванта возбужденного состояния ядра-продукта (Y^A) и, в случае *К*-захвата, испускание кванта характеристического рентгеновского излучения (*К*-спектра) атома-продукта.

Энергия β-распада E_m будет при этом распределяться между вылетающими β-частицей и нейтрино, так что

$$E_\beta + E_\nu = E_m, \qquad (63{,}4)$$

и, следовательно, энергетический спектр будет непрерывным, ограниченным со стороны больших значений энергии.

Естественная радиоактивность вещества представляет собой явление самопроизвольного α- и β-распада атомных ядер, сопровождаемого испусканием γ-квантов и нейтрино. Именно этот результат был найден из эксперимента, схема которого приведена на рис. 63-2. Поперечное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости чертежа, разделяет излучение, испускаемое радиоактивным источником, на три пучка. В соответствии с отклонением пучков при анализе их содержания было выяснено, что α-излучение есть поток моноэнергетических ядер гелия, β-излучение — поток электронов с энергиями $E \leqslant E_{\beta, m}$ и γ-излучение — кванты электромагнитной энергии той же природы, что и рентгеновское излучение. Поток нейтрино не является направленным. Эти легчайшие нейтральные частицы проникают во всех направлениях сквозь стенки свинцового контейнера, в котором расположен радиоактивный источник.

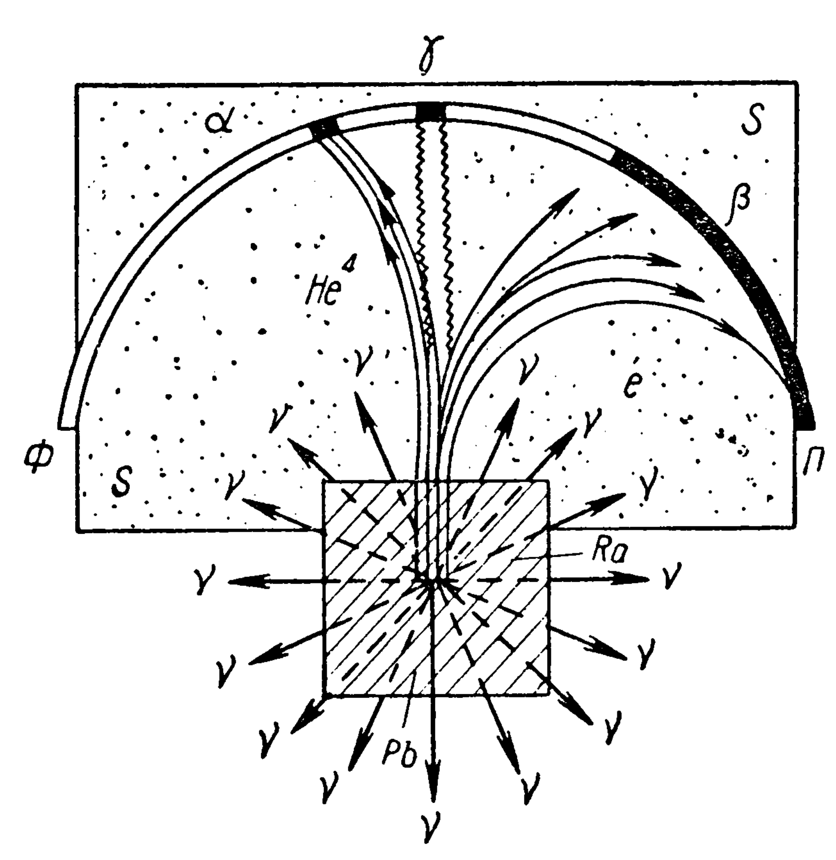


Рис. 63-2. Траектория пролета частиц и гамма-квантов, испускаемых при распаде Ra в поперечном магнитном поле

Мерой проникновения излучений служит масса вещества, расположенная вдоль пути проникновения частиц в вещество (пробега частиц), отнесенная к единице площади облучения (*г/см*^{2}). В таком исчислении пробеги α-частиц ($E \approx 2 \div 10$ *Мэв*), испускаемых различными радиоэлементами, не превышают 10^{-2} *г·см*$^{-2}$, пробеги β-частиц той же области начальных энергий достигают значений 10 *г · см*$^{-2}$ и, наконец, ослабление интенсивности γ-лучей до 10^{-6} их начальной интенсивности достигается в слое 10^2 *г · см*$^{-2}$ (рис. 63-3).

Пробег нейтрино очень велик, так как эффективное сечение рассеяния этих частиц на ядрах составляет всего лишь 10^{-20} *барна*. Между энергией частиц (в *Мэв*) и массовой длиной их пробега, равной $R'_\alpha = \rho \cdot R_\alpha$ (*г · см*$^{-2}$), имеется прямая связь, выражаемая эмпирическими зависимостями вида: для α-частиц

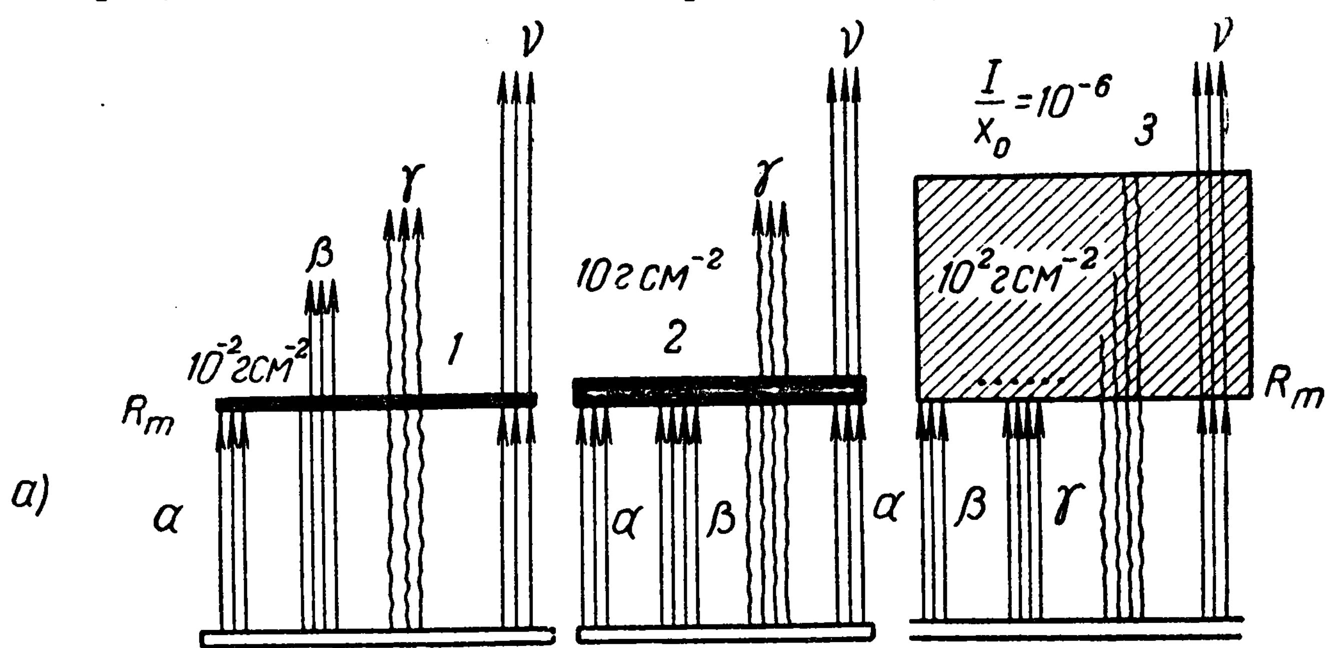
$$R'_\alpha = \rho \cdot R_\alpha = a'v^3 = 10^{-4}\sqrt{A}E^{3/2},$$

где A — атомный вес вещества, и для β-частиц

$$R'_\beta = \rho R_\beta \approx 0{,}54E - 0{,}13. \qquad (63{,}5)$$

Для естественных α-активных радиоэлементов Гейгером и Нэттолом

установлена линейная связь между логарифмом постоянной распада и логарифмом пробега α-частицы в воздухе. Чем чаще происходит распад ядер (больше постоянная распада λ), тем большей кинети-



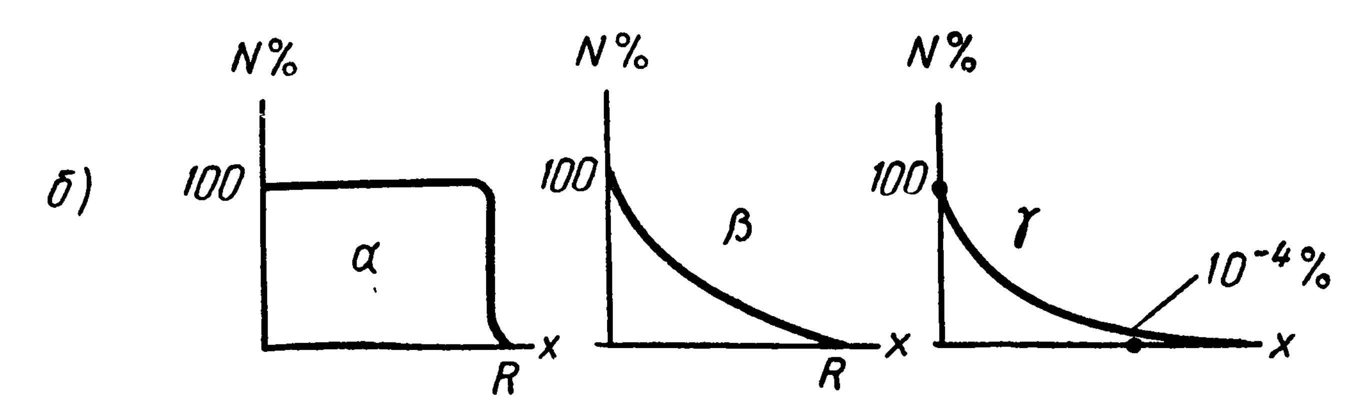


Рис. 63-3. Проникновение ядерных излучений в вещество (R_m — массовый пробег частиц):

а) лист бумаги (*1*) толщиной 1 *мм*; алюминий (*2*), свинец (*3*) толщиной 10 *см*. В области $E_\alpha < 10$ *Мэв* $R_m \sim E_\alpha^{3/2}$, для $E_\beta > 1$ *Мэв* $R_m \approx 0{,}54 E_\beta$; *б*) зависимость $N = \frac{N_x}{N_0} = f(x)$ для α-частиц, β-частиц сплошного спектра, испускаемого радиоактивным элементом, и γ-квантов

ческой энергией обладают выбрасываемые ими α-частицы. Если A, B и A' — характеристические коэффициенты, то

$$\ln R = A + B \ln \lambda,$$

или, согласно (63,5),

$$\ln E = A' + B \ln \lambda. \qquad (63,6)$$

Непрерывные β-спектры различных радиоэлементов, отличаясь значениями E_m, схожи своими законами распределения частиц по энергиям. Принимая E_m за единицу энергии β-частиц и полагая $\varepsilon = \frac{E}{E_m} \leqslant 1$, для функции распределения на основе экспериментальных данных можно записать

$$\chi(\varepsilon) = \frac{dN}{N d\varepsilon} = C \varepsilon^{1/2} (1 - \varepsilon)^{3/2}, \qquad (63,7)$$

где C — постоянная, зависящая от выбора единиц.

Функция распределения $\chi(\varepsilon)$ достигает максимума при $\varepsilon = 0,25$ и обращается в нуль при $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, причем среднее значение $\bar{\varepsilon} \approx 0,34$ (рис. 63-4). Значение максимальной энергии в β-спектрах находится в такой же связи с продолжительностью жизни ядра, какая имеется в отношении α-частиц.

По Ферми

$$k \cdot \lambda = E_m^5, \tag{63,7'}$$

где λ — постоянная β-распада, или

$$\lg E_m = A + B \lg \lambda = \frac{\lg k}{5} + 0,2 \lg \lambda, \tag{63,6'}$$

что аналогично (63,6).

Кроме упомянутых α- и β-распадов, у тяжелых ядер (например, U^{235}) имеется еще один вид спонтанных превращений, называемый делением ядра. Тяжелое ядро разделяется при этом на два ядра-осколка и несколько (два, три) нейтронов.

Ядра-осколки уносят примерно 82,5% энергии деления и, в свою очередь, радиоактивны. Они образуют цепь β-распадающихся ядер изотопов элементов. В конечном счете 10% энергии деления приходится на β-излучение, 5% — на γ-кванты и 2,5% уносят образовавшиеся нейтроны.

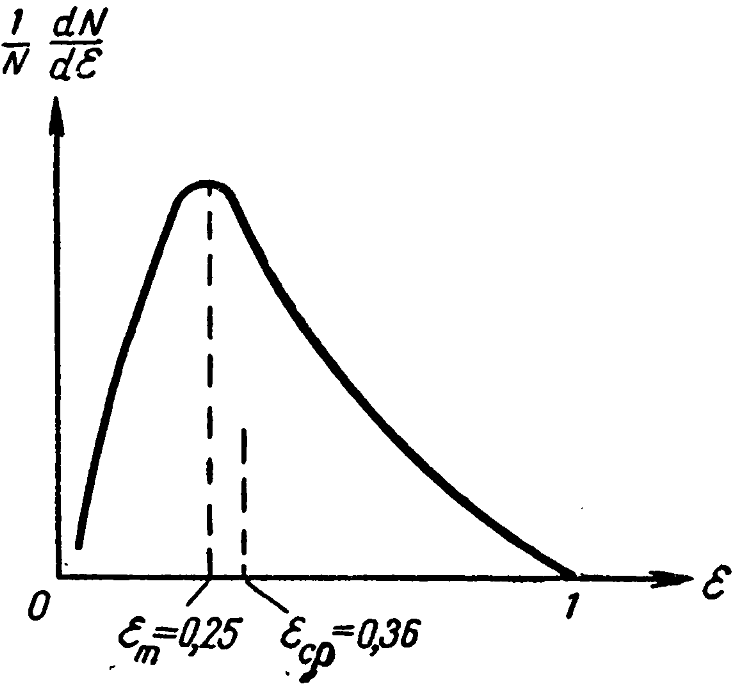


Рис. 63-4. Распределение по энергиям числа β-частиц в β-спектре

Естественные радиоактивные элементы образуют четыре последовательности превращений, или четыре семейства, каждое из которых имеет одну и ту же формулу числа нуклонов в ядре. В связи с тем, что число нуклонов в ядре изменяется только при α-распаде и, следовательно, только на четыре единицы, формулы массовых чисел в различных семействах будут $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ и $4n + 3$ при целом n, лежащем в границах $50 < n < 60$ (рис. 63-5).

Цепь α- и β-превращений в каждом семействе заканчивается изотопами свинца (для β-радиоактивного Pb^{209} — изобаром свинца Bi^{209}). В каждом семействе содержится изотоп 88-го элемента радия. Родоначальником семейства обычно считают наиболее тяжелый, долгоживущий изотоп. Каждый α-распад означает не только уменьшение числа частиц в ядре на четыре нуклона, но и потерю двух элементарных положительных зарядов. При β-распаде изменяется только заряд, причем в сторону увеличения на единицу при испускании e^- и в сторону уменьшения на единицу при вылете e^+. Очевидно, один α-распад и два последовательных минус β-распада приводят к ядру изотопа. Оба типа распада могут сопровождаться

возбужденными состояниями ядер-продуктов и, следовательно, испусканием γ-квантов. Когда протон в ядре превращается в нейтрон, возможны два пути преобразования. Если собственная энергия массы исходного ядра превышает собственную энергию массы ядра-продукта более, чем на $2m_0 c^2 \approx 1$ *Мэв,* то в ядре образуется виртуальная пара лептонов. При этом происходит присоединение электрона к протону, т. е. вылет позитрона и нейтрино, так что

$$p \to p + e^- + e^+ \to n + e^+ + \nu. \qquad (63,8)$$

Ядро-продукт может оказаться при этом в возбужденном состоянии и тогда оно испускает γ-квант.

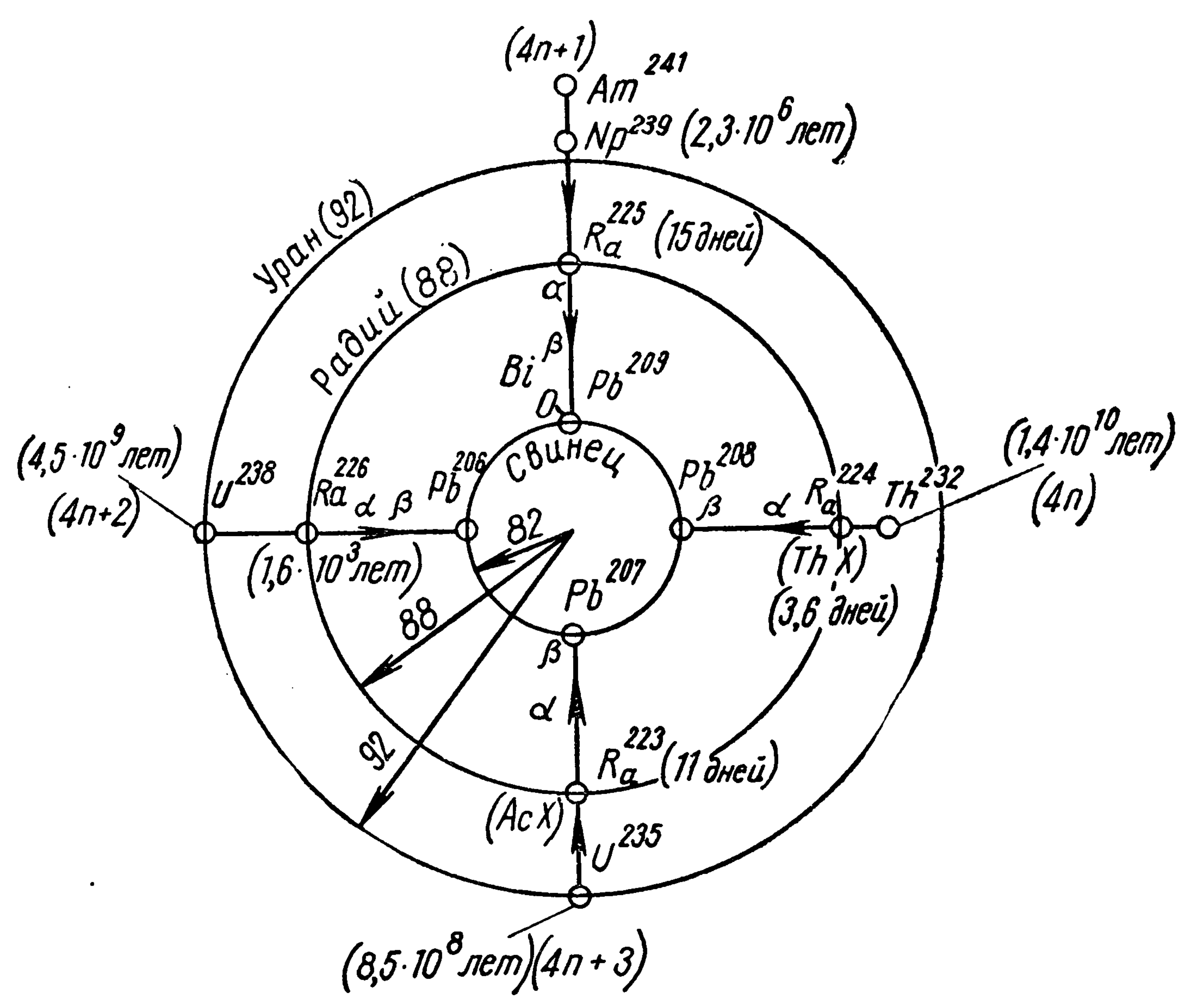


Рис. 63-5. Схема распада естественных радиоактивных элементов. В скобках приведены периоды полураспада соответствующих нуклидов

Примером может служить плюс β-распад, например

$${}_7N^{13} \to {}_6C^{13} + e^+ + \nu.$$

Энергия вылетающих позитрона и нейтрино составит

$$[M({}_7N^{13}) - M({}_6C^{13}) - m_0]\, c^2 \approx 1{,}2 \text{ Мэв}. \qquad (63,9)$$

Однако, если ядро-продукт более стабильно, чем исходное, возможен захват ядром *K*-электрона оболочки, и тогда превращение происходит по схеме:

$$p + e^-_{(K)} \to n + \nu + (h\nu)_K. \qquad (63,10)$$

Как видно, происходит также β-превращение, но без вылета позитрона. Вместе с тем возбужденный атом-продукт будет испускать

характеристический K-квант рентгеновского излучения $(h\nu)_K$. В общем случае оба процесса могут протекать параллельно, например, при β^+-превращении ядра ${}_{25}Mn^{52}$ в ядро ${}_{24}Cr^{52}$. 35% превращений происходит с испусканием позитрона и 65% с K-захватом. Кроме четырех семейств естественных радиоактивных элементов (см. рис. 63-5), слабая радиоактивность с большим временем жизни отмечается также у ядер ряда изотопов: ${}_{19}K^{40}$ (β, γ) — $5 \cdot 10^8$ лет, ${}_{37}Rb^{87}$ (α, γ) — $5 \cdot 10^{10}$лет, ${}_{62}Sm^{152}$ (α) — 10^{11} лет, ${}_{71}Lu^{176}$ (β, γ) — $2{,}5 \cdot 10^{10}$ лет;${}_{75}Re^{187}$ (β) — $4 \cdot 10^{12}$ лет. 1 *г* Ra^{226} за 1 *сек* претерпевает $3{,}7 \cdot 10^{10}$ распадов. Эту частоту распадов принимают за единицу радиоактивности и называют кюри (1 *кюри* $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ *сек*$^{-1}$). Иногда пользуются другой единицей активности — резерфордом (1 *рф* $= 10^6$ *сек*$^{-1}$).

Распад ядер представляется случайным событием, а потому изменение радиоактивности во времени должно подчиняться статистической закономерности. Если N будет обозначать число радиоактивных ядер, имеющихся в данный момент, λ — вероятность распада каждого отдельного ядра за единицу времени (или долю числа ядер N, которая соответствует распадающимся за единицу времени ядрам), то уменьшение числа радиоактивных ядер за время dt выразится соотношением:

$$- dN = N \cdot \lambda \cdot dt. \qquad (63,11)$$

После интегрирования (63,11) в границах рассматриваемого интервала времени $t = t_2 - t_1$ получим

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (63,12)$$

Полагая, что при $t = T$ $N_T = \frac{1}{2} N_0$, т. е. обозначая через T время, в течение которого распадается половина всех первоначально имевшихся радиоактивных ядер (период полураспада), будем иметь

$$\lambda T = \ln 2 = 0{,}69, \qquad (63,13)$$

и тогда временной закон распада (63,12) может быть записан в форме

$$N_t = N_0 e^{-0{,}69\frac{t}{T}} \quad \text{или} \quad a_t = a_0 e^{-0{,}69\frac{t}{T}}, \qquad (63,12')$$

где a_0 обозначает активность используемого препарата (рис. 63-6). Число ядер, распавшихся за рассматриваемый интервал времени,

$$\Delta N = N_0 - N_t = N_0 \left(1 - e^{-0{,}69\frac{t}{T}}\right). \qquad (63,14)$$

Так как в радиоактивных семействах на смену распадающемуся ядру (*1*) появляется ядро-продукт (*2*), который, в свою очередь, радиоактивен, то в закрытых сосудах между материнским и дочерним радиоактивными веществами возможно установление радиоактивного равновесия.

Пусть N_1 и λ_1 — соответственно число ядер и постоянная распада материнского вещества, а N_2 и λ_2 — то же для дочернего вещества, тогда можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \end{aligned}\right\} \qquad (63,15)$$

Написанные линейные дифференциальные уравнения имеют общие решения в виде

$$N_1 = N_{1,0}\, e^{-\lambda_1 t},$$
$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} e^{-\lambda_1 t} + \left(N_{2,0} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0}\right) e^{-\lambda_2 t}. \qquad (63,16)$$

В частном случае, когда $\lambda_2 > \lambda_1$, или $T_2 < T_1$, и начальные количества ядер относятся как $\frac{N_{2,0}}{N_{1,0}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, имеем

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \text{const},$$

причем оба вещества изменяются с периодом материнского вещества (переходное равновесие). Условие $N_{2,0} = 0$ и $\lambda_2 \gg \lambda_1$, согласно (63,16), приводит к соотношению

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1 \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right). \qquad (63,17)$$

При достаточно большом t уравнение (63,17) приводит к секулярному или вековому равновесию, при котором

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1 = \frac{T_2}{T_1} N_1 = \text{const}. \qquad (63,18)$$

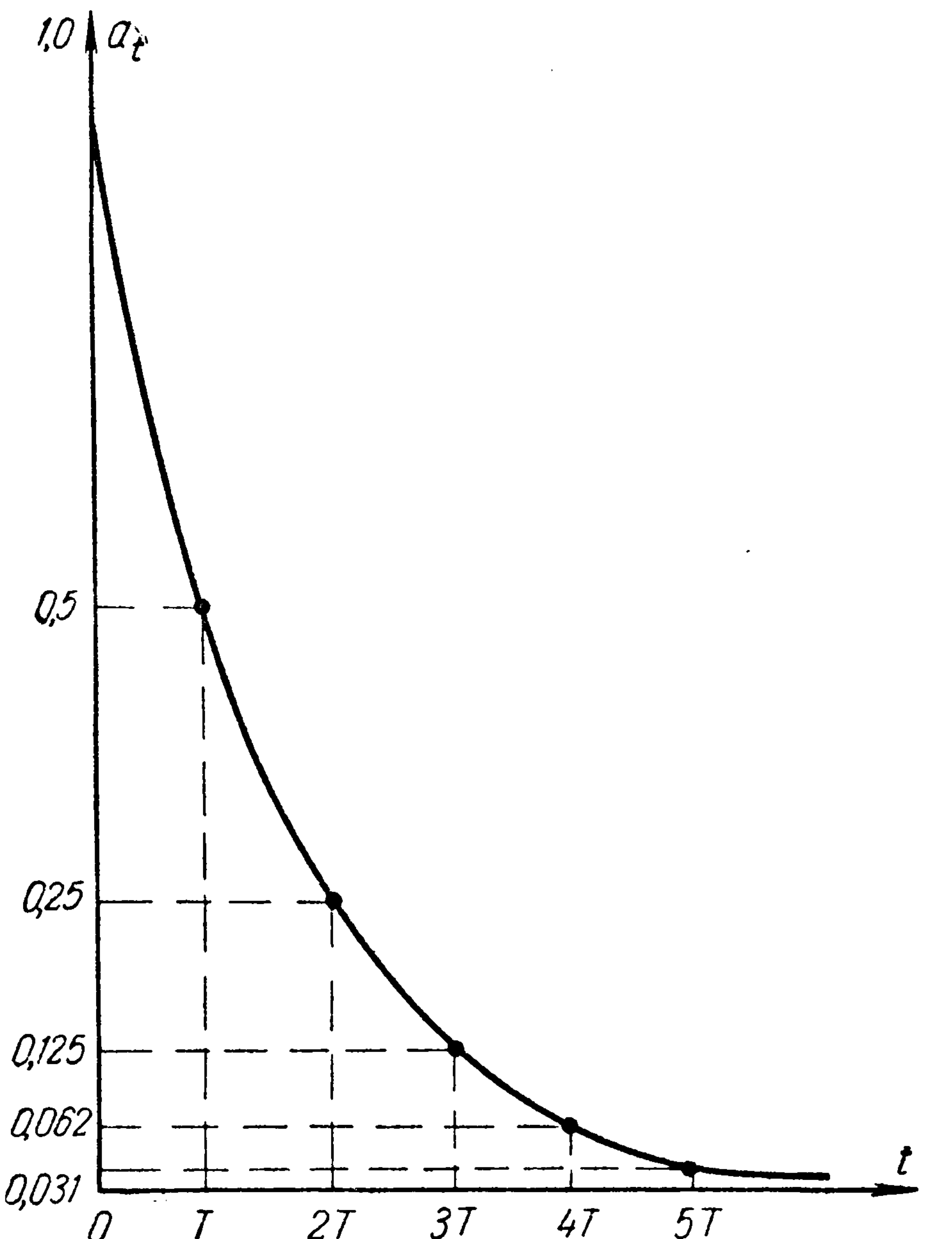


Рис. 63-6. Экспоненциальный закон убывания радиоактивности источника

Так как родоначальники радиоактивных семейств имеют очень большие периоды полураспада, то в течение геологических эпох между всеми членами семейства устанавливается вековое равновесие, при котором количества радиоактивных веществ пропорциональны их периодам полураспада. Например, в равновесии с 1 *кг* U^{238} ($T = 1{,}4 \cdot 10^{17}$ *сек*) находятся $3{,}4 \cdot 10^{-7}$ *г* Ra ($T = 4{,}99 \cdot 10^{10}$ *сек*) и $9{,}9 \cdot 10^{-12}$ *г* Ru ($3{,}3 \cdot 10^5$ *сек*). Примерное распределение по энер-

гии между частицами для Ra с продуктами его распада будет для α-частиц 123 *кал/ч* = 515 *дж/ч*; β-частиц 5,5 *кал/ч* = 23 *дж/ч*; ν-частиц 2 *кал/ч* = 8,5 *дж/ч*; γ-квантов 9,5 *кал/ч* = 39 *дж/ч*.

Лекция 64

ЯДЕРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Необычайно плотная упаковка ядерного вещества означает его сплошность для всех частиц, кинетическая энергия которых менее 100 *Мэв*. Влетающая в ядро частица будет взаимодействовать с отдельным нуклоном только в том случае, если длина фазовой волны этой частицы, например протона или нейтрона, по крайней мере не будет превышать расстояния между нуклонами в ядре, т. е.

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_p v} \leqslant l \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \qquad (64,1)$$

откуда $v \approx 3 \cdot 10^9$ *см/сек*, или время пролета частицей расстояния l в ядре $\tau = \frac{l}{v} \approx 10^{-22}$ *сек*. Если время t соударения частицы со связанным нуклоном больше τ, то взаимодействие происходит с ядром в целом и лишь при очень быстрых частицах, для которых длительность столкновения лежит в пределах характерного ядерного времени 10^{-22} *сек*, ядро можно рассматривать как систему разобщенных частиц. Вероятность пролета частицы сквозь атомное ядро без столкновения с нуклоном очень мала. Пробег нейтрона с энергией E = 100 *Мэв* в ядерном веществе составляет $4 \cdot 10^{-13}$ *см*, а с энергией 1 *Мэв* — только 10^{-14} *см*. После проникновения частицы сквозь поверхность ядра ее энергия передается большому числу нуклонов, причем возникает новое квантовое коллективное движение всех ядерных частиц, чем создается квазистационарное образование, которое называется составным, или компаунд-ядром. Взаимодействие с ядрами происходят, таким образом, в четыре этапа: возбуждение ядра-мишени, захват частицы (если захват происходит), образование составного ядра и его превращения с испусканием γ-кванта излучения, одной частицы, нескольких частиц, осколков деления ядра, или, наконец, с полным освобождением нуклонов, т. е. ядерным взрывом.

Явления, протекающие в составном ядре, не связаны с процессом образования этого ядра.

Ядерные взаимодействия характеризуются следующими величинами: родом и числом возникающих частиц, что выражается с помощью символической формулы взаимодействия, вероятностью реакции, определяемой эффективным сечением процесса, энергией реакции (выделяемой или поглощаемой), временем течения реакции и пороговыми значениями энергии активации, или, иначе, энергией возбуждения реакции.

При всех ядерных превращениях и взаимодействиях оказывается справедливым ряд законов «сохранения». К ним относятся такие соотношения механики, как закон сохранения и превращения энергии, по которому сумма энергий частиц до превращения (индекс штрих) равна сумме энергий частиц после превращения (индекс два штриха) $\left(\sum_i' W_i = \sum_k'' W_k\right)$, закон сохранения импульса $(\vec{p}' = \vec{p}'')$ и закон сохранения момента количества движения $(J' = J'')$. Наряду с этими соотношениями справедливы также законы сохранения состава, по которым при ядерных взаимодействиях сохраняется полное число барионов и постоянство электрических зарядов. Для превращений без образования новых элементарных частиц это означает, что

$$\sum_i' A_i = \sum_k'' A_k$$

и

$$\sum_i' Z_i = \sum_k'' Z_k.$$

Помимо приведенных классических соотношений, справедливы также соотношения квантовой механики, а именно: при ядерных превращениях сохраняется «четность» волновых функций частиц, их «статистика», а при сильных быстрых взаимодействиях с образованием новых барионов — квантовое свойство, называемое странностью.

Ядерные взаимодействия подразделяют на столкновения (упругие и неупругие) и ядерные реакции. При упругих столкновениях не происходит перегруппировки нуклонов, преобразований ядерной энергии или образования новых частиц, но имеется перераспределение импульса и кинетической энергии частиц, т. е. рассеяние частиц и их торможение $(a + A \to a + A)$.

Неупругое столкновение характеризуется преобразованием кинетической энергии частицы в иной вид, т. е. перераспределением энергии между взаимодействующими частицами, так что $a + A \to a' + A^*$ (где A^* обозначает возбужденное состояние ядра-мишени A). Ядерные реакции соответствуют случаям таких взаимодействий, при которых происходит перегруппировка частиц и перераспределение их энергии, так что $A + a \to b + B$ или $A\ (a,\ b)\ B$. Примером может служить первая искусственно осуществленная ядерная реакция превращения элементов (Резерфорд, 1919 г.):

$${}_7N^{14} + {}_2He^4 \to {}_1H^1 + {}_8O^{17} \quad \text{или} \quad N^{14}(\alpha,\ p)\,O^{17}.$$

Эффективные сечения (вероятности) ядерных взаимодействий изменяются в широких границах от 10^{-45} *см*^{2} = 10^{-21} *барн* для актов рассеяния нейтрино на ядрах (или для актов захвата ядрами заряженных частиц малых энергий) до 10^{-18} *см*^{2} = 10^6 *барн* для актов захвата медленных нейтронов тяжелыми ядрами. В энергетическом

отношении ядерные реакции характеризуются их тепловым эффектом Q:

$$Q = c^2 \left[\sum_i{}' m_i - \sum_k{}'' m_k \right]. \tag{64,2}$$

Если $Q > 0$, то реакция происходит с выделением тепла (экзотермическая реакция). При $Q < 0$ (эндотермическая реакция) реакция возможна только, если ввести энергию извне в виде кинетической энергии сталкивающихся частиц. Наименьшая энергия сталкивающихся частиц, при которой эндотермическая реакция становится возможной, называется пороговой энергией $\varepsilon_п$. Например, для реакции T^3 (p, n) He^3 тепловой эффект $Q = -0{,}76$ *Мэв*, при этом пороговая энергия (энергия налетающей частицы — протона) $\varepsilon_п = 1{,}02$ *Мэв*. Пороговая энергия всегда несколько больше теплового эффекта реакции. Из законов сохранения (64,3 и 64,4) следует, что

$$\varepsilon_п = |Q| \frac{m + M}{M},$$

где m — масса налетающей частицы, M — массса покоящейся частицы (в приведенном примере $\varepsilon_п = 0{,}76 \cdot 4/3 = 1{,}02$ *Мэв*).

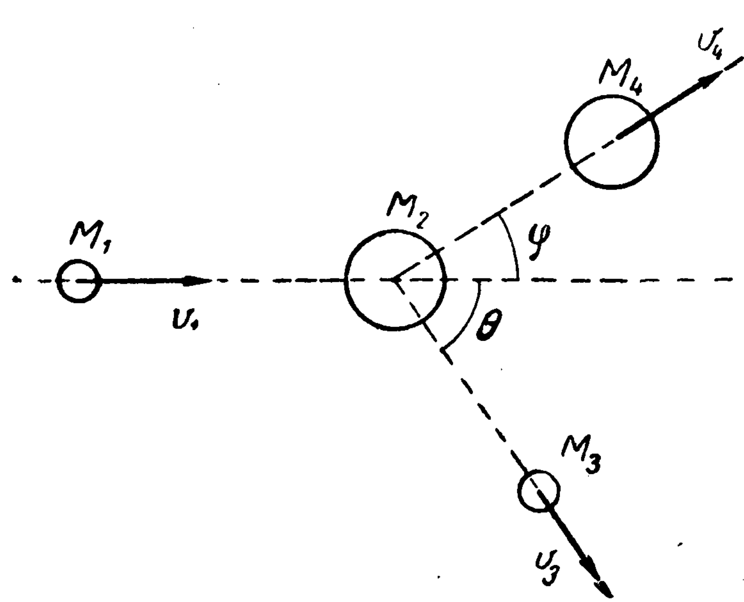


Рис. 64-1. Схема ядерной реакции: φ — угол вылета остаточного ядра; θ — угол вылета вторичной частицы

В циклотронах при использовании дейтронов в качестве разгоняемых частиц важное значение приобретают реакции на тех дейтронах, которые осели на мишени во время предыдущих облучений. Слияние ядер H^2 приводит к образованию сильно возбужденного расщепляющегося промежуточного ядра ($H^2 + H^2 \to He^4$) с испусканием этим составным ядром дейтрона, нейтрона или протона [(H^2(d, d) H^2 — рассеяние; H^2 (d, n) He^3; H^2 (d, p) H^3]. Обозначим массы налетающей частицы, ядра-мишени, вторичной частицы и остаточного ядра соответственно через M_1, M_2, M_3, M_4, кинетическую энергию каждой частицы через $E_i = \frac{1}{2} M_i v_i^2$ и импульс ее через $p_i = M_i v_i = \sqrt{2M_i E_i}$.

По закону сохранения энергии имеем:

$$E_1 + Q = E_3 + E_4, \tag{64,3}$$

где

$$Q = c^2[(M_1 + M_2) - (M_3 + M_4)], \tag{64,2'}$$

по закону сохранения импульса (рис. 64-1)

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{M_1E_1} &= \sqrt{M_3E_3}\cos\theta + \sqrt{M_4E_4}\cos\varphi \\ 0 &= \sqrt{M_3E_3}\sin\theta - \sqrt{M_4E_4}\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{64,4}$$

откуда

$$Q = E_3\left(1 + \frac{M_3}{M_4}\right) - E_1\left(1 - \frac{M_1}{M_4}\right) - \frac{2\sqrt{M_1 M_3 E_1 E_3}}{M_4}\cos\theta. \quad (64,5)$$

При реакции рассеяния H^2 (d, d) H^2 $Q = 0$, причем E_3 имеет наибольшее значение, когда $\theta = 0$, а наименьшее — при $\theta = \pi$. Пользуясь (64,2′), для реакции $H^2 + H^2 \rightarrow p + H^3 + Q$ получаем, что $Q = 3{,}96$ *Мэв*, а для $H^2 + H^2 \rightarrow n + H^3 + Q$ имеем $Q = 3{,}16$ *Мэв*. Из формулы (64,5) для этого случая вытекает, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$ энергия вылетающих нейтронов будет

$$(E_n)_{\pi/2} = (E_3)_{\pi/2} =$$
$$= \frac{M_4}{M_4 + M_3}\left[Q + \frac{M_4 - M_1}{M_4} E_1\right] = \frac{3}{3+1}\left[3{,}16 + \frac{3-2}{3} E_1\right] =$$
$$= \frac{3}{4}\cdot 3{,}16 + \frac{1}{4} E_1. \quad (64,6)$$

Очевидно, для всех значений $E_1 > 3{,}16$ *Мэв* кинетическая энергия поперечных нейтронов будет больше кинетической энергии падающего дейтрона $[(E_n)_{\pi/2} > E_1]$. При $\theta < \frac{\pi}{2}$ (выброс вперед) $E_3 > (E_3)_{\pi/2}$.

Классификация ядерных реакций обычно проводится по трем признакам: по типу частиц, вызывающих реакции, по энергиям этих частиц и по виду вызванных ядерных превращений.

Если располагать частицы в порядке их эффективности для ядерных превращений, то на первом месте следует поставить нейтроны (n), поскольку для них у ядра-мишени не существует потенциального барьера. За ними следуют протоны, как наиболее устойчивые барионы с единичным зарядом, сложные ядра, начиная с дейтронов (d), весьма устойчивые ядра гелия He^4 (α-частицы), более сложные ядра (N^{14}, O^{16}) и, наконец, гамма-кванты электромагнитных излучений (γ).

Обычно считается, что частица обладает малой энергией, если ее кинетическая энергия $\varepsilon < 1$ *кэв*, средней, если 1 *кэв* $< \varepsilon <$ 1 *Мэв*, большой, когда 1 *Мэв* $< \varepsilon <$ 100 *Мэв*, и очень большой при $\varepsilon >$ 100 *Мэв*.

Наиболее существенным классификационным признаком ядерной реакции служит характеристика ядерного превращения. Простейшим случаем является реакция без захвата частицы, но с кулоновским возбуждением ядра-мишени от приближения заряженной частицы. Время возбужденного состояния ядра-мишени составляет 10^{-13} *сек*, после чего им испускается гамма-квант, уносящий энергию возбуждения. Такого рода реакции без захвата частицы ядром характерны для взаимодействия частиц средних энергий с ядрами, имеющими $A < 50$.

Следующей специфической ядерной реакцией является радиационный захват частицы, под которым подразумевается превращение типа X^A (n, γ) X^{A+1}. Оно чрезвычайно распространено в установках с цепными реакциями на медленных нейтронах. В качестве примера можно привести радиационный захват медленных нейтронов кадмием: Cd^{113} (n, γ) Cd^{114}. Реакция имеет большое эффективное сечение $\sigma_0 = 2500$ *барн* и используется для регулирования режима работы ядерных реакторов. Подобным образом радиационный захват нейтронов ядрами водорода H^1 (n, γ) H^2 наблюдается в реакторах с водой, применяемой в качестве теплоносителя, замедлителя или экранирующего материала в бетонных защитных стенах. Возможен радиационный захват не только нейтронов, но и других частиц, например α-частиц в реакции Be^9 (α, γ) C^{13} с выходом гамма-квантов $h\nu \approx 5$ *Мэв*.

Характерным видом ядерного превращения является ядерный распад, или реакция типа

$$_{Z_1}X^{A_1}(k,\ r)_{Z_2}Y^{A_2},$$

где k и r — символы захваченной и испущенной частиц.

Встречается очень большое число таких реакций, так что для примера рассматриваются только некоторые избранные.

Ядерное превращение по реакции N^{14} (α, p) O^{17} было первым осуществленным превращением элементов. При этом были использованы α-частицы, вылетающие из ядер радия при его естественном радиоактивном распаде. Искусственное расщепление ядер по реакции Li^7 $(p, —)$ $2He^4$ (Кокрафт, 1932 г.) было осуществлено путем воздействия на ядра изотопа лития ускоренными протонами с энергией порядка 600 *кэв*. Реакция ядерного распада Be^9 (α, n) $C^{12} + \gamma$ используется для получения быстрых нейтронов в радий-бериллиевых источниках ($\varepsilon_n = 1{,}3$ *Мэв*; $1{,}5 \cdot 10^7$ *сек*$^{-1}$ на 1 *г* Ra) и для получения долгоживущего радиоактивного изотопа углерода C^{14} ($T = 4{,}7 \cdot 10^3$ лет), имеющего большое значение в биохимии и археологии: N^{14} (n, p) C^{14}, а также для получения трития Li^6 (n, α) H^3, применяемого в термоядерных реакциях, и, наконец, для детектирования медленных ($\varepsilon \leqslant 0{,}03$ *Мэв*) нейтронов по реакции B^{10} $(n, \alpha)Li^7$ поскольку эта реакция имеет большое эффективное сечение порядка 400 *барн* (пропорциональные счетчики, наполненные газом BF_3, ионизационные камеры с подкладкой B_4C).

Реакции распада атомных ядер могут происходить с выбрасыванием составным ядром не одной, а многих частиц, например с испусканием двух нейтронов в ядерном превращении вида

$$Be^9\,(n,\ 2n)\,Be^8 \rightarrow 2He^4$$

при энергетическом пороге реакции в 1,8 *Мэв* (используется для увеличения размножения нейтронов в реакторах с бериллиевым

замедлителем) или с образованием альфа-протонного распада («звезда» треков) и даже множественного распада при ядерных взрывах (распад ядра Ag в фотоэмульсиях) под действием космических протонов высоких энергий.

Ядерная реакция стриппинга заключается в срыве ядром-мишенью нейтронов (быстрые нейтроны 100 *Мэв*) с ядер дейтерия, разогнанных в циклотронах, например при реакции Be^9 (d, n) B^{10}. Реакция ядерного фоторасщепления состоит в вылете нейтронов из ядра-мишени под действием гамма-кванта излучения достаточной энергии, например H^2 (γ, n) H^1 при $h\nu > 2{,}2$ *Мэв*. Эта реакция приводит к увеличению нейтронного размножения в реакторах с тяжелой водой в качестве замедлителя.

Другим примером ядерного фоторасщепления являются фотонейтронные бериллиевые источники Be^9 (γ, n) Be^8 с порогом реакции $h\nu = 1{,}6$ *Мэв* и энергией нейтронов 0,15 *Мэв* (выход нейтронов $\sim 10^6$ $сек^{-1}$ на 1 *г* Ra — γ), или сурьмяновые источники тепловых нейтронов ($E = 0{,}03$ *эв*)

$$Sb^{124}(\gamma,\ n)\,Sb^{123}\,(\sim 10^7\ сек^{-1}\ на\ 1\ г\ Ra-\gamma).$$

Реакция деления (кривая *2*, рис. 64-2) характерна для тяжелых ядер-мишеней при захвате ими медленных нейтронов, однако она возможна и на менее тяжелых ядрах, но от частиц больших энергий, например на ядрах тантала от α-частиц с энергией 400 *Мэв*. Реакция деления урана на тепловых нейтронах представляется в следующем виде:

$$U^{235} + n^1 \rightarrow U^{236} \rightarrow {}_{Z_1}X^{A_1} + {}_{Z_2}Y^{A_2} + (2 \div 3)\,n^1 + \gamma + \beta.$$

При этом можно отметить (рис. 64-3), что $Z_1 + Z_2 = 92$, а $A_1 + A_2 = A - (2 \div 3)\,n$ и чаще всего $\frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{2}$, однако с уменьшением A это отношение стремится к единице. Ядра-осколки ${}_{Z_1}X^{A_1}$ и ${}_{Z_2}Y^{A_2}$ β-радиоактивны и цепочкой преобразуются в устойчивые ядра (см. лекцию 63).

Примерное распределение энергии между продуктами деления U^{236} представляется в следующем виде: ядра-осколки 165 *Мэв*; нейтроны ($2 \div 3$) 5 *Мэв*; β-частицы 5 *Мэв* и γ-кванты всех процессов ~ 20 *Мэв*.

Реакция слияния легких ядер (кривая *1*, рис. 64-2), например дейтрона с тритоном $H^2 + H^3 \rightarrow He^4 + n$, характерна для термоядерного превращения с освобождением энергии. Она протекает с заметной скоростью при температуре порядка 10^{10} °K и выше (из условия, что энергия активации $\varepsilon_a \approx 1$ *Мэв* $= kT$) с положительным тепловым эффектом $Q = 17{,}6$ *Мэв* на каждый акт слияния. Практически выгодными являются реакции слияния легких ядер и реакции деления тяжелых ядер (см. рис. 64-2).

Ядра-осколки так же, как и многие искусственно полученные ядра-продукты при реакциях расщепления ядер, оказываются β-радиоактивными. Они широко используются в различных обла-

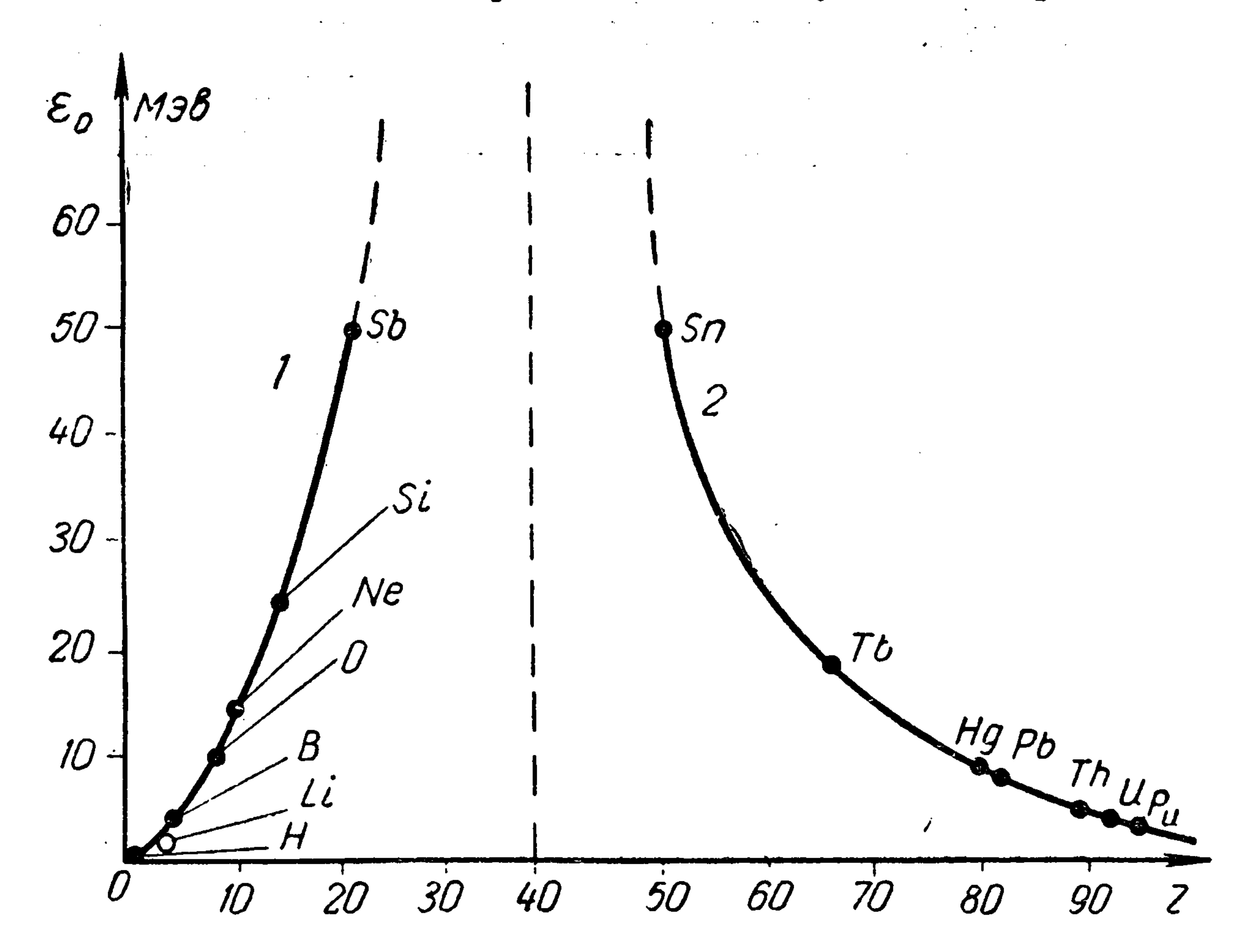


Рис. 64-2. Зависимость энергии активации ядерных процессов от заряда ядра:

1 — для слияния легких ядер; *2* — для деления тяжелых ядер

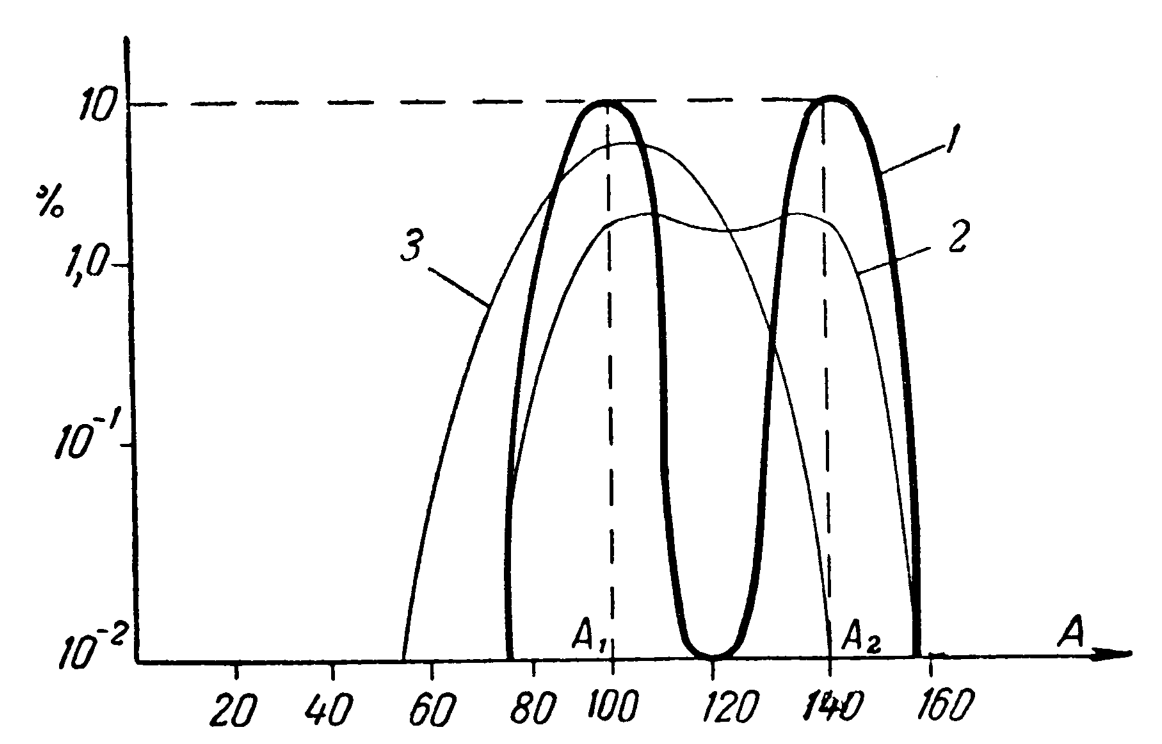


Рис. 64-3. Распределение ядер-осколков по количеству нуклонов в них (А):

1) $U^{235} + n$ ($E_n = 0{,}025$ *Мэв*); *2*) $Tn^{232} + \alpha$ ($E\alpha = 38$*Мэв*); *3*) $Bi^{209} + d$ ($E_d = 200$ *Мэв*)

стях науки, техники, промышленности, медицины и сельского хозяйства в качестве радиоактивных индикаторов. Можно отметить, что во всех случаях нуклонных превращений, приводящих к β-ра-

диоактивным ядрам, знак их активности (электронная или позитронная) определяется условием превращения радиоактивного ядра-продукта в изотоп исходного ядра. Это означает, что при реакции (*n, p*) будет минус β-активность ядра-продукта, а при (*p, n*) — плюс β-активность. В табл. 26 приведены сведения о некоторых наиболее широко применяемых β-радиоактивных индикаторах.

Таблица 26

Название и обозначение ядер	Период полураспада T	$E(\beta)_m$ в *Мэв*	$h\nu(\gamma)$ в *Мэв*	Реакция получения
Углерод β^- $_6C^{14}$	$5 \cdot 10^3$ лет	0,15	—	$N^{14}(n, p)C^{14}$
Азот β^+ $_7N^{13}$	10 месяцев	1,2	0,51 0,29	$C^{12}(d, n)N^{13}$
Натрий β^- $_{11}Na^{24}$	15 *ч*	1,4	1,38 2,76	$N^{23}(d, p)Na^{24}$
Фосфор β^- $_{15}P^{32}$	14,3 дней	1,69	—	$S^{32}(n, p)P^{32}$
Железо β^- $_{26}Fe^{59}$	48,5 дня	0,5	1,1 и 1,3	$Co^{59}(n, p)Fe^{59}$
Кобальт β^- $_{27}Co^{60}$	5,3 лет	0,29	1,16 1,32	$Co^{58}(n, \gamma)Co^{60}$
Хром β^- $_{38}Cr^{89}$	55 дней	0,65	0,55 0,80	$Sr^{88}(n, \gamma)Sr^{89}$
Йод β^- $_{53}J^{131}$	12,5 *ч*	0,83	0,4 0,5	$Cs^{133}(n, \alpha)J^{130}$

Лекция 65

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЕЩЕСТВО

Наибольшее значение в практике имеет проникновение в вещество α- и β-излучений. Многие тяжелые ядра спонтанно распадаются с испусканием моноэнергетических α-частиц, а короткоживущие радиоактивные ядра — еще и гамма-квантов. Энергия α-частиц, испускаемых различными естественно радиоактивными ядрами, лежит в границах от $E = 3$ *Мэв* для $_{83}Bi^{209}$ с периодом полураспада $T = 2,7 \cdot 10^{17}$ лет до $E = 11$ *Мэв* для $_{84}Po^{212}$ с периодом $T = 2,9 \cdot 10^{-7}$ *сек.*

1 *г* $_{88}Ra^{226}$ в равновесии с продуктами распада до $_{84}Po^{210}$ включи-

тельно ежесекундно испускает $1{,}84 \cdot 10^{11}$ α-частиц с числом γ-квантов, равным 2,3 на каждый α-распад. Таким образом, при активности препарата Ra в 1 *кюри* ежесекундно испускается $3{,}7 \cdot 10^{10}$ α-частиц и $8{,}5 \cdot 10^{10}$ γ-квантов с энергиями внутри интервала от 0,19 *Мэв* до 2,7 *Мэв*. Аналогично 1 *г* ${}_{88}Ra^{228}$ в равновесии с продуктами распада до ${}_{84}Po^{212}$ (ThC′) включительно ежесекундно испускает $2{,}46 \cdot 10^{4}$ α-частиц и 2,3 γ-кванта на распад с энергиями в границах от 0,06 *Мэв* до 2,6 *Мэв*.

Проникновение заряженных частиц в вещество сопровождается упругими и неупругими взаимодействиями с ионизированными атомами и молекулами, а также испусканием тормозного излучения. При упругом взаимодействии происходит рассеяние частиц и частичная передача их кинетической энергии атомам вещества. Неупругое взаимодействие связано с преобразованием энергии частицы в энергию возбуждения атомов при их ионизации и в энергию возбуждения ядер при проникновении частицы в ядро. Основное значение в преобразовании энергии частиц имеет ионизация атомов среды, а для β-частиц высоких энергий — тормозное излучение, характеризуемое значением поперечного сечения процесса торможения $\sigma = \sigma(E)$ (рис. 65-1, *а*).

Упругое (кулоновское) взаимодействие заряженных (Z') частиц с тяжелыми ядрами (Z) в нерелятивистских случаях $\left(\beta = \frac{v}{c} \to 0\right)$ приводит к рассеянию этих частиц с распределением по углам рассеяния θ в соответствии с формулой Резерфорда (13,18), которая для случая протяженной мишени имеет вид

$$f(\theta) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{d\theta} = \frac{1}{4} nd \left(\frac{e^2 ZZ'}{mv^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \qquad (65,1)$$

Формула справедлива для энергий частиц, при которых максимальные сближения частиц с ядром-мишенью еще достаточно велики (не менее 10^{-12} *см*). Здесь n — объемная концентрация ядер-мишени, d — толщина рассеивающего слоя, так что nd представляет число ядер, приходящихся на единицу поверхности рассеивающей среды, и $mv^2 = 2E$ — удвоенная кинетическая энергия рассеиваемой частицы. Очевидно, при $\theta \to 0$ $f(\theta) \to \infty$, т. е. рассеяние вперед происходит чаще всего; при $\theta \to \pi$ $f(\theta) \sim \left(\frac{Z}{E}\right)^2$, т. е. рассеяние назад происходит чаще от более тяжелых ядер и при этом от частиц с малой кинетической энергией.

Пробег заряженной частицы в среде сложным образом зависит от ее энергии E (рис. 65-1, *б*). Для α-частиц можно с достаточным приближением (в пределах 15%) считать, что линейный пробег в веществе с атомным весом A составляет при $E > 2$ *Мэв*

$$R_\alpha \approx 10^{-4} \cdot E^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{A}{\rho}} \text{ см}. \qquad (65,2)$$

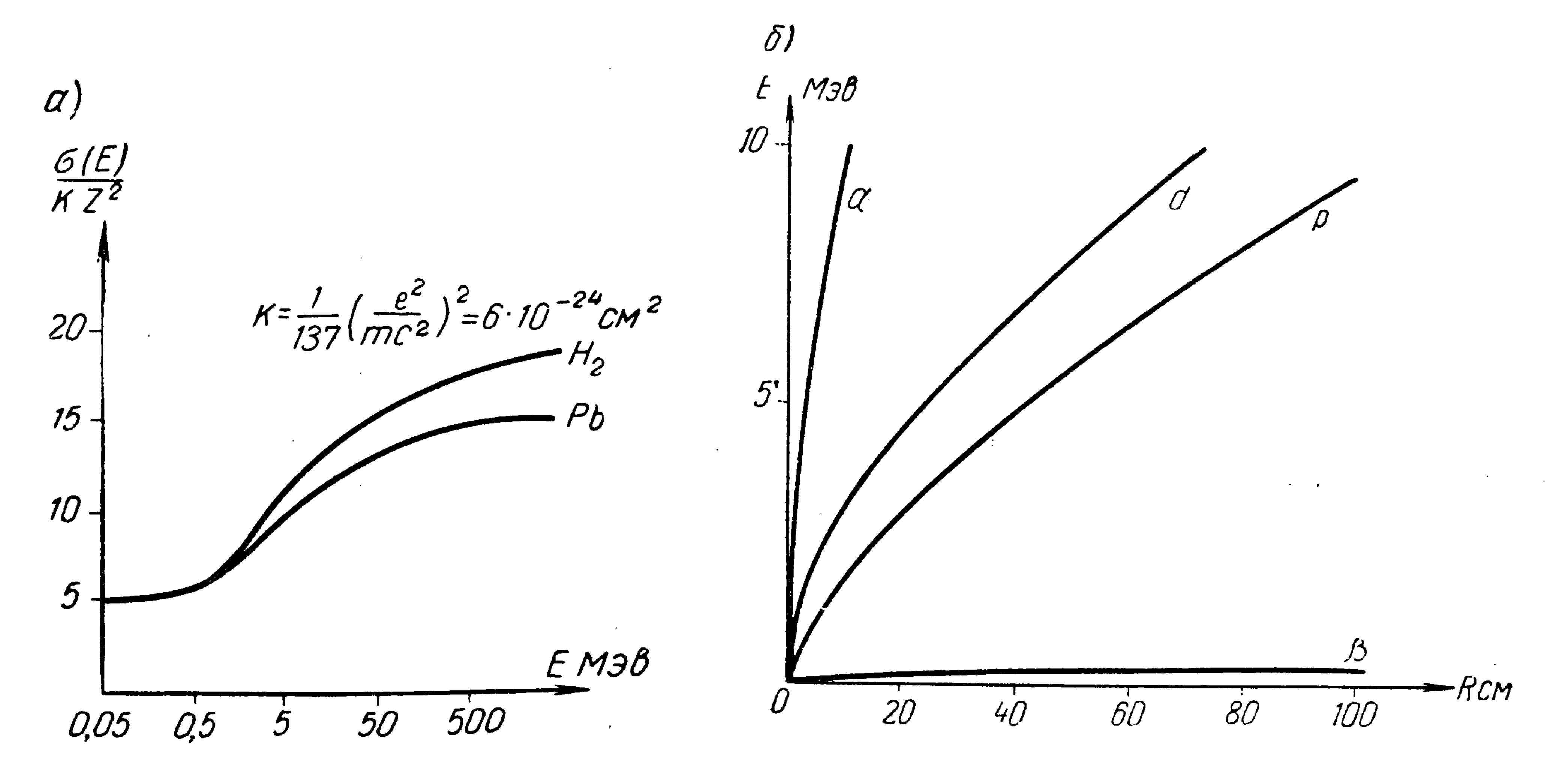


Рис. 65-1. *а*. Зависимость поперечного сечения σ (*E*) процесса торможения электронов излучения в веществе. *б*. Зависимость экспериментального пробега α, *d*, *p* и β частиц в воздухе от их энергии

Например, при $E = 10$ *Мэв* в воздухе $R_\alpha = 0{,}32 \cdot E^{\frac{3}{2}} = 10$ *см*, а в алюминии $R_\alpha = 63$ *мк*.

Часто указывают не линейный пробег, а массовую глубину проникновения частицы $(R_m) = L_m = \rho R$, которая представляет собой массу вещества вдоль пути линейного пробега частицы, отнесенную к единице площади сечения пучка частиц.

Ионизация, производимая заряженной частицей на длине ее пробега, не остается постоянной (рис. 65-2). В конце пробега вследствие увеличения времени взаимодействия с элементами вещества линейная плотность ионизации достигает наибольшего значения, в несколько раз превышающего значение линейной плотности ионизации для быстрых частиц данного типа. Средний расход энергии на образование пары ионов в воздухе оказался равным 33÷35 *эв* для всех ионизирующих частиц при любых кинетических энергиях их движения.

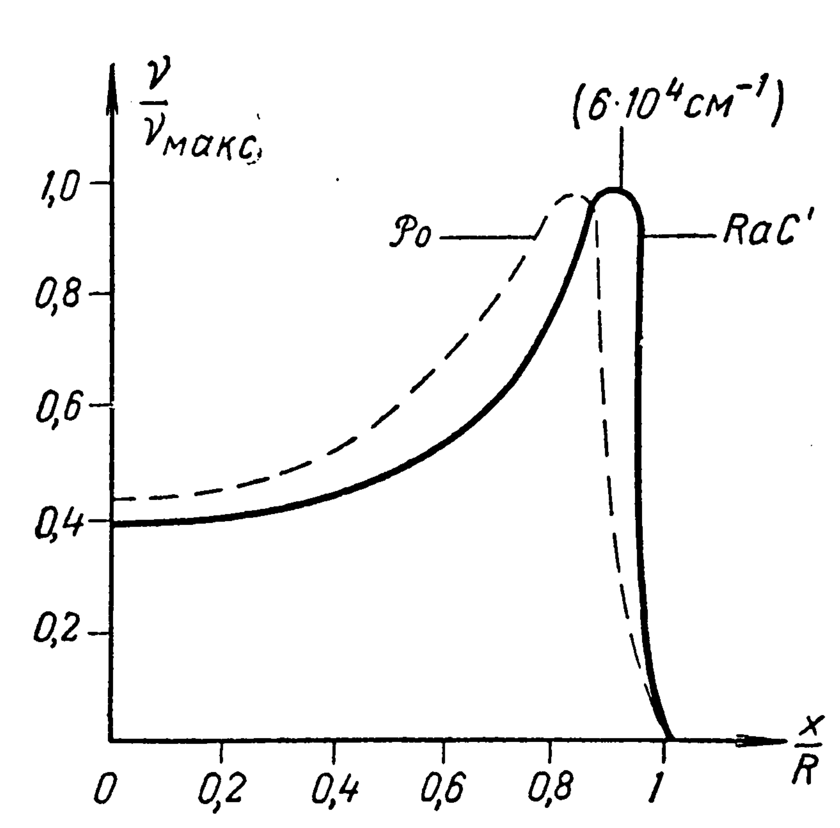


Рис. 65-2. Зависимость линейной плотности ионизации от относительной глубины проникновения частицы (кривые Брэгга)

Вторичные эффекты, наблюдающиеся в среде (химические реакции, изменение механических и физических свойств, фазовые превращения), зависят от энергии частицы, характера производимой ими ионизации (объемная или колонная), плотности ионизации и тех ядерных взаимодействий, которыми сопровождается проникновение частиц. Протоны поглощаются средой так же, как и α-частицы, однако при равной скорости их движения линейная плотность ионизации, создаваемой протонами, составляет $^1/_4$ от ионизации, создаваемой α-частицей.

Линейный пробег протонов с энергией E *Мэв* в воздухе составляет

$$R_p = 1{,}93 \cdot E^{1{,}8}, \qquad (65{,}3)$$

поэтому отношение линейных пробегов протонов и α-частиц, согласно (65,2) и (65,3), будет равно

$$\frac{R_p}{R_\alpha} = \frac{1{,}93}{0{,}32}\sqrt[3]{E} \approx 6\sqrt[3]{E}. \qquad (65{,}4)$$

При $E = 10$ *Мэв* $R_p = 125$ *см*. Непрерывные энергетические β-спектры распада ядер имеют границу со стороны наибольшего значения энергий β-частиц, равную E_m. Предельные значения E_m для β-спектров естественных и искусственных радиоэлементов соста-

вляют от 0,015 *Мэв* для H^3 ($T = 11$ лет) до 12 *Мэв* для $_3Li^8$ ($T = 0{,}88$ *сек*). Так как при $\varepsilon = \frac{E}{E_m}$ $dI = \varepsilon dN$, то функция распределения интенсивности по β-спектру, согласно (63,7), для всех β-активных излучателей приближенно имеет вид

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{I}\frac{dI}{d\varepsilon} = C_1[\varepsilon(1-\varepsilon)]^{\frac{3}{2}} \tag{65,5}$$

при максимуме для $\varepsilon = 0{,}5$.

Поглощение смешанного β-излучения в веществе приблизительно подчиняется экспоненциальному закону (рис. 65-3) как по числу частиц (см. 63,7), так и по интенсивности:

$$N_x = N_0 e^{-6{,}2\frac{x}{R}}; \quad I_x = I_0 e^{-7\frac{x}{R}}. \tag{65,6}$$

Здесь R — максимальная глубина проникновения β-частиц в вещество (рис. 65-4) (экстраполированный пробег — линейный или массовый в зависимости от единиц измерения x). Для выяснения значений R (в $г \cdot см^{-2}$) можно воспользоваться эмпирическим графиком (рис. 65-5) или для $E_m > 0{,}8$ *Мэв* приближенным соотношением:

$$(R_\beta)_m \approx 0{,}54E_m - 0{,}13\left(\frac{г}{см^2}\right). \tag{65,7}$$

Имея малую массу, β-частицы при взаимодействиях с элементами вещества претерпевают рассеяние, вследствие чего вызываемая ими ионизация приобретает характер объемного процесса. Так же, как и в случае α-частиц и протонов, плотность ионизации в конце пути β-частицы увеличивается. В табл. 27 и на рис. 65-6, *а* для сравнения приведены значения линейных пробегов R (в *см*) и линейных плотностей ионизации ν (в $см^{-1}$) α-частиц, дейтронов d, протонов p и электронов β в воздухе нормальной плотности.

Таблица 27

E в *Мэв*	R в *см* для частиц				ν в $см^{-1}$ для частиц			
	α	d	p	β	α	d	p	β
0,05	—	—	—	20	—	—	—	280
0,10	0,10	—	—	40	$5 \cdot 10^4$	—	—	170
0,50	0,38	1,0	1,5	205	$6{,}8 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^4$	10^4	60
1,00	0,58	2,5	3,5	410	$6{,}0 \cdot 10^2$	$1{,}2 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$	50
2,00	1,4	5,0	8,0	1 000	$4{,}6 \cdot 10^4$	$8{,}5 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	48
5,00	3,8	22	37	2 000	$3 \cdot 10^4$	$2{,}3 \cdot 10^3$	$1{,}8 \cdot 10^3$	46
10,00	10,7	65	130	4 100	$2 \cdot 10^4$	$1{,}3 \cdot 10^3$	$0{,}9 \cdot 10^3$	47
50,00	150 [1]	—	2200	17 000	—	—	680	48
100,00	—	—	7100	41 000	—	—	300	59
1000,00	—	—	3000,00	310 000	—	—	60	78

[1]) Рассчитано по формуле (65,2).

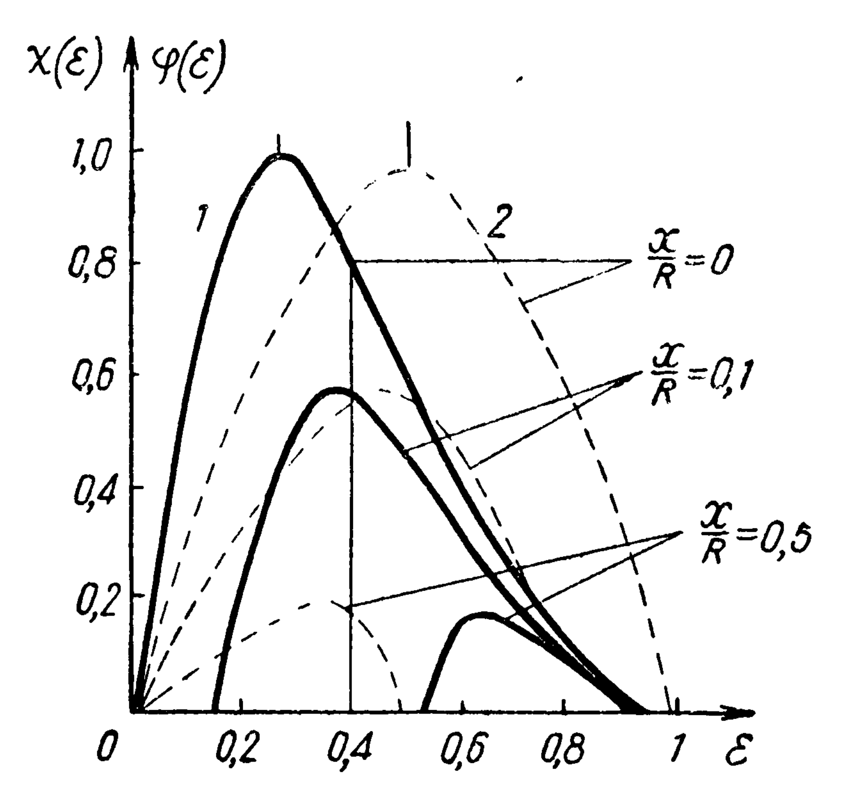


Рис. 65-3. Распределение числа частиц $\chi(\varepsilon)$ по начальным энергиям в β-спектре для разных глубин проникновения $\frac{x}{R}$ (кривая *1*) и распределение интенсивности $\varphi(\varepsilon)$ по энергиям ε после прохождения слоя $\frac{x}{R}$ для разных глубин проникновения $\frac{x}{R}$ (кривая *2*)

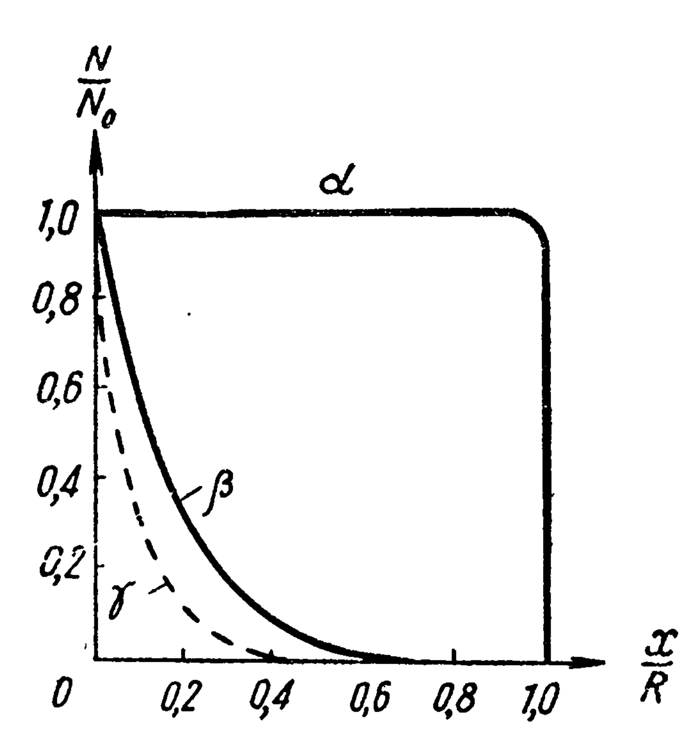


Рис. 65-4. Изменение числа частиц с глубиной проникновения их в вещество для моноэнергетических α-частиц, для сплошного спектра β-частиц и для моноэнергетических γ-квантов

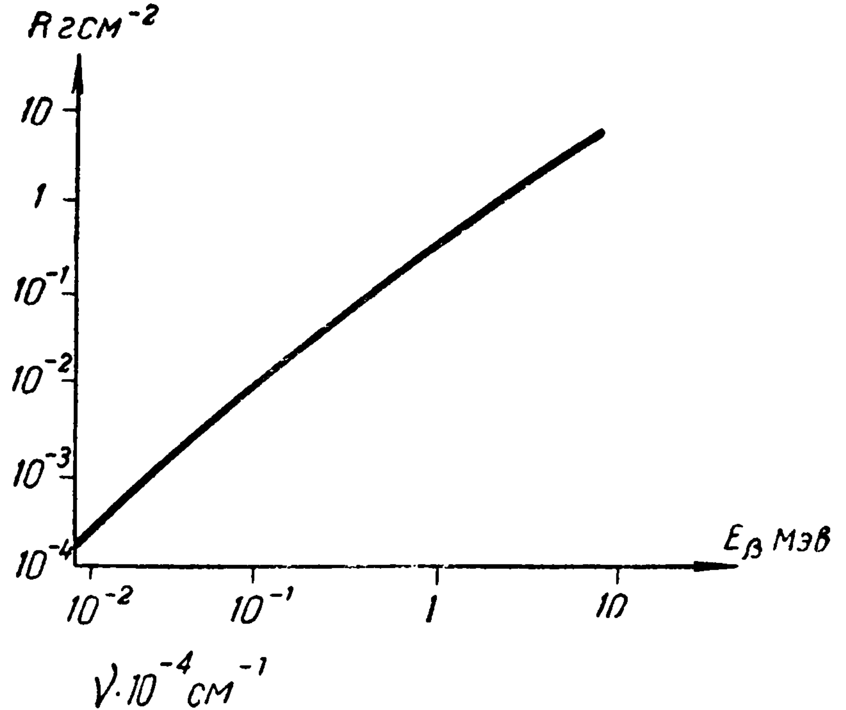


Рис. 65-5. Эмпирический график зависимости массового пробега электрона от его энергии

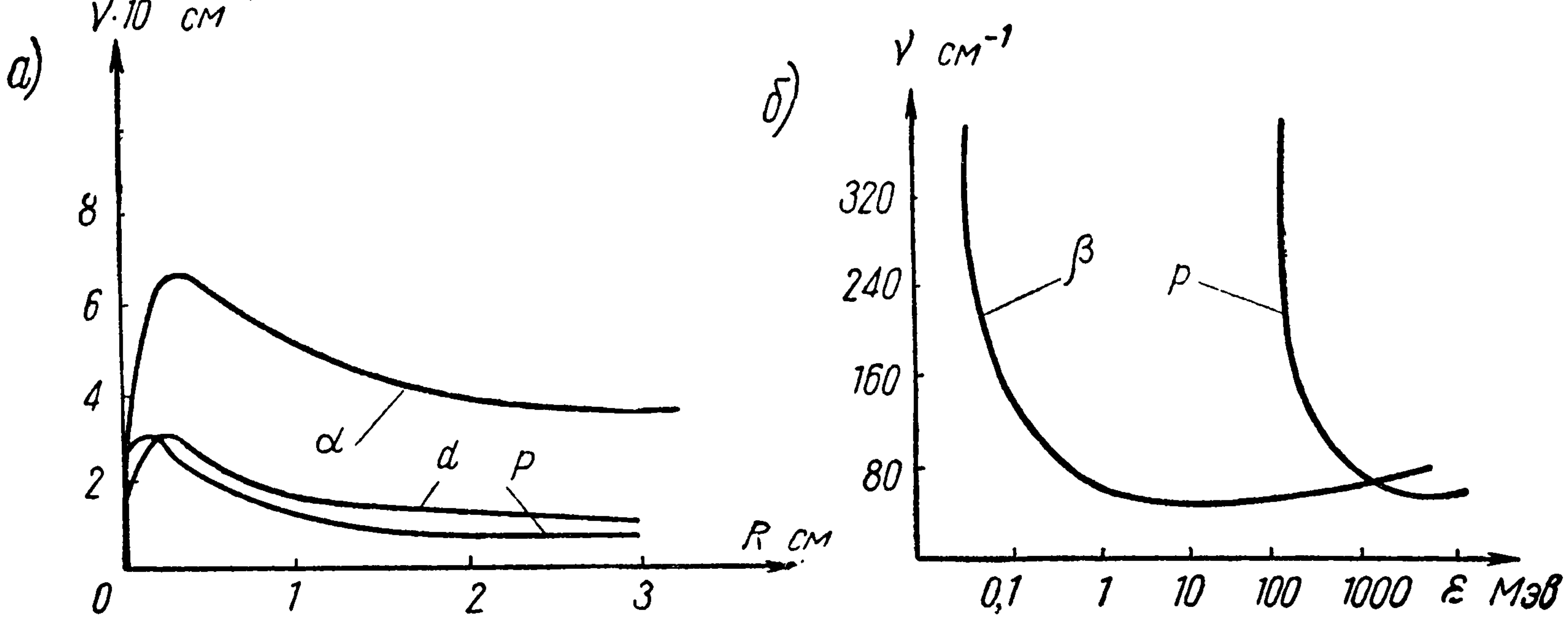


Рис. 65-6. Зависимость линейной плотности ионизации воздуха от пробега тяжелых частиц (*а*) и от энергии электронов β и протонов p (*б*)

По мере возрастания энергии электронов и протонов (заряженных частиц вообще) линейная плотность ионизации вначале убывает (рис. 65-6, *б*), но после достижения некоторого минимума (для β-частиц примерно 45 пар ионов на 1 *см*) вновь постепенно возрастает. Энергии, при которых достигаются минимумы, относятся примерно как массы этих частиц. Таким образом, поскольку заряды упомянутых частиц одинаковы ($\pm e$), минимумы соответствуют одним и тем же скоростям движения частиц. Изменение конфигурации электрического поля движущейся частицы, вызывающее подобный ход изменения линейной плотности ионизации в зависимости от скорости частиц, изображено на рис. 65-7. При малых скоростях $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ электрическое поле движущейся частицы сохраняет радиальную симметрию, а эффективный радиус его действия $r_{эфф}$ за время пролета частицы достаточно велик. Он определяется временем $\tau = \frac{l}{v}$ взаимодействия частицы с электронами оболочек атомов и составляет

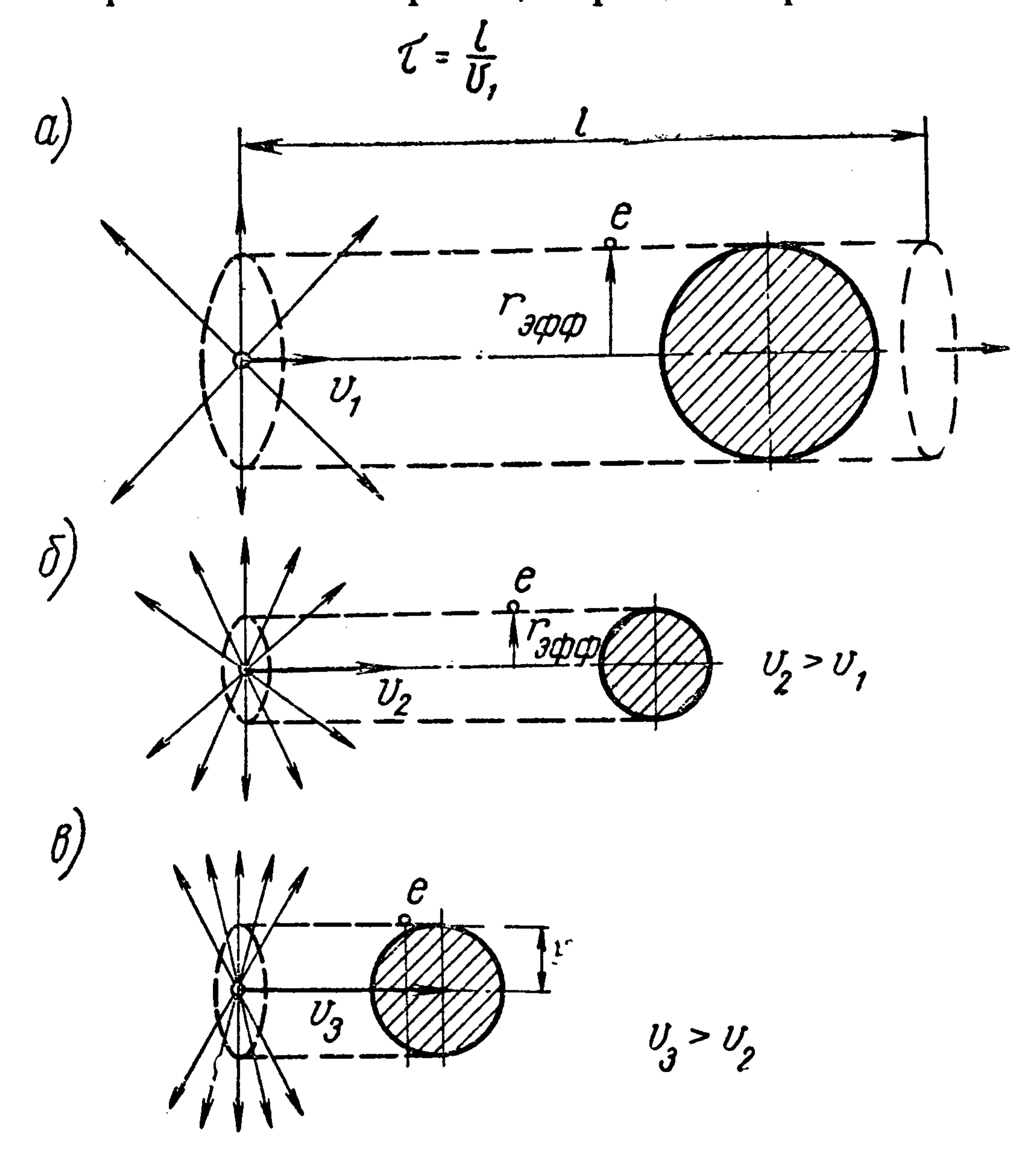


Рис. 65-7. Эффективность взаимодействия поля заряженной движущейся частицы с электроном атомной оболочки:

а) при $v_1/c \ll 1$; *б*) при $v_2/c < 1$; *в*) при $\frac{v_3}{c} \to 1$.

Стрелками показаны распределения полей. Заштрихованы сечения взаимодействия

$$r_{эфф} = \tau \cdot c = l\frac{c}{v}, \tag{65,8}$$

где l — расстояние между атомами среды (рис. 65-7, *а*).

При возрастании скорости частицы v эффективный радиус действия убывает согласно (65,8) (рис. 65-7, *б*), но вместе с тем происходит деформация электрического поля частицы. При релятивистских скоростях частиц поле сосредотачивается преимущественно в плоскости, перпендикулярной скорости движения частицы и, следовательно, усиливается в отношении производимой ионизации. Эффективный радиус действия, а значит и линейная плотность ионизации вследствие этого несколько возрастают (рис. 65-7, *в*).

Лекция 66

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРОНОВ С ВЕЩЕСТВОМ

Нейтрон в структурном отношении нельзя рассматривать как элементарную частицу.

Период полураспада нейтрона составляет 17 *мин*, причем распад происходит по схеме

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Наличие отрицательного магнитного момента у нейтрона показывает, что эта частица может рассматриваться как совокупность равного числа положительных и отрицательных зарядов. Нейтрон спонтанно диссоциирует в сильно связанную систему, состоящую из протона и отрицательного π-мезона: $n \rightleftarrows p + \pi^-$. В течение части времени ($^3/_4\tau$) система существует как нейтрон и считается электрически вполне нейтральной, однако в диссоциированном состоянии (протон $+\ \pi$-мезон) эта система в оставшуюся часть времени (0,25 τ) приобретает специфическую зарядовую структуру в виде положительного концентрированного заряда в окружении ($r \approx \approx 10^{-13}$ *см*) равного ему отрицательного заряда. Следствием такой структуры является некоторое (слабое) электромагнитное взаимодействие нейтрона с электронами среды. Эффективный заряд нейтрона оказывается при этом порядка $10^{-12} \div 10^{-18}$ заряда электрона.

Характер взаимодействия нейтронов с ядрами определяется длиной фазовой волны нейтрона, равной

$$\lambda_n = \frac{h}{\sqrt{2m_n \cdot E_n}},$$

или

$$\lambda'_n = \frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E_n}}, \qquad (66,1)$$

где E_n — кинетическая энергия нейтрона. При $\lambda'_n = R_я$ ($2 \cdot 10^{-13}$ *см* $\div$ $\div\ 2 \cdot 10^{-12}$ *см*) волновые свойства нейтрона имеют первостепенное значение. Нейтронам низких энергий (медленные нейтроны) соответствуют длины фазовых волн $\lambda'_n \gg R_я$. Они сравнимы с расстояниями между узлами в кристаллических решетках (порядка 10^{-8} *см*) твердых тел. Проникновению таких нейтронов в вещество с упорядоченной структурой сопутствуют интерференционные эффекты, учитываемые формулой Вульфа—Брэгга.

Нейтроны промежуточных энергий с $\lambda'_n \approx R_я$ диффузно рассеиваются ядрами атомов.

При очень высоких значениях энергий нейтронов им соответствуют длины фазовых волн, сравнимые с расстояниями (порядка $10^{-13} \div 10^{-14}$ *см*) между нуклонами в ядрах. Рассеяние таких нейтронов происходит на отдельных нуклонах в ядрах и вновь может сопровождаться интерференционными эффектами.

Специфической классификационной величиной для нейтронов, согласно (66,1), является их кинетическая энергия E_n. Полагая $E_n = kT$, можно рассматривать температурное выражение для кинетической энергии отдельного нейтрона в виде

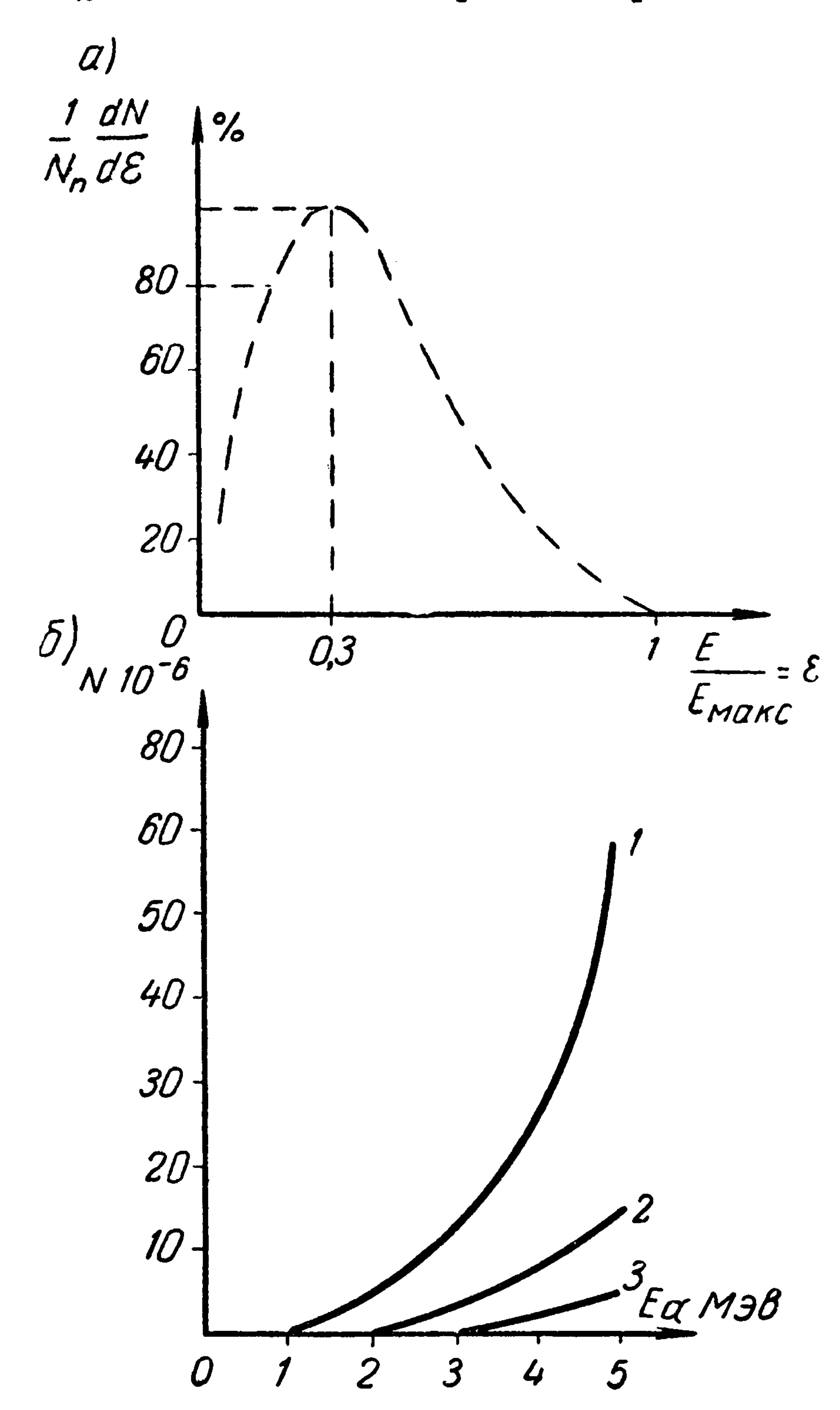


Рис. 66-1. *а*) Сглаженная кривая распределения числа нейтронов по их энергиям для источника Po-α-Be в случае толстой мишени Be ($E_{\gamma-Po} = 5{,}3$ *Мэв*; $E_{макс} = 10{,}8$ *Мэв*); *б*) зависимость выхода числа нейтронов на 10^6 α-частиц Po от энергии нейтронов: *1* — для бериллия, *2* — для бора; *3* — для фтора

$$T\,(^\circ K) = 1{,}16 \cdot 10^4 E_n \;(\textit{эв}). \qquad (66{,}2)$$

При $E \ll m_n c^2 = 939{,}5$ *Мэв* и при скорости нейтрона $v < c$ будем иметь

$$v\,(\textit{см} \cdot \textit{сек}^{-1}) = 1{,}38 \cdot 10^6 E^{\frac{1}{2}} \;(\textit{эв}). \qquad (66{,}3)$$

В релятивистском случае

$$v = \frac{c}{1+\varepsilon}\sqrt{\varepsilon\,(2+\varepsilon)}, \qquad (66{,}4)$$

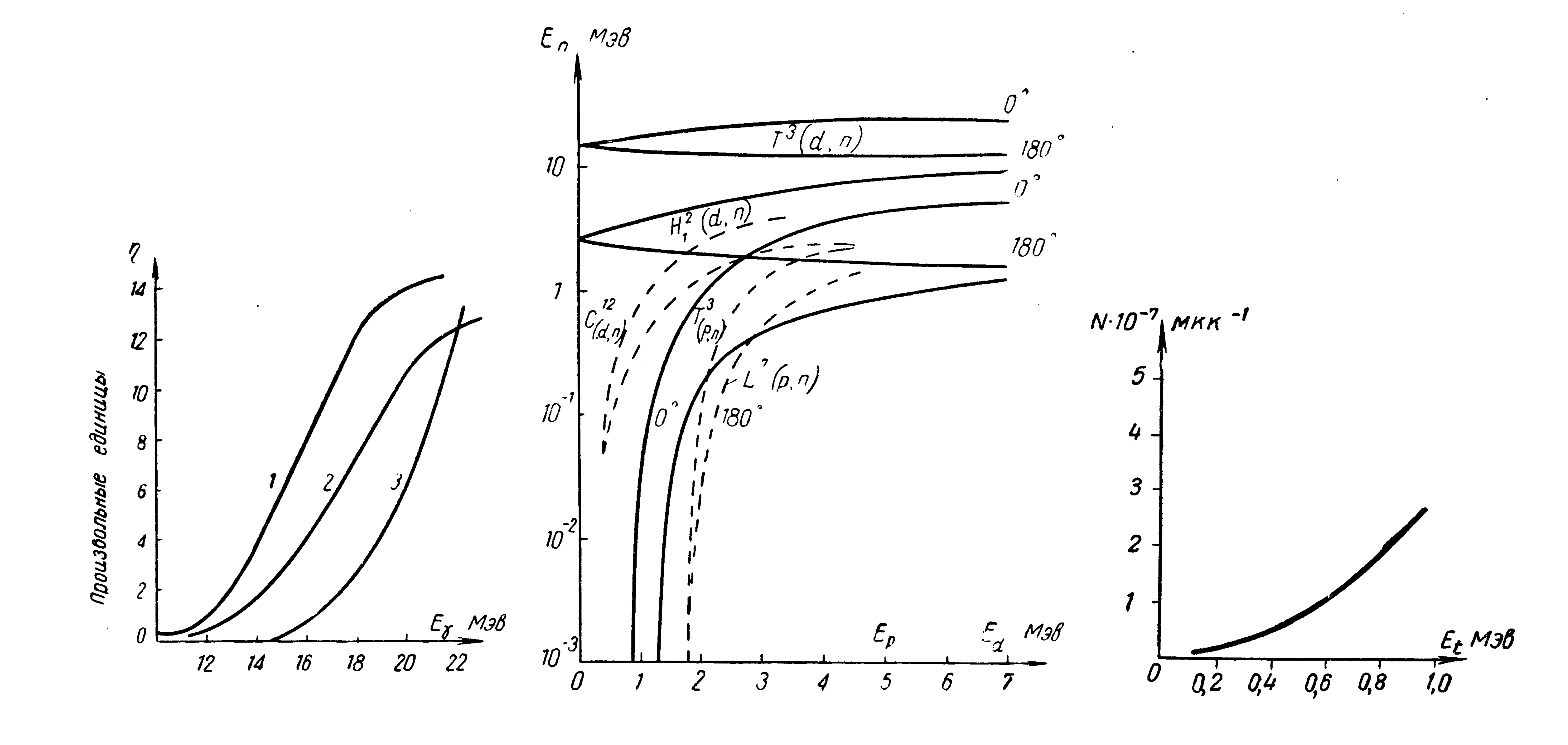
где $\varepsilon = \frac{E}{m_n c^2}$. Длины фазовых волн нейтронов (в *см*) согласно (66,1), при E в *эв* составят

$$\lambda_n = 2\pi\bar{\lambda} = 2{,}86 \cdot 10^{-9} E^{-\frac{1}{2}} \;\textit{см}. \qquad (66{,}5)$$

В табл. 28 содержатся общие характеристические сведения о нейтронах.

Медленные нейтроны образуются из промежуточных или быстрых в результате передачи ими энергии ядрам вещества, сквозь которое они проникают. Нейтроны промежуточных энергий испускаются радиоактивными источниками согласно (α, *n*)- и (γ, *n*)-реакциям.

Пороговые значения энергии для испускания нейтронов легкими ядрами меньше 4 *Мэв*, например для дейтрона $E_D = 2{,}2$ *Мэв* и бериллия $E_{Be} = 1{,}62$ *Мэв*. Энергия α-частиц, испускаемых радием, как и полонием (совместно с продуктами распада), в среднем составляет $E_\alpha \approx 5$ *Мэв*, т. е. превышает значение пороговых энергий реакции (α, *n*) для легких ядер. Эта реакция является экзоэнергетической для Be^9, B^{10}, B^{11} и F^{19}. Выходы нейтронов различных источников приведены в табл. 29, 30 и на рис. 66-1,*б*, 66-2, 66-4.



Произвольные единицы
η
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
12
14
16
18
20
22
Eγ Мэв
En Мэв
10
1
10^-1
10^-2
10^-3
0°
180°
0°
180°
T^3 (d, n)
H^2_1 (d, n)
C^12 (d, n)
T^3 (p, n)
L^7 (p, n)
0°
180°
Ep
Ed Мэв
0
1
2
3
4
5
6
7
N·10^-7 мкк^-1
5
4
3
2
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
Et Мэв

Энергия нейтрона в *эв*	Наименование нейтронов	T °К	v в *см* · *сек*$^{-1}$	λ_n в *см*	Характеристика
$0 < E < 10^3$	Медленные				Диффузное проникновение, селекторная фильтрация, интерференция при рассеянии на кристаллах, резонансный захват
10^{-3}	Дотепловые	11,6	$4{,}37 \cdot 10^4$	$9{,}04 \cdot 10^{-8}$	Большое проникновение; максвелловское распределение по скоростям, реакции деления тяжелых ядер
$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	Тепловые	20,0	$2{,}19 \cdot 10^5$	$1{,}81 \cdot 10^{-8}$	
1,0	Резонансные	$1{,}16 \cdot 10^4$	$1{,}38 \cdot 10^6$	$2{,}86 \cdot 10^{-9}$	Резонансное поглощение тяжелыми ядрами
10^2	Медленные	$1{,}16 \cdot 10^6$	$1{,}38 \cdot 10^7$	$2{,}86 \cdot 10^{-10}$	
1 *кэв* $< E <$ 0,5 *Мэв*	Промежуточные				Распространение от радиоактивных источников нейтронов
10^4	Промежуточные	$1{,}16 \cdot 10^8$	$1{,}38 \cdot 10^8$	$2{,}86 \cdot 10^{-11}$	Упругое рассеяние; замедление в среде

Энергия нейтрона в *эв*	Наименование нейтронов	T °K	v в *см* · *сек*$^{-1}$	λ_n в *см*	Характеристика
0,5 *Мэв* $< E <$ 10 *Бэв*	Быстрые				Ядерные реакции, вылет многих частиц, скалывание, пролет сквозь ядра; вылет π-мезонов
10^6	Быстрые	$1{,}16 \cdot 10^{10}$	$1{,}38 \cdot 10^9$	$2{,}86 \cdot 10^{-12}$	Неупругое рассеяние, многочисленные ядерные реакции с вылетом одной частицы
10^8	Очень быстрые (релятивистские)	$1{,}16 \cdot 10^{12}$	$1{,}28 \cdot 10^{10}$	$2{,}79 \cdot 10^{-13}$	Вылет большого числа частиц, трековые звездообразования
10^{10}	Сверхбыстрые	$1{,}16 \cdot 10^{14}$	$2{,}99 \cdot 10^{10}$	$1{,}14 \cdot 10^{-14}$	Слабое взаимодействие, реакции срыва, ядерные взрывы, выделение π-мезонов ($E >$ 275 *Мэв*)

Таблица 29

Радиоактивные источники

Источник	Период полураспада T	Реакция	Выход n в $кюри^{-1}$ $сек^{-1}$	Энергия E_n нейтронов
		(α, n)-источники		
$Ra^{226}Be$	1600 лет	$Be^9(\alpha, n)C^{12}+\gamma$	$1{,}7 \cdot 10^7$	Спектр до 13 *Мэв* с широким максимумом около 4 *Мэв*
$Ra^{222}Be$	3,8 дня	$Be^9(\alpha, n)C^{12}+\gamma$	$1{,}5 \cdot 10^7$	То же
RaBe	1600 лет	$B^{11}(\alpha, n)N^{14}$	$6{,}8 \cdot 10^6$	Спектр до 6 *Мэв* с максимумом при 3 *Мэв*
$Po^{210}Be$	138 дней	$Be^9(\alpha, n)C^{12}$	$2{,}5 \cdot 10^6$	Спектр от 0,5 до 11 *Мэв* с максимумом $3 \div 5$ *Мэв* (рис. 66-1, *а*)
$RaBeF_4$	1600 лет	$F^{19}(\alpha, n)Na^{22}$	$2{,}5 \cdot 10^6$ (стабильный)	Спектр до 13 *Мэв*

Из табл. 29,30 вытекает, что существует большое число способов получения промежуточных и быстрых нейтронов. Для получения сверхбыстрых нейтронов используются реакции срыва с дейтронов больших энергий на ядрах бериллия (рис. 66-5).

Нейтроны срыва вылетают преимущественно вперед по движению разогнанного дейтрона (до 200 *Мэв*). Большие выходы нейтро-

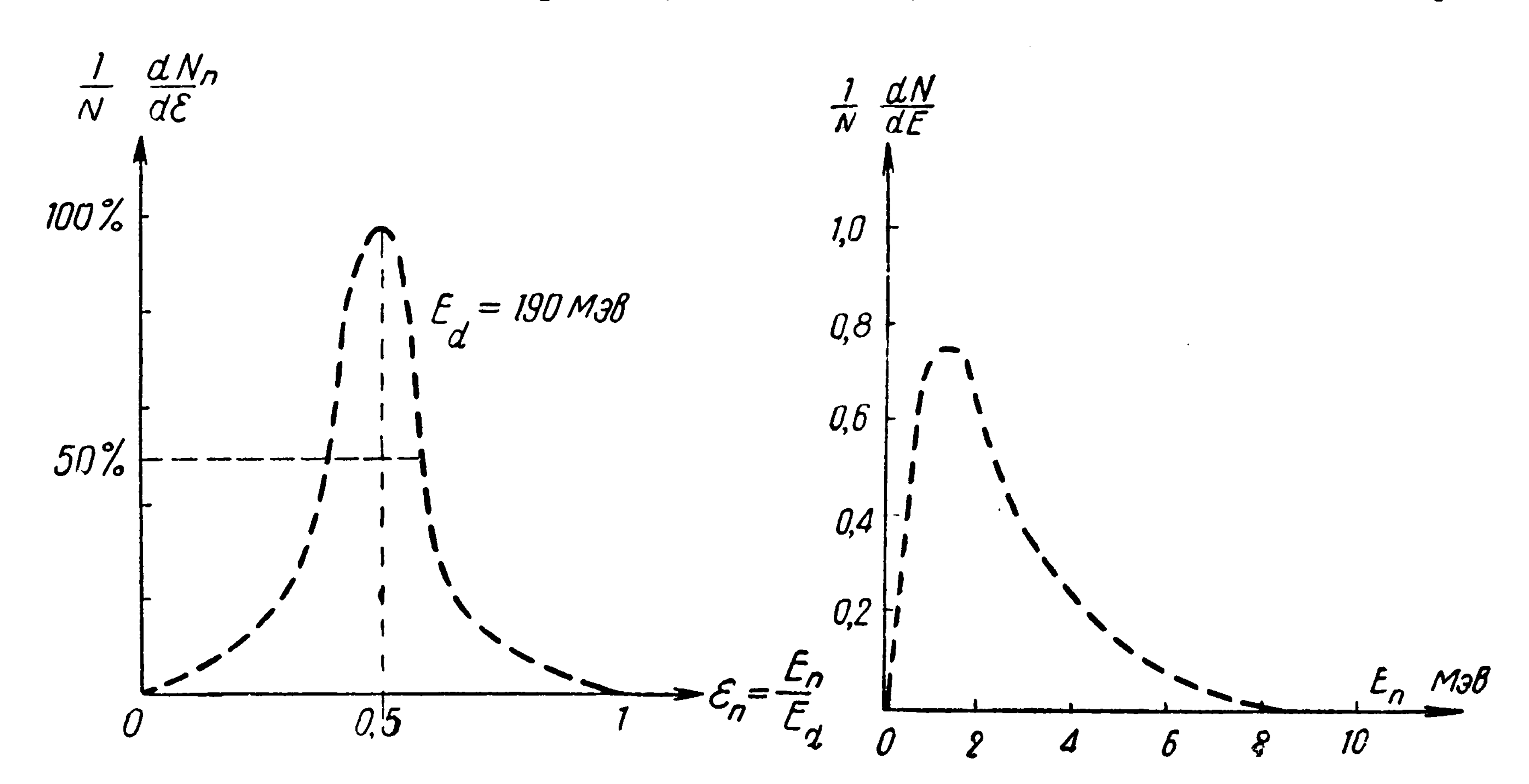


Рис. 66-5. Распределение числа нейтронов по энергиям при реакции срыва с дейтронов (энергией 190 *Мэв*) на бериллиевой мишени

Рис. 66-6. Приблизительное распределение нейтронов (произвольные единицы) по энергетическому спектру при реакции деления U^{235} на тепловых нейтронах

нов (рис. 66-6) с плотностями потоков $\varphi = 10^{14}$ *см*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$ характерны для активных зон реакторов, а сверхвысокие энергии нейтронов $E_n = 10^{10}$ *эв* — для нейтронной составляющей жесткой компоненты космического излучения.

Таблица 30

Искусственные источники нейтронов

Энергия E_t разгоняемых частиц в *Мэв*	Реакция	Выход нейтронов в *мкк*$^{-1}$	Энергия $E_n^{1)}$ нейтронов в *Мэв*
	(γ, n)-источники		
γ-кванты бетатронов до 200 *Мэв*	$Ag^{107}(\gamma, n)Ag^{106}$ $Ag^{109}(\gamma, n)Ag^{108}$ $Cu^{63}(\gamma, n)Cu^{62}$ $Al^{27}(\gamma, n)Al^{26}$	$\sim 10^{10}$ (рис. 66-2)	Сплошной энергетический спектр с максимумом, зависящим от E_t
	(p, n) - источники моноэнергетических нейтронов		Промежуточные энергии до 0,5 *Мэв*
3,34 1,88 0,66 1,25 1,02	$H^2(p, n)2H^1$ $Li^7(p, n)Be^7$ $C^{14}(p, n)N^{14}$ $K^{41}(p, n)Ca^{41}$ $Mn^{55}(p, n)Fe^{55}$ (эндотермические)	около $4{,}5 \cdot 10^6$ (рис. 66-3)	0,37 0,03 0,003 0,0007 0,0003
	(d, n)-источники быстрых нейтронов		до 20 *Мэв*
1,0 1 ÷ 3 1,0 0,8	$H^2(d, n)He^3$ $T^3(d, n)He^4$ $Li^7(d, n)Be^8$ $Be^9(d, n)B^{10}$ (экзотермические)	10^6 (рис. 66-4) 10^8 $1{,}7 \cdot 10^7$ 10^8	2,45 14,0 спектр до 13 спектр до 3,4

¹) $E_n = \frac{E_t}{(A+1)^2} \cdot 10^{-3}$ при E_t в *Мэв*.

Под действием нейтронов в веществе возникают разнообразные реакции, многие из которых приводят к образованию радиоактивных ядер (искусственная, или наведенная радиоактивность). Наличие промежуточных нейтронов в потоке частиц может быть установлено, например, по наведенной радиоактивности кадмия. Предельная наведенная активность насыщения пропорциональна при этом величине поглощенной мощности нейтронов в потоке плотностью $\varphi = n \cdot v$, который проникает в поглотитель. Практически возможности наблюдения наведенной радиоактивности ограничиваются временами жизни радиоактивных ядер от $\tau = \frac{1}{\lambda} = 10^{-1}$ *сек* до $\tau = 10^4$ лет.

При взаимодействиях нейтронов с ядрами, сопровождающихся испусканием частиц, например при реакциях (n, p), (n, α) и (n, f), ядра-продукты могут быть выделены химическим путем. При изотопных реакциях радиационного захвата (n, γ) энергия отдачи ядра-продукта $E_{\text{отд}} = 536 \cdot 10^{-12} \frac{E_\gamma^2}{A}$ *эв* обычно значительно превышает энергию молекулярной связи (~ 5 *эв*), поэтому возможно химическое отделение радиоактивных ядер. При этом определяется интегральный во времени эффект разделения ядер (нейтронная доза).

Быстрые нейтроны обнаруживаются через ионизацию газов протонами отдачи, возникающими при рассеянии нейтронов на протонах (рис. 66-7), или по пороговым реакциям (n, p) или (n, α). В водородсодержащей среде быстрые нейтроны имеют время существования порядка 10^{-4} *сек*; они становятся тепловыми уже через 10^{-6} *сек*.

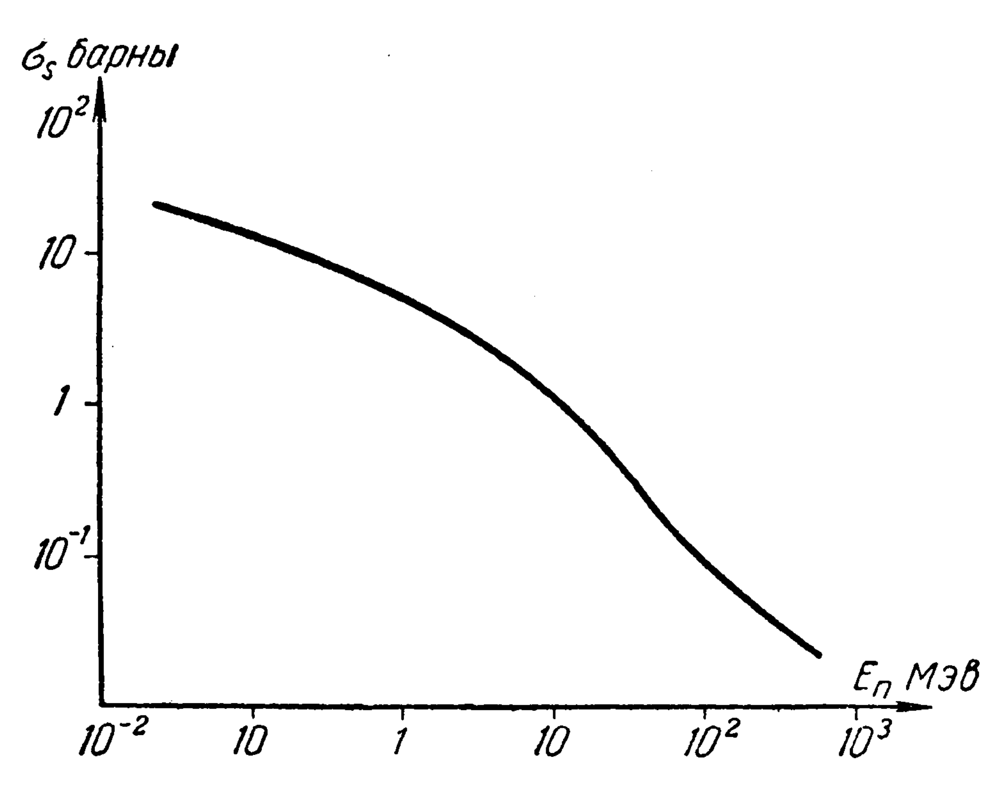


Рис. 66-7. Зависимость сечения рассеяния нейтронов свободными протонами от кинетической энергии нейтронов

Для измерений медленных нейтронов используется ионизация газа, создаваемая теми заряженными частицами, которые вылетают из составных ядер после захвата нейтронов. Большим сечением обладает реакция B^{10} (n, α) Li^7, вследствие чего ионизационные камеры и газовые счетчики заполняют фтористым бором (газ BF_3). С возрастанием энергии нейтрона эффективное сечение реакции изменяется пропорционально $\frac{1}{v}$, так что этот метод мало пригоден для промежуточных нейтронов. В этом случае камеры погружают в водородсодержащий замедлитель нейтронов (парафиновые блоки) или используют для измерений сцинтилляционные счетчики вторичных квантов.

Пробеги протонов с энергией 1 *Мэв* в фотографической эмульсии составляют 15 *мк*, а при 10 *Мэв* — порядка 600 *мк*. Селекция тепловых нейтронов из смешанных пучков осуществляется либо с помощью дисковых механических устройств, которые при угловой скорости 15000 *об/мин* выделяют короткие импульсы моноэнергетических нейтронов, либо путем отражения от кристаллов соответственно формуле Вульфа — Брэгга для фазовой волны нейтрона λ_n. Взаимодействие нейтронов с ядрами атомов в больших массах вещества некогерентно и зависит как от поверхностной плотности

потока нейтронов, так и от эффективного сечения их взаимодействий с ядрами, входящими в состав среды. В результате рассеяния нейтронов (σ_s), а также их поглощения при радиационном захвате (σ_a) и при делении ядер (σ_f) происходит изменение концентрации нейтронов и их скоростей (т. е. изменение потока нейтронов),

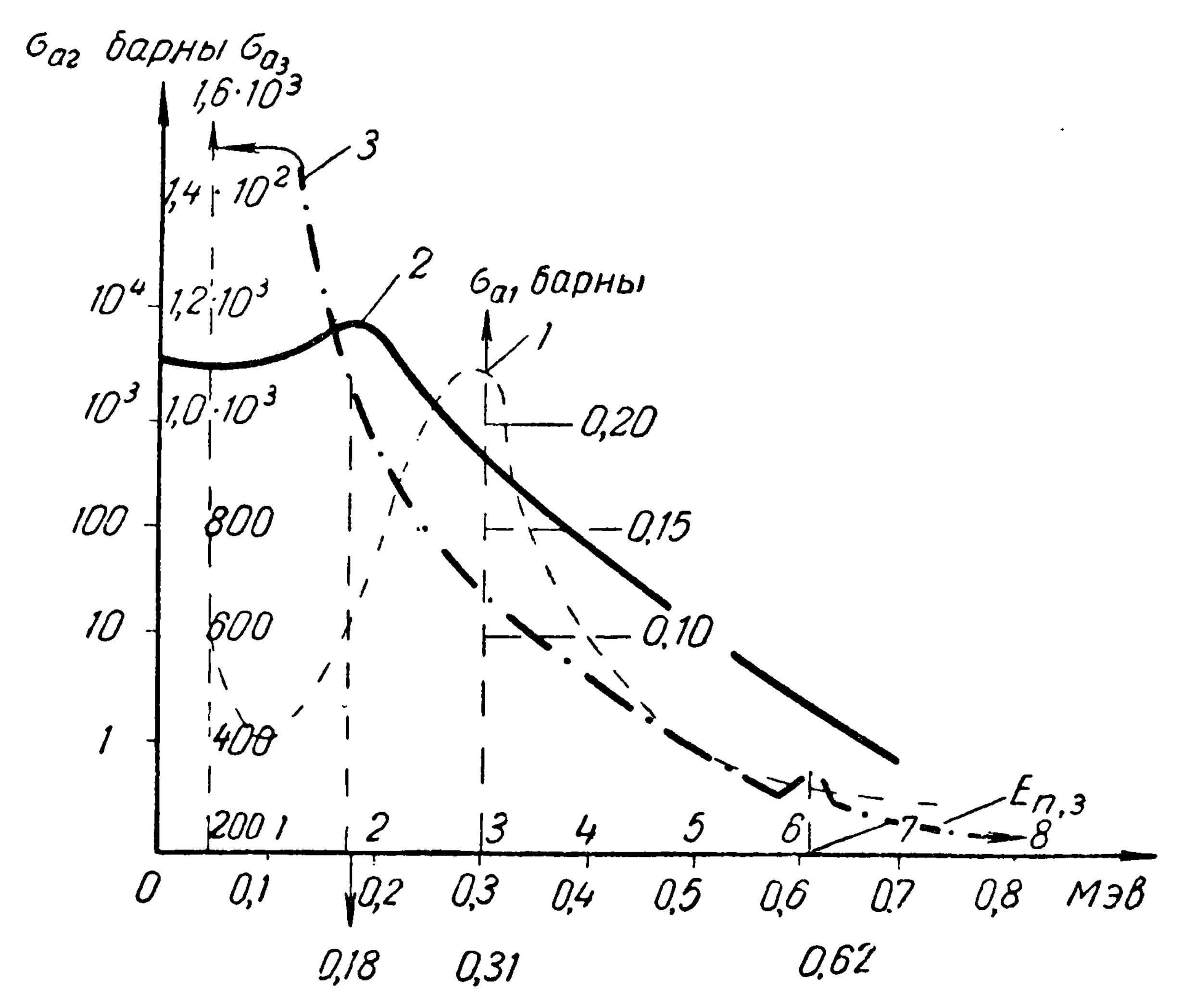


Рис. 66-8. Зависимость эффективного сечения реакций на нейтронах вблизи резонансной энергии:

1 — при реакции Li^6 (*n*, α)T^3 (обычный литий — Li^6 — 7,4%; Li^7 — 92,6%; $E_{r,1}$ = 0,31 *Мэв*). *2* — при реакции Cd^{113} (*n*, γ) Cd^{114}; $E_{r,2}$ = 0,18 *Мэв*; *3* — при реакции B^{11}(*n*, γ) B^{12}; $E_{r,3}$ = 0,62 *Мэв*

а также энергии отдельного нейтрона E_n. Макроскопически это означает, что в среде происходят: диффузия нейтронов, их замедление, а также изменение их числа (захват и размножение). Сечения основных видов взаимодействия тепловых нейтронов с ядрами различных *Z* и *A* приведены в табл. 31 и на рис. 66-7, 66-8.

Таблица 31

	Сечение процесса (в *бн*) на ядрах-мишенях										
	$_1H^1$	$_4Be^8$	$_5B^{10}$	$_6C^{12}$	$_8O^{16}$	$_{26}Fe^{56}$	$_{48}Cd^{113}$	$_{54}Xe^{135}$	$_{92}U^{238}$	U^{235}	U^{239}	Pu^{239}
σ_s	38	7	4	4,8	4,2	11	7	5	8,2	8,2	8,2	—
σ_a	$3 \cdot 10^{-1}$	10^{-2}	750	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-4}	2,4	7000	$3,5 \cdot 10^6$	7,4	650	2,8	1025
σ_f	—	—	—	—	—	—	—	—	3,9	549	—	664

Путем измерений интенсивности нейтронного потока, пропускаемого поглотителем в направленных пучках нейтронов в соответствии с экспоненциальным законом ослабления интенсивности, из выражения

$$\sigma = \frac{1}{n_я x} \ln \frac{I_0}{I} \qquad (66,6)$$

находят полное сечение взаимодействия:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_a + \sigma_f. \qquad (66,7)$$

Большие значения сечения σ_a в табл. 31 соответствуют резонансному захвату нейтрона в том случае, когда энергия нейтрона близка к энергии возбужденного состояния составного ядра.

Диффузия нейтронов означает распространение потока нейтронов в среде без изменения их энергии. В вакууме в случае точечного изотропного источника, испускающего глобальный поток нейтронов N_n (*сек*$^{-1}$), для поверхностной плотности потока φ нейтронов справедлив закон пропорциональности $\frac{1}{r^2}$, т. е.

$$\varphi = n \cdot v = \frac{N_n}{4\pi r^2}. \qquad (66,8)$$

В среде, содержащей вещество, вследствие рассеяния нейтронов на ядрах этот закон изменяется и переходит в зависимость вида

$$\varphi \sim n \sim \frac{1}{r},$$

а при наличии еще и поглощения нейтронов ядрами атомов вещества изменение числа нейтронов, проникающих сквозь единицу поверхности за единицу времени, будет

$$n(r) = \frac{c}{r} e^{-\frac{r}{\bar{\lambda}}}, \qquad (66,9)$$

где $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ (в *см*$^{-1}$) — линейный коэффициент поглощения нейтронов средой. Величина $\bar{\lambda}$ связана прямой пропорциональностью со средним квадратичным расстоянием $(\bar{r}^2)$ проникновения нейтронов в среде с момента их возникновения до момента захвата ядрами вещества, причем можно считать, что $\bar{r}^2 = 6\bar{\lambda}^2$. Длина пробега теплового нейтрона в воздухе равна $\sqrt{\bar{r}^2} \approx 3 \cdot 10^4$ *см*, а в жидкостях и твердых телах(соответственно их плотности) имеет значение нескольких десятков сантиметров (рис. 66-9).

Нейтроны растрачивают свою кинетическую энергию как при упругих, так и неупругих взаимодействиях.

Наиболее вероятным процессом при захвате ядром быстрого нейтрона (за исключением небольшого числа легких и самых тяжелых ядер) является испускание вновь нейтрона (n, n) с энергией,

равной первоначальной, за вычетом той, которая передается ядру отдачи (упругое взаимодействие). Однако, если энергия нейтрона превышает первый уровень энергии возбужденного состояния ядра-акцептора, то конечное ядро-продукт после вылета нейтрона останется в возбужденном состоянии и, следовательно, рассеянный нейтрон будет обладать меньшей кинетической энергией (неупругое рассеяние), а конечное ядро-продукт испускает один или несколько γ-квантов.

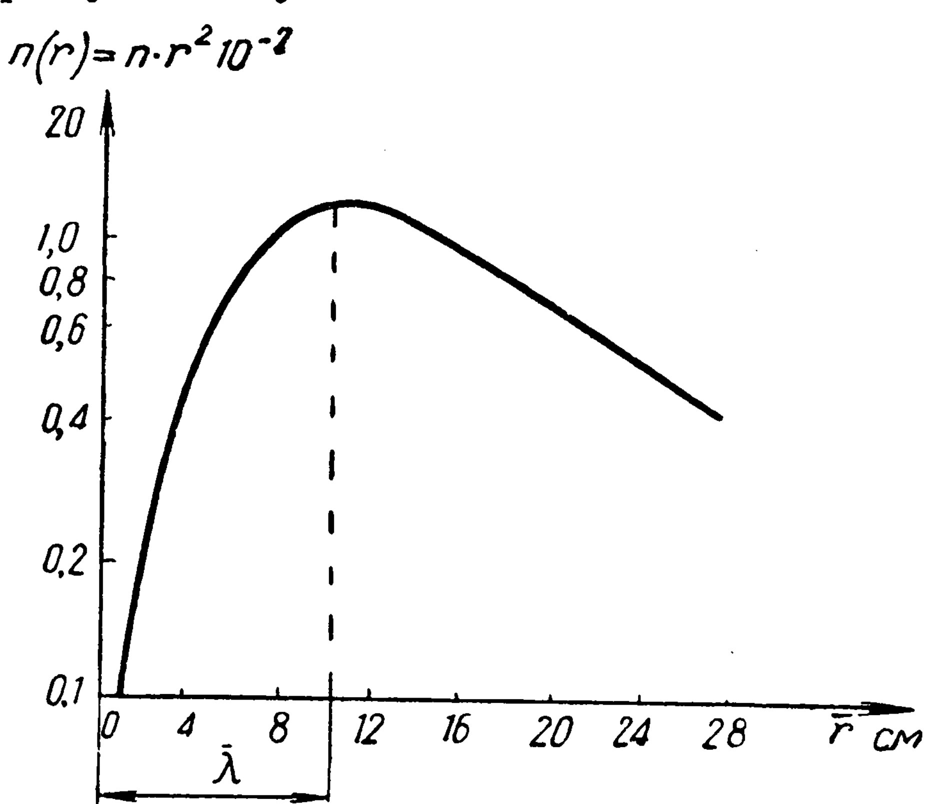


Рис. 66-9. Распределение плотности потока тепловых нейтронов вокруг источника Ra-α-Be в воде ($\bar{\lambda}$ — расстояние от источника нейтронов до мест с максимальной плотностью потока)

При неподвижном ядре с массовым числом A энергия рассеянного под углом θ нейтрона в условиях упругого столкновения составляет

$$E_\theta = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2} \cdot E_0, \qquad (66,10)$$

где E_0 — энергия нейтрона перед столкновением.

При рассеянии вперед $\theta \to 0$ и $E_\theta \to E_0 = E_{\text{макс}}$, в то время как при рассеянии назад $\theta \to \pi$ и $E_\pi = E_{\text{мин}} = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$. Полагая, что при каждом упругом столкновении нейтрона с ядром ему передается в среднем одна и та же часть энергии, можем записать:

$$\bar{\varkappa} = \frac{\Delta\bar{E}}{E_0} = \left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]\xi, \qquad (66,11)$$

где $\xi = 0{,}57$ — коэффициент, учитывающий нецентральность усредненного столкновения. После z столкновений энергия нейтрона будет

$$E_z = E_0 e^{-\varkappa z} \qquad (66,12)$$

или

$$\ln\frac{E_0}{E_z} = \varkappa z = 2{,}3\lg\frac{E_0}{E_z}. \qquad (66,13)$$

Например, для уменьшения энергии нейтрона от ее начального значения $E_0 = 1$ *Мэв* до конечного значения $E_z = {}^1/_{40}$ *эв*, соответствующего энергии теплового нейтрона, при замедлении в воде, т. е. на ядрах водорода ($A = 1$), для которых в среднем $\bar{\varkappa} = 0{,}57$ необходимо и достаточно, чтобы

$$z = \frac{1}{\bar{\varkappa}}\ln\frac{E_0}{E_z} = \frac{1}{0{,}57}\ln 4\cdot 10^7 \approx 30 \text{ столкновений.}$$

Так как в энергетической отдаленности от резонансного захвата (табл. 31) допустимо считать справедливым соотношение $\sigma_a \cdot v = \text{const}$ (см. рис. 66-8) и так как $v \sim \sqrt{E}$, то для неупругих столкновений с захватом быстрых нейтронов имеем

$$\lg \sigma_a + \frac{1}{2} \lg E = b = \text{const}. \qquad (66,14)$$

Таким образом, захват быстрых нейтронов в процессе ослабления плотности потока нейтронов существенной роли не играет.

На рис. 66-9 показано распределение плотности тепловых нейтронов вокруг источника в водородсодержащей среде. В результате упругих и неупругих взаимодействий с веществом плотность узкого направленного потока нейтронов практически изменяется с глубиной по экспоненциальному закону:

$$\varphi = n \cdot v = \varphi_0 \cdot e^{-\frac{\mu}{\rho} \cdot \rho \cdot x}, \qquad (66,15)$$

где $\frac{\mu}{\rho} = \frac{N_0}{A}\sigma$ — массовый коэффициент ослабления плотности потока нейтронов (σ — полное сечение взаимодействий согласно формуле (66,7), N_0 — число Авогадро).

Лекция 67

ДЕЛЕНИЕ И СЛИЯНИЕ ЯДЕР

В противоположность молекулам макроскопической капли жидкости, в которой малые флуктуации массы не имеют значения, в ядрах существенную роль играет общее число нуклонов. Кроме того, специфичность ядерных сил вызывает тенденцию к образованию в ядрах α-частичных структур, выгодных в энергетическом отношении.

Простейший процесс деления тяжелых ядер вытекает из энергетического соотношения (62,3) и выражений (62,5) и (62,6). Ядра, содержащие большое число нуклонов, находящихся в состоянии интенсивного движения и взаимного превращения, не смогут сохранять устойчивую сферическую форму, поскольку с изменением расстояния между нуклонами

$$W_{\text{п.н}} + W_{\text{э}} \neq \text{const}. \qquad (67,1)$$

Не рассматривая квантовые явления внутри ядер, связанные с их структурой, из энергетических соображений можно выяснить значение энергии ΔE, освобождающейся при делении исходного ядра на два ядра-осколка капельного типа с одинаковой плотностью заряда, равной Z/A. Полагая заряд одного осколка $f \cdot Z$, а другого,

очевидно, $(1-f)Z$, и полагая, что в новых ядрах $\frac{Z_1}{Z_2}\approx\frac{A_1}{A_2}$, находим, согласно (62,7) и (62,8), что освобождаемая энергия

$$\Delta E\,(\textit{Мэв}) = 13{,}1\,A^{2/3}\,[1-f^{2/3}-(1-f)^{2/3}] + \\ + 0{,}58\,\frac{Z^2}{A}\,[1-f^{5/3}-(1-f)^{5/3}], \qquad (67{,}2)$$

поскольку объемная и симметричная части энергии (62,7) ядра при делении не меняются, а членом $\varphi\,(A,\ Z)$ за его малостью можно пренебречь.

На рис. 67-1 приведены графики зависимости $\Delta E = \varkappa\,(f)$, вытекающие из выражения (67,2), для различных ядер. Как видно, экзотермическими являются реакции деления тяжелых ядер и слияния легких (см. рис. 64-2).

Изменение потенциальной энергии делящейся системы исходного ядра, согласно формулам (67,1), (62,5) и (62,6), зависит от его деформации (расстояния между образующимися ядрами-осколками) (рис. 67-2). В случае *1* деление невозможно, так как реакция эндотермична. В случае *2* исходное ядро устойчиво, но его деление возможно, если конечная деформация, соответствующая энергии возбуждения, превысит высоту деформационного потенциального барьера. Согласно квантовой механике, имеется некоторая вероятность, что деление в случае *2* произойдет и при энергии возбуждения, несколько меньшей высоты потенциального барьера, вследствие так называемого тоннельного эффекта. Это событие будет чаще в случае *3*, так как при этом уменьшается высота деформационного потенциального барьера. В случае *4* равновесие исходного ядра оказывается неустойчивым, и любая конечная деформация приведет к делению. Если в исходном ядре $\frac{Z}{A}<\frac{1}{2}$ и поверхностная энергия $W_{\text{п.н}}$ значительно превышает энергию кулоновского отталкивания $W_{\text{э}}$, то ядро-капля сохраняет сферическую форму при любых деформациях вплоть до деформации, приводящей к делению на два сферических ядра (случай *б*, рис. 67-3).

Порог деления при этом определяется значением $\frac{Z^2}{A}$. В предельном случае, соответствующем $\frac{Z^2}{A}>45$, капельное ядро настолько насыщено зарядом, что порог реакции деления равен нулю (см. рис. 67-2).

Продуктами деления тяжелых ядер в основном являются два ядра-осколка (см. рис. 64-3) и 2—3 нейтрона деления. Примерно в одном из пятисот случаев деления составное ядро испускает третий осколок в виде α-частицы с энергией от нескольких мегаэлектронвольт до 25 *Мэв*. Распад ядер-осколков приводит к испусканию ими электронов и γ-квантов.

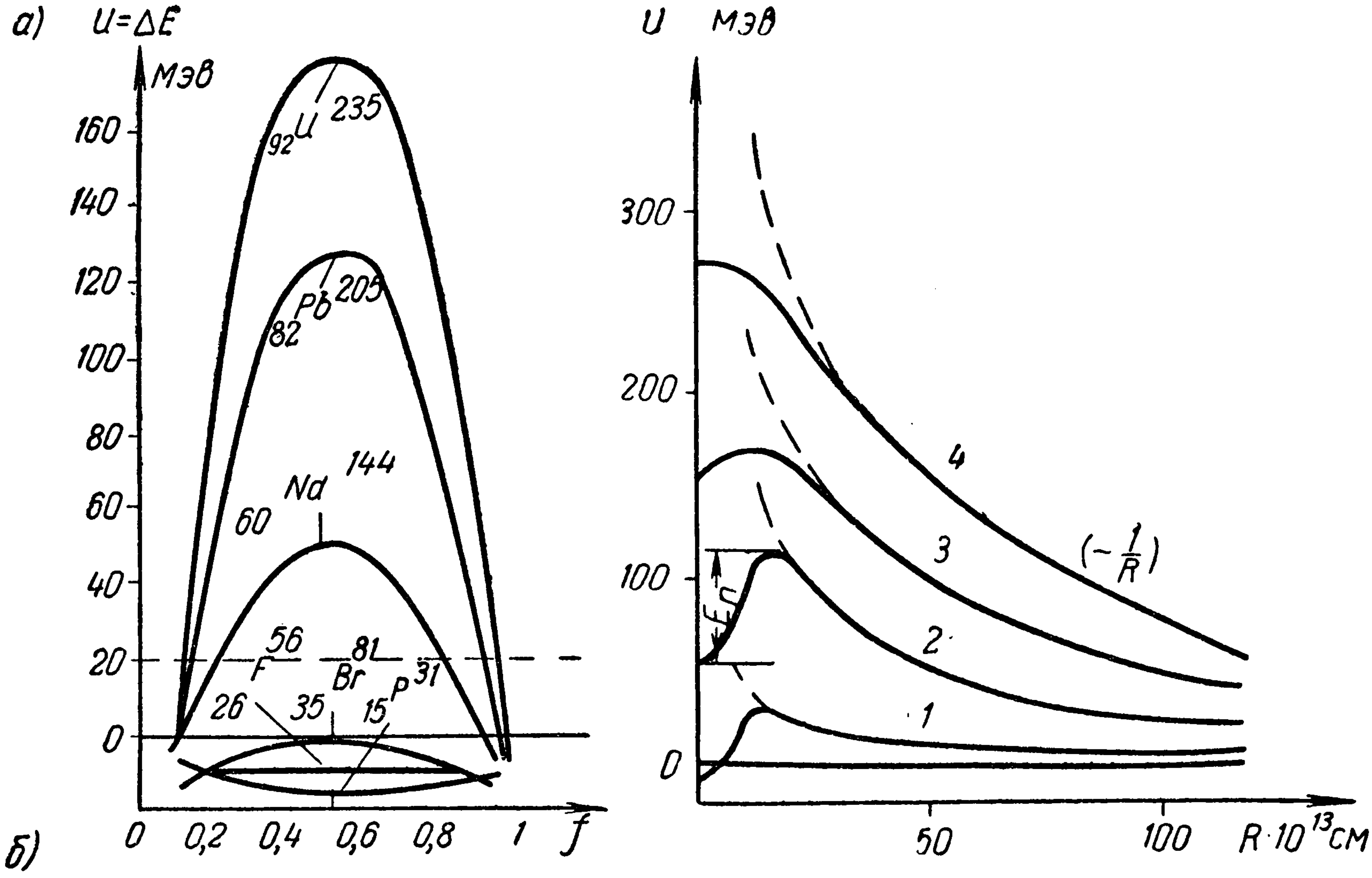


Рис. 67-2. Зависимость потенциальной энергии исходного ядра от деформации (R — расстояние между центрами образующихся ядер деления), $E_п$ — энергетическая высота деформационного потенциального барьера): 1 — для Fe^{56}; 2 — для Nd^{114}; 3 — для U^{238}; 4 — для $_{114}X^{314}$

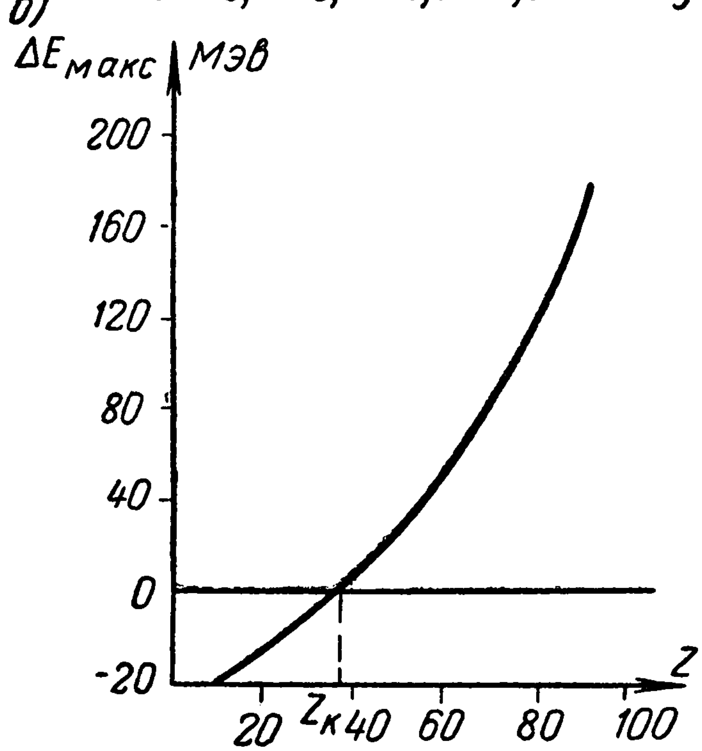


Рис. 67-1. Энергия, освобождаемая при делении ядер на два осколка с постоянными значениями Z/A: а) в зависимости от $f = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1}{Z}$. Для тяжелых ядер реакция деления экзотермическая; б) в зависимости от Z. При значениях $Z < Z_k$ увеличение устойчивости соответствует не делению, а слиянию ядер (см. рис. 64-2)

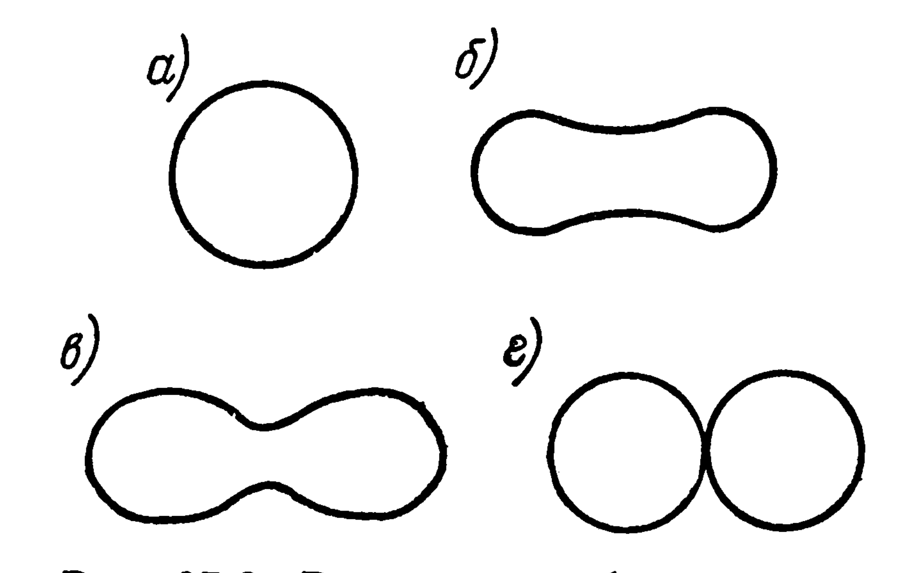


Рис. 67-3. Равновесные формы ядерной капли:
а) исходная сферическая форма; б) возбужденное ядро; в) момент критической деформации; г) конечное состояние

По мере увеличения энергии возбуждающих частиц свыше порога деления наблюдается постепенное приближение к симметричному распределению ядер-осколков (см. рис. 64-3) относительно $A_0 = {}^1/_2 A$. В технически важном случае деления ядер изотопа U^{235} на медленных (тепловых) нейтронах по схеме:

$$_0n^1 + {}_{92}U^{235} \to {}_{92}U^{236} \to F^{A_1} + F^{A_2} + (2 \div 3)_0 n^1 (+200 \ \textit{Мэв})$$

примерно получается, что $\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{3}{2}$.

Выделяемая при таком делении энергия 200 *Мэв* состоит из кинетической энергии ядер осколков (82%), кинетической энергии нейтронов деления ($\sim$3%), энергии электронов и нейтрино β-распада ядер-осколков (10%) и энергии γ-квантов ($\sim$5%).

В природном уране в основном содержится 99,3% изотопа U^{238}, 0,7% изотопа U^{235} и ничтожное количество U^{234} (0,006%). После захвата нейтрона ядрами этих изотопов образуются составные ядра U^{239} и U^{236}, первое из которых имеет классический порог реакции деления, равный 7,1 *Мэв*, а второй — 6,2 *Мэв*. Это значит, что захват теплового нейтрона вызовет деление ядер U^{235}, поскольку $c^2 (M_{235} + n - M_{236}) \approx 6{,}8$ *Мэв* $> 6{,}2$ *Мэв*, в то время как деление ядер U^{238} не произойдет, так как баланс энергии для U^{239} составляет

$$c^2 (M_{238} + n - M_{239}) \approx 5{,}3 \ \textit{Мэв}$$

и, значит, для возбуждения деления необходимы быстрые нейтроны с кинетической энергией, близкой к значению

$$(7{,}1—5{,}3) \ \textit{Мэв} = 1{,}8 \ \textit{Мэв}.$$

При энергиях возбуждения ниже энергетического порога деления составного ядра оно претерпевает не деление, а испускание γ-квантов или нейтрона. Эффективное сечение деления становится сравнимым с сечениями других процессов σ_s и σ_a лишь при приближении энергии возбуждения к классическому порогу деления. При очень больших энергиях возбуждения в основном также происходит испарение нейтронов, поскольку эффективное сечение этой реакции растет с увеличением энергии возбуждения быстрее, чем эффективное сечение деления. Только при достаточно большом значении характеристического параметра Z^2/A происходит деление ядра.

Деление ядер средних значений Z, например, ядер родия-45, диспорзия-65, эрбия-68, происходит при взаимодействии их с частицами очень больших энергий (при бомбардировке α-частицами с энергией 560 *Мэв* или при захвате очень быстрых нейтронов с энергией 120 *Мэв*).

Все четно (Z) -нечетные (A) ядра, например, $_{92}U^{235}$, $_{94}U^{239}$, $_{92}U^{233}$, с переходом в составные четно-четные ядра делятся на тепловых

нейтронах и, наоборот, четно (Z)-четные (A) ядра, например, $_{92}U^{238}$, $_{90}Th^{232}$, $_{94}P^{240}$ с переходом в составные четно-нечетные делятся только на быстрых нейтронах.

Распад осколков деления образует цепь β-радиоактивных превращений (искусственно радиоактивные ядра изотопов элементов), например, в виде

$$_{36}Kr^{90} \xrightarrow[33\,сек]{\beta} {_{37}Rb^{90}} \xrightarrow[<1\,сек]{\beta} {_{38}Sr^{90}} \xrightarrow[25\,лет]{\beta} {_{39}Y^{90}} \xrightarrow[65\,ч]{\beta} {_{40}Zr^{90}} \quad \text{(устойчивый изотоп)},$$

что приводит к испусканию β-частиц, нейтрино, γ-квантов, а в некоторых случаях и так называемых запаздывающих нейтронов.

Многие искусственно получаемые радиоизотопы имеют большое техническое и хозяйственное применение. В малых количествах они используются в качестве радиоактивных индикаторов, а в больших количествах — в качестве средства воздействия на материалы (полимеризация молекул мономеров, радиолиз полимеров, вулканизация каучука, деструкция, генетика и стерилизация).

В табл. 32 приведены некоторые данные о долгоживущих ядрах-осколках.

Таблица 32

Наименование ядра-осколка	Обозначение	Период полураспада	Излучение
Криптон	$_{36}Kr^{85}$	10 лет	β (0,3 *Мэв*)
Стронций	$_{38}Sr^{90}$	25 лет	β (0,61 *Мэв*) + γ
Сурьма	$_{51}Sb^{125}$	27 лет	β (1,65 *Мэв*) + γ
Цезий	$_{55}Cs^{137}$	33 года	β (1,19 *Мэв*) + γ
Прометий	$_{61}Pm^{147}$	2,26 года	β (0,22 *Мэв*)
Европий	$_{63}Eu^{155}$	2,0 года	β + γ

Примечание. Указанные ядра-осколки применяются при стерилизации и при возбуждении химических и структурных процессов (экспозиционные дозы порядка 10^7 *R*).

На основе ядерных превращений таблица элементов Д. И. Менделеева продолжена искусственно полученными, так называемыми трансурановыми радиоактивными элементами, до $Z = 103$, включая 101-й элемент — менделевий (Md).

Изотопам трансурановых элементов ($Z > 92$) свойственна спонтанная α-радиоактивность. На рис. 67-4 приведены обозначения и основные типы распадов изотопов трансурановых элементов. Такая же активность может быть вызвана искусственным путем, например, при бомбардировке ядер годолиния, тербия и диспорзия α-частицами очень высоких энергий (560 *Мэв*).

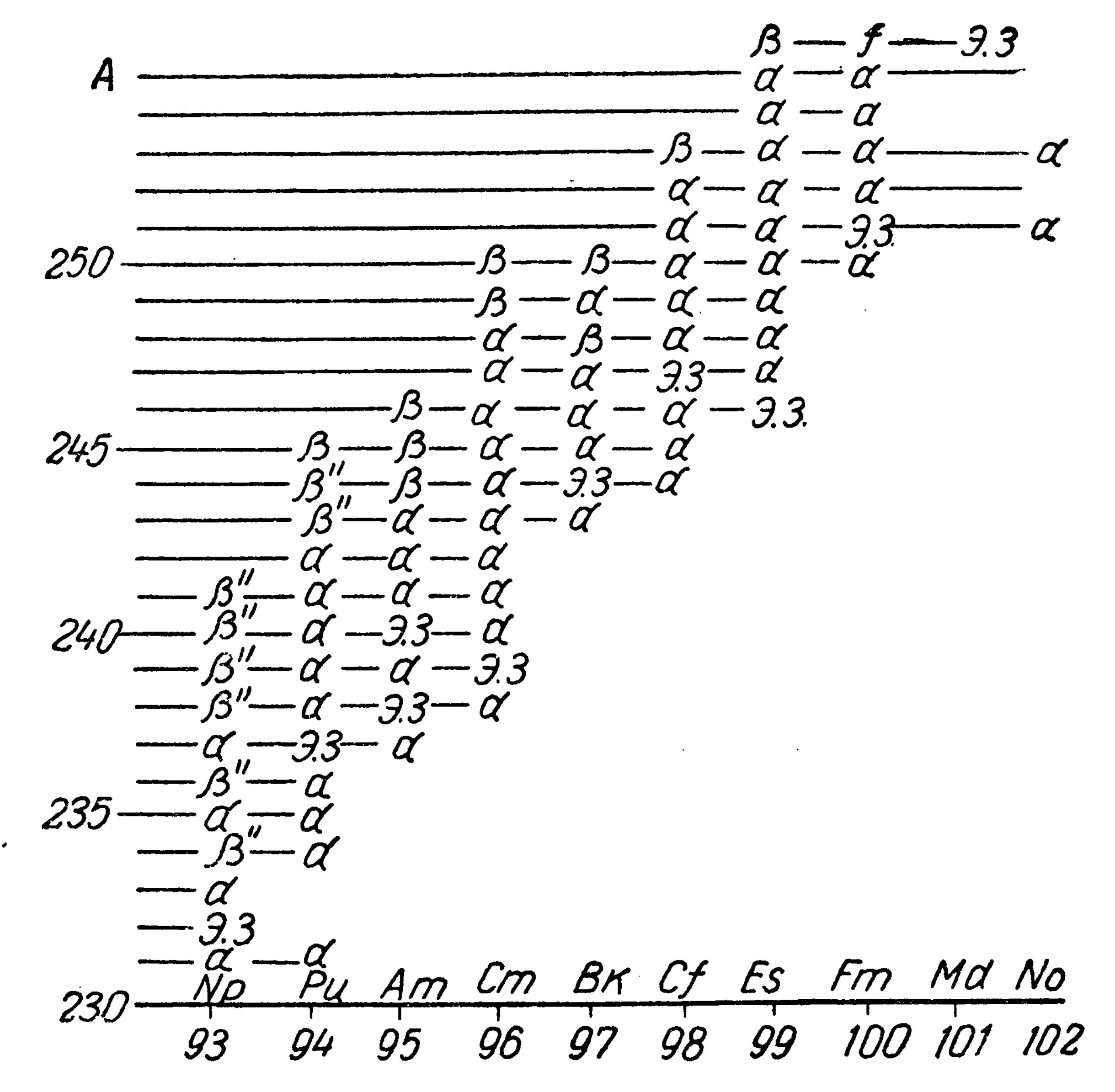


Рис. 67-4. Основные типы распада изотопов трансурановых элементов (э.з. — электронный захват, f — деление ядер)

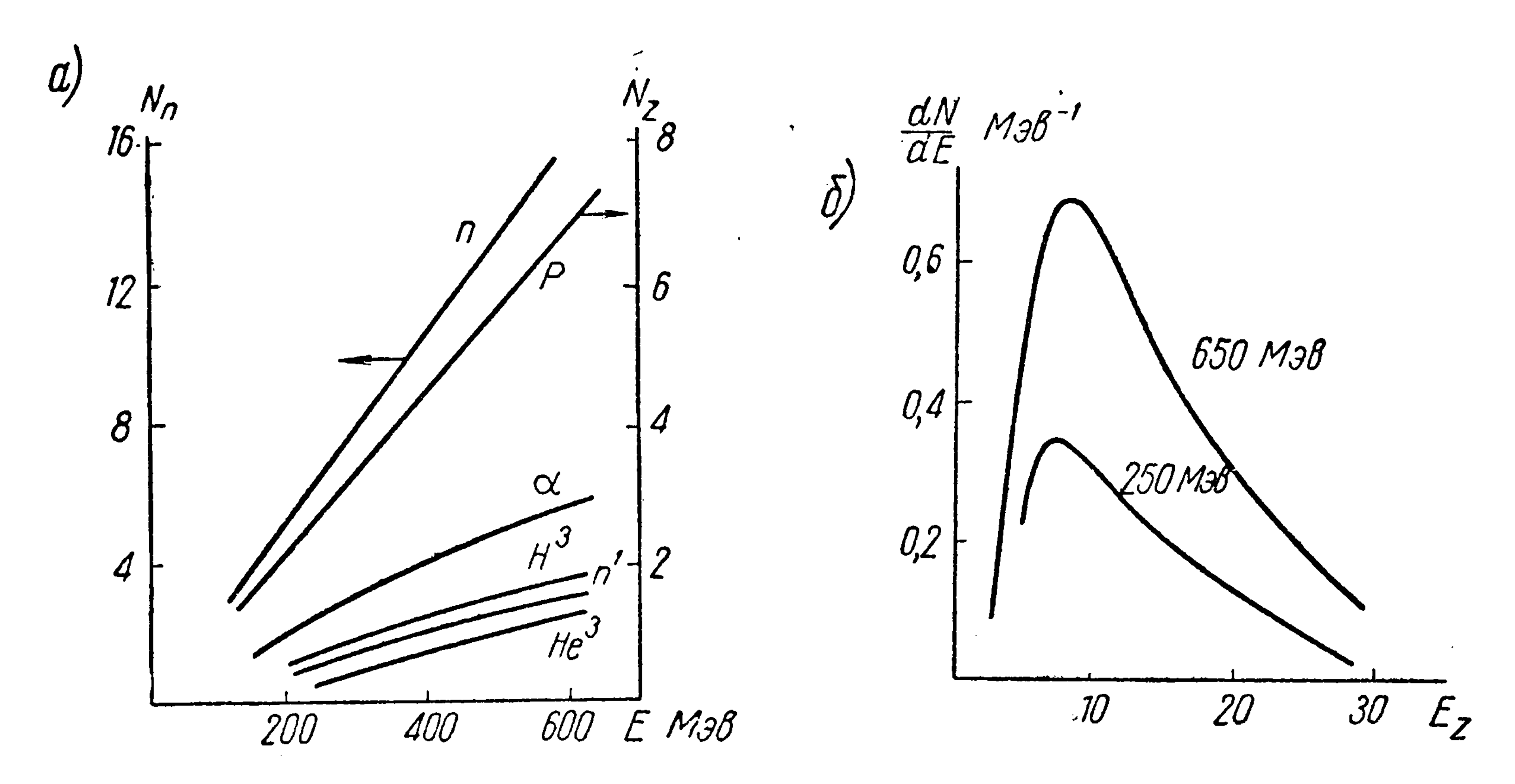


Рис. 67-5. а) Зависимость числа испаряющихся частиц различного типа из ядра $A = 100$ от энергии возбуждения; б) энергетическое (максвелловское) распределение протонов, испаряющихся из ядра $A = 100$ для нескольких (больших) значений энергии возбуждения (E_Z — кинетическая энергия испаряющихся частиц)

В области очень больших энергий (более 100 *Мэв*) нуклоны имеют длину свободного пробега в ядерном веществе, сравнимую с радиусом ядра и, следовательно, ядро уже не представляется черным поглотителем частиц (серые ядра). Существует конечная вероятность, что сверхбыстрые нуклоны за время порядка 10^{-22} *сек* смогут пролетать сквозь ядро, испытав лишь одно или несколько столкновений, т. е. породив нуклоны отдачи.

В зависимости от геометрии удара возможен каскад преобразований с вылетом из ядра нескольких частиц, образующих «звезду» треков.

Другой путь вылета из ядра нескольких частиц состоит в испарении их из сильно возбужденного промежуточного составного ядра. На рис. 67-5 приведено среднее число различных частиц, испускаемых при различных энергиях возбуждения для исходного ядра $A = 100$, а также дана функция распределения испускаемых протонов при двух значениях энергии возбуждения исходного ядра.

Относительные выходы различных частиц практически не зависят от энергии возбуждения.

Частицы (нуклоны) больших энергий (600 *Мэв*) и, следовательно, малых длин фазовых волн при столкновениях образуют также π-мезоны, например при реакции $n + p = \pi^0 + d$, или $p + p \to \pi^+ + d$. Частицы с очень большими энергиями до 10^{10} *эв* = 10 *Бэв* искусственно воспроизводятся в разгоняющих аппаратах (космотронах, беватронах, синхрофазотронах).

Устойчивая ядерная структура характерна для ядер с заполненными структурными протонно-нейтронными оболочками. Эти ядра имеют избранное число нейтронов или протонов соответственно следующему ряду: 2, 8, 20, 50, 82, 126 (так называемые магические числа).

Изотопы, содержащие такое число нейтронов или протонов, имеют повышенную распространенность в природе, повышенное число стабильных изотопов, малое сечение захвата тепловых нейтронов и наибольшую удельную энергию связи.

Периодичность свойств ядер, связанная с этими числами, дает основание полагать, что ядра изотопов могут быть систематизированы в семь периодов, заканчивающихся ядрами:

1) He^4 (2*p*, 2*n*); 2) O^{16} (8*p*, 8 *n*); 3) Ca^{40} (20*p*, 20*n*); 4) Zr^{90} (40*p*, 50 *n*); 5) Sn^{119} (50*p*, 69 *n*); 6) La^{139} (57 *p*, 82*n*); 7) Pb^{208} (82 *p*, 126 *n*).

Освобождение энергии в форме кинетической энергии вылетающих частиц возможно не только при реакциях деления тяжелых ядер, но и при воссоединении (синтезе) легких ядер. Такому воссоединению с освобождением энергии препятствует электрическое отталкивание зарядов ядер, поэтому для ее осуществления необходима энергия активации тем большая, чем больше заряды сливающихся ядер (см. рис. 64-2). Синтез водородных ядер ($Z = 1$) с обра-

зованием ядер гелия может происходить в заметных количествах уже при температурах порядка (10^8)°K (термоядерные реакции). Чем выше температура, тем чаще происходит реакция слияния ядер или тем меньше время, которое приходится на каждую из них (рис. 67-6). Наиболее эффективной по быстроте протекания и выделению энергии на единицу массы прореагирующего вещества является реакция

$$_1H^2 + {_1H^3} \rightarrow {_2He^4} + {_0n^1}.$$

Необходимая для ее осуществления температура порядка (10^7)°K может быть достигнута с помощью реакции деления тяжелых ядер, например Pu^{239}. После возникновения реакции синтеза водородных ядер температура, необходимая для ее течения, поддерживается за счет выделяющейся энергии, причем образующиеся быстрые нейтроны в свою очередь могут быть использованы для цепной реакции деления, например ядер U^{238} (неуправляемые термоядерные реакции). Такие термоядерные реакции синтеза легких ядер, по-видимому, протекают в недрах звезд, в том числе и нашего Солнца.

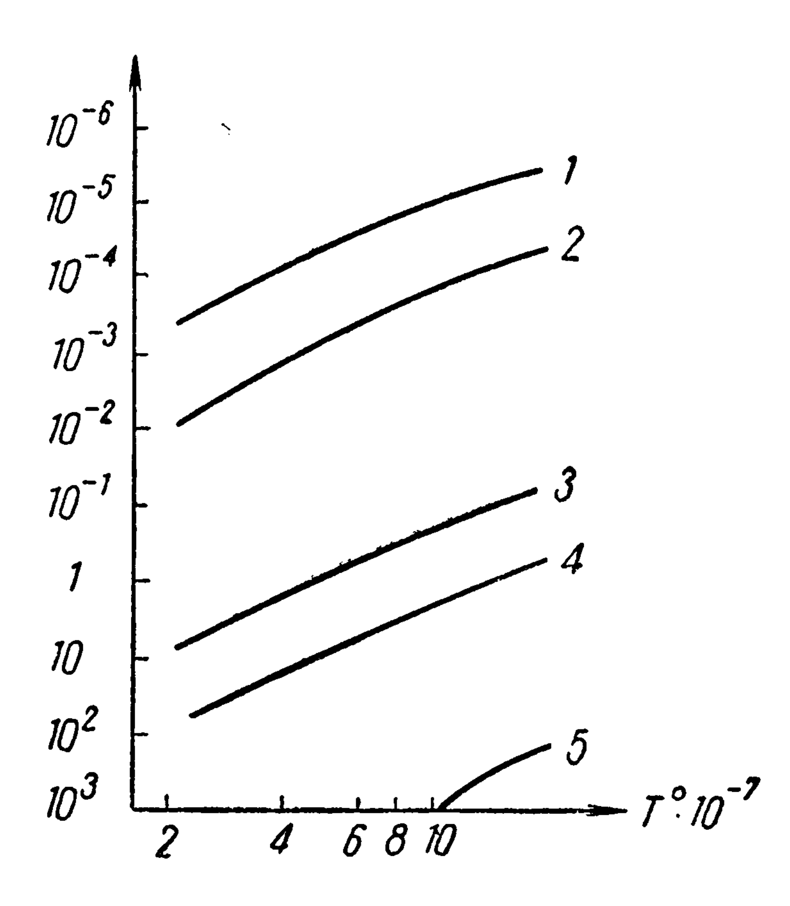


Рис. 67-6. Зависимость скорости реакции синтеза ядер от температуры:

1) $H^2 + H^3 \rightarrow He^4 + n$ (+ 17,6 *Мэв*);
2) $H^2 + H^2 \rightarrow He^3 + n$ (+ 3,5 *Мэв*);
3) $H^1 + H^3 \rightarrow He^4$ (+ 19,9 *Мэв*);
4) $H^1 + H^2 \rightarrow He^3$ (+ 5 *Мэв*);
5) $Li^7 + H^1 \rightarrow 2He^4$ (+ 17,6 *Мэв*)

В целях управления реакцией синтеза водородных ядер и создания управляемых термоядерных реакторов ограниченных объемов, разрабатываются методы создания (очень высоких) температур в водородной плазме, которая образуется при протекании импульса сильного тока сквозь газообразный дейтерий. Высокотемпературная шнуровая плазма, т. е. среда, состоящая из ядер, ионов и электронов с их полями, но не содержащая атомов, удерживается от соприкосновения со стенками разрядной камеры радиальным магнитным полем тока, протекающего по обмотке сложной конфигурации.

Все современные управляемые реакторы, предназначаемые для научных и технических целей (большие потоки нейтронов до 10^{15} *см*$^{-2}$*сек*$^{-1}$), энергетических целей (энергия для промышленности и транспорта) и регенеративных целей (воспроизведение ядерного горючего), в настоящее время работают на принципе деления тяжелых ядер. Ядерный реактор содержит ядерное горючее, распределенное в активной зоне (гемогенно в растворе или гетерогенно

в виде клетки из стержней), замедлитель (графит, вода, берилий), хладоагент (воздух, вода, жидкие металлы) и стержни управления (кадмий, бористая сталь).

Распространенный в природе изотоп урана U^{238} спонтанно делится с освобождением энергии, однако период этого деления очень велик ($\sim 8 \cdot 10^{15}$ лет), так что этот процесс объясняет весьма малое присутствие в урановых рудах изотопа плутония Pu^{239}, образующегося по схемам:

$$_{92}U^{238} \rightarrow {}_{Z_1}X^{A_1} + {}_{Z_2}Y^{A_2} + 2n; \quad {}_{92}U^{238}(n, \gamma)\,{}_{92}U^{239} \xrightarrow[23\ мин]{\beta^-}$$

$$_{93}Np^{239} \xrightarrow[2,3\ дн]{\beta^-} {}_{94}Pu^{239}.$$

Изотоп урана U^{235}, как и Pu^{239}, делится на блуждающих тепловых нейтронах, которые всегда имеются в земных условиях из-за космического излучения. При каждом акте деления в этих случаях образуется 2—3 нейтрона, что делает возможным развитие цепной реакции.

В реакторах, устройство которых (размеры, материалы, конструкция) обеспечивает эффективный коэффициент размножения нейтронов $k_н \geqslant 1$, можно с помощью регулировочных стержней из вещества, резонансно поглощающего нейтроны (кадмий, бор), автоматически поддерживать необходимый уровень тепловой мощности реактора или необходимую плотность нейтронного потока.

В действии ядерных реакторов есть особенность, которая не встречается в работе химических источников энергии. Как указывалось, естественный природный уран практически состоит из двух изотопов U^{238} (99,3%) и U^{235} (0,7%). При делении U^{235} на медленных (блуждающих) нейтронах образуется в среднем 2,5 нейтрона высокой энергии (~ 2 *Мэв*). Некоторая часть из них ($\sim 30\%$) может быть захвачена ядрами U^{238} с превращением этого ядра в ядро изотопа трансуранового элемента $_{94}Pu^{239}$, который делится на тепловых нейтронах. Таким образом, в регулируемом ядерном реакторе автоматически вырабатываются не только тепло и нейтронные потоки, но и ядерное горючее. В результате, на основе делящегося U^{235} воспроизводятся новые ядерные горючие на тепловых нейтронах, например:

$$_{92}U^{238} + n^1 \rightarrow {}_{92}U^{239} \xrightarrow[23\ мин]{\beta^-} {}_{93}Np^{239} \xrightarrow[2,3\ дня]{\beta^-} {}_{94}Pu^{239}$$ (его ядро делится на тепловых нейтронах);

$$_{90}Th^{239}(n, \gamma)\,{}_{90}Th^{233} \xrightarrow[23,5\ мин]{\beta^-} {}_{91}Pa^{233} \xrightarrow[27,4\ дня]{\beta^-} {}_{92}U^{233}$$ (его ядро делится на тепловых и быстрых нейтронах).

На быстрых нейтронах, в свою очередь, делятся U^{238}, Pu^{240} и Th^{232}, т. е. четно-четные ядра изотопов этих элементов.

Критическим объемом реактора $V_к$ является тот его размер, при котором число нейтронов, покидающих реактор, равно числу образованных в нем нейтронов за то же время. Эти размеры зависят от рода ядерного горючего, материала замедлителя и конструкции реактора. Плотность нейтронного потока в активной зоне реактора при данной конструкции его прямо пропорциональна тепловой мощности реактора, т. е. $P \sim nv = \varphi$. Действительно, если N — концентрация делящихся ядер в замедлителе, l — длина пробега нейтрона в замедлителе, v — скорость движения нейтронов, n — их объемная концентрация, то при сечении деления σ_f и выделяемой энергии E_f реакции имеем

$$P = \frac{nv\,\sigma_f\,NV_к E_f}{l} = C'\cdot n\cdot v = C'\cdot\varphi. \qquad (67,3)$$

Лекция 68

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ ЯДЕРНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Соответственно свойствам носителей энергии излучения в ядерной физике используются специфические методы измерений.

Из таблицы свойств исходных частиц (см. лекцию 61) следует, что измерению подлежат направленные и диффузные потоки заряженных и незаряженных частиц и γ-квантов. При этом измерения проводятся в широких пределах от отдельных частиц до их больших потоков. Практически важно путем измерений получить ответ на следующие вопросы: каковы частицы (их масса m и заряд Z), какова их энергетическая характеристика — E, или $h\nu$, какова интенсивность излучения I, т. е. энергия излучения, отнесенная к единице времени и единице поверхности, нормально расположенной к заданному направлению. Если излучение проникает в приемник со всех направлений, то интенсивность является глобальной величиной, равной

$$I = \frac{dW}{dS_n dt}, \qquad (68,1)$$

где $dS_n = dS \cos\alpha$. В тех же случаях, когда интерес представляет лишь одно определенное направление распространения энергии, носителями которой являются частицы или кванты, интенсивность рассматривают как величину, отнесенную к единице телесного

угла (рис. 68-1). Очевидно, интенсивность излучения в направлении под углом φ к нормали излучающей поверхности будет

$$I_\varphi = \frac{EdN}{dS_n dt d\Omega}. \qquad (68,1')$$

Для ядерных процессов характерно явление радиоактивности и, следовательно, кроме упомянутых величин, важны также измерения активности препаратов и периодов полураспада нуклидов. Наконец, при поглощении ядерных излучений веществом происходит преобразование энергии в другой вид. Размеры наблюдаемых в веществе реакций того или иного вида зависят от удельной поглощаемой энергии излучения данного качества, т. е. от дозы излучения. Часто в измерительных целях указывается не доза излучения в облучаемом веществе, а доза в некотором условном образцовом веществе, каким служит для гамма- и бета-излучений атмосферный воздух (экспозиционная доза), а для нейтронов — тканеэквивалентная аморфная среда определенного химического состава.

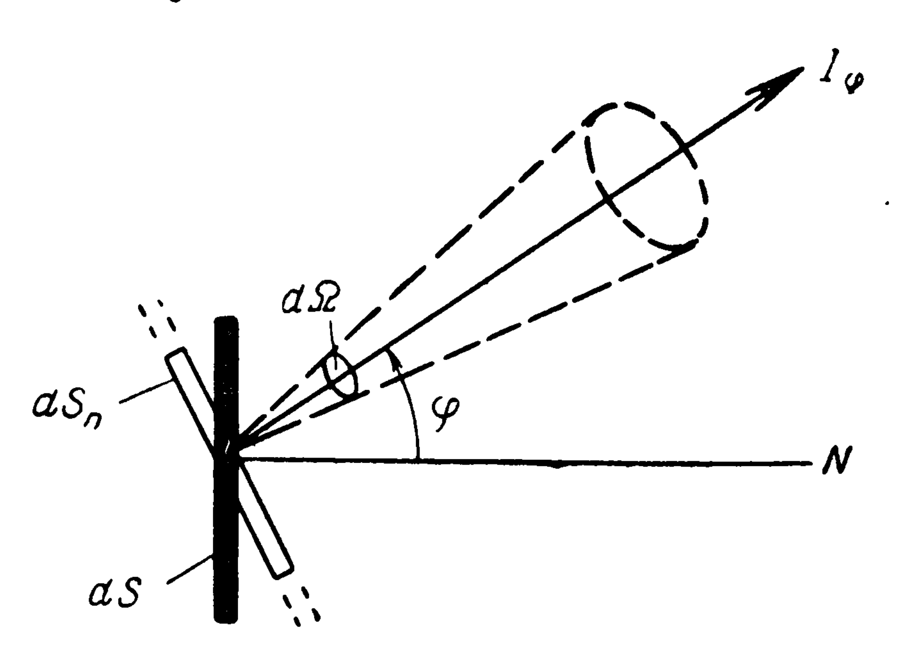


Рис. 68-1. К определению понятия интенсивности излучения в заданном направлении

Соответственно перечисленным целям применяются различные единицы, способы и средства измерений.

Представление об измеряемом излучении получают по тому действию, которое оно производит в той или иной среде, поглощающей энергию излучения. Наиболее характерным действием для всех видов ядерного излучения является ионизация, производимая частицами вдоль пути их пробега в веществе. Заряженные частицы производят это действие непосредственно. При отсутствии заряда у частиц, например у нейтронов и квантов, ионизация возникает косвенно через ядра отдачи для быстрых нейтронов и через электроны для гамма-квантов. Только для нейтрино нельзя указать ионизационного эффекта, и потому свойства этих легчайших частиц определяют с помощью импульсов частиц, вылетающих при некоторых ядерных реакциях. В качестве среды, ионизация в которой подлежит определению, обычно выбирают газ: атмосферный воздух (ионизационные камеры для γ-квантов), инертные газы (газовые счетчики для ионизирующих частиц), фторид бора BF_3 (ионизационные камеры для нейтронов).

Обычные (плоские, цилиндрические, наперстковые или сферические) ионизационные камеры, предназначаемые для измерений суммарных эффектов ионизационного действия γ-излучений, пред-

ставляют собой соответствующие воздушные конденсаторы с выделенным ионометрическим объемом газа.

Мерой нарастания экспозиционной дозы γ-излучения во времени (мощности дозы) служит ток насыщения, измеряемый различными способами. Если рассматривать ионометрический объем газа V_i и принять равномерной его ионизацию излучением, то при постоянстве расхода энергии ε на образование пары ионов в газе (для воздуха $\varepsilon = 33 \div 34$ *эв*) без поправок на диффузию ионов имеем

$$i_{\text{нас}} = e\nu V_i, \tag{68,2}$$

где ν — число пар ионов, образуемых в единице объема газа. Так как

$$I \cdot \mu = \nu\varepsilon, \tag{68,3}$$

где μ — линейный коэффициент поглощения излучения газом (точнее — коэффициент электронного преобразования), то после подстановки в (68,2) найдем

$$i_{\text{нас}} = \frac{e}{\varepsilon}\frac{\mu}{\rho}\rho I V_i = CIV_i\frac{\mu}{\rho}, \tag{68,4}$$

где ρ — плотность газа, C — коэффициент, зависящий от рода газа и выбора единиц измерений.

Таким образом, ионизационный ток насыщения тем больше, чем больше интенсивность излучения, чем больше ионометрический объем газа и чем больше массовый коэффициент поглощения измеряемого излучения газом. Одной и той же интенсивности различных излучений соответствует различный ток насыщения. В тех случаях, когда малые ионизационные камеры, помещаемые в поток γ-квантов, не имеют входных окон, так что излучение проникает в газ камеры через стенку, ионизация газа происходит не столько от γ-квантов, сколько от тех фотоэлектронов, которые вырваны квантами излучения из стенок камеры.

Согласно (68,3) и (68,4), доза излучения в каком-либо веществе

$$D = \frac{\Delta W_\gamma}{m} = I\frac{\mu}{\rho}t = C\frac{i_{\text{нас}}}{\rho V_i} = C'\frac{q_i}{m}. \tag{68,5}$$

т. е. удельная поглощенная веществом энергия излучения пропорциональна удельному разделенному заряду. По этой причине за единицу экспозиционной дозы ионизирующего излучения принимают дозу в атмосферном воздухе, соответствующую образованию приблизительно $2{,}1 \cdot 10^9$ пар однократных ионов на 1 $см^3$ воздуха, или, иначе, разделению заряда в $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ *к* на 1 *кг* воздуха. Ионизационные камеры суммарного действия допускают измерения мощностей доз от микрорентгена в секунду до мегарентгена в секунду и имеют широкое применение в дозиметрии ионизирующих излучений.

Для измерений альфа- и бета-излучений особенно при малых активностях источников (радиоактивные загрязнения) используются

ионизационные камеры повышенного давления газа. Радиоактивный препарат при этом помещается внутри камеры. Для очень слабых гамма-источников или бета-излучений применяются импульсные камеры и счетные трубки различных конструкций. Счетные трубки работают или как пропорциональные счетчики с газовым усилением (рис. 68-2), так что импульсы на выходе пропорциональны начальной ионизации, производимой частицей, или как регистрирующие разрядные трубки.

Чувствительность газовых счетчиков очень велика, а их время восстановления, обусловленное передвижением газовых ионов, составляет примерно микросекунду. При удачном сочетании измерительных условий каждая частица, проникающая в счетчик, может быть зарегистрирована.

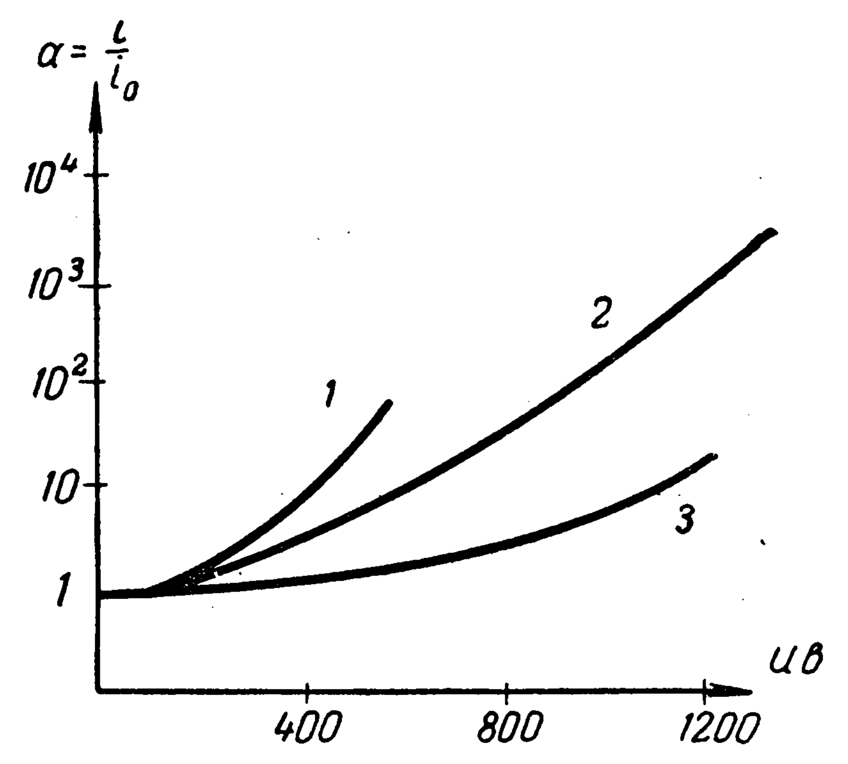


Рис. 68-2. Зависимость коэффициента газового усиления α от разности потенциалов между электродами цилиндрического пропорционального счетчика:

1 — для смеси A (4%) + O_2 (6%) при $p = 6$ *см рт. ст.* *2* — для метана при $p = 9$ *см рт. ст.*; *3* — для метана при $p = 32$ *см рт. ст.*

Для определения направления движения проникающих частиц газовые счетные трубки объединяются в телескопические системы, действующие по принципу регистрации совпадений разрядов. Счет происходит только при проникновении частицы сквозь избранный ряд трубок. В тех случаях, когда нежелательно применение метода совпадений, снижающего общую чувствительность измерительной установки на газовых трубках, прибегают к более чувствительным сцинтилляционным счетчикам.

Сцинтилляционным счетчиком называют прибор, состоящий из люминофора и фотоумножителя, позволяющего измерять световые вспышки, вызываемые в фосфоре отдельными ионизирующими частицами (см. рис. 56-5).

Эти счетчики могут быть использованы для бета- и гамма-спектроскопии излучений от источников малой активности порядка 10^{-9} *кюри*; для регистрации гамма-излучений, интенсивность которых в тысячи раз меньше, чем наименьшая интенсивность, измеряемая с помощью газового счетчика; для регистрации π-мезонов, нуклонов, тяжелых частиц, а также быстрых и медленных нейтронов.

В качестве люминофора употребляются кристаллы нафталина, стильбена, антрацена и иодистого натрия, активированного таллием. При тщательно подобранных измерительных условиях может быть осуществлена 100-процентная регистрация частиц, проникающих в кристалл. Благодаря более короткому времени восстановления (10^{-9} *сек*) сцинтилляционные счетчики применяются для уста-

новления периода полураспада короткоживущих радиоизотопов. Сцинтилляционный счетчик допускает также измерения плотностей потоков частиц до 10^6 *см*$^{-2}$*сек*$^{-1}$.

Процессы, протекающие в сцинтилляционном счетчике, подразделяются на следующие стадии: а) поглощение первичного излучения в люминофоре (частицы с энергией E, или кванта $h\nu$), б) возбуждение молекул или узлов решетки кристалла фосфора за счет поглощенной ими энергии E_a проникающей частицы, в) локальное испускание люминофором фотонов, т. е. сцинтилляция (вспышка), г) попадание фотонов на катод фотоумножителя, д) эмиссия электронов с катода, согласно уравнению фотоэффекта Эйнштейна, е) вторичное электронное умножение (R) на отдельном диноде, ж) последовательное умножение на всех m динодах, равное $M = CR^m$, з) образование на аноде фотоумножителя выходного заряда

$$Q = neM = CneR^m, \qquad (68,6)$$

где C — эффективность собирания электронов динодной системой фотоумножителя ($C \approx 1$), n — число первичных фотоэлектронов, m — число динодов.

Число электронов n, вылетающих из фотокатода в результате поглощения люминофором энергии частицы E_a, определяется конверсионной эффективностью $A = \frac{N_{\text{ф}}}{N_{\text{a}}}$ люминофора в отношении данных частиц, оптической прозрачностью люминофора (толщиной h) в отношении испускаемых световых квантов, равной $C = \frac{N'_{\text{ф}}}{N_{\text{ф}}} = e^{-\mu}$ (μ — эффективный линейный коэффициент ослабления света сцинтилляции в веществе люминофора), величиной эффективного телесного угла G, под которым виден люминофор с фотокатода, и выходом $B_\nu = \frac{N_e}{N'_{\text{ф}}}$ электронов из фотокатода для квантов $h\nu$ света сцинтилляции, так что

$$n = \frac{E_{\text{a}}}{h\nu} \cdot A \cdot G \cdot C \cdot B_\nu = \varphi(E, \nu). \qquad (68,7)$$

Технические возможности современных фотоумножителей с 14 каскадами умножения допускают усиление импульса фототока в 10^9 раз при разности потенциалов на каждом каскаде 160 *в*.

Сцинтилляционные счетчики получили широкое применение для измерений очень слабых и кратковременных ядерных излучений, однако счетные устройства, так же как ионизационные камеры, не обладают наглядностью, свойственной фотографическому методу регистрации следов частиц (конденсационных в парах, пузырьковых в жидкостях, зерновых в фотоэмульсиях, искровых в воздушных конденсаторных камерах).

Работа конденсационных камер (камеры Вильсона и термодиффузионные камеры) основана на том, что ионизирующие заря-

женные частицы, создавая ионы в смеси воздух — пересыщенный водяной пар, вызывают образование капель видимых размеров.

Полагая, что капля образуется на одном ионе, согласно формуле Томсона (22,9), имеем

$$\ln\frac{p_r}{p_\infty}=\frac{\mu}{RT\rho_ж}\left(\frac{2\alpha}{r}-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon r^4}\right). \tag{68,8}$$

При $r_к=\left(\frac{e^2}{16\pi\varepsilon\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$ из (68,8) имеем, что $p_r=p_\infty$ и, следовательно, $r_к$ определяет размеры заряженных капель в насыщенном объеме газа. Полагая $e=4{,}8\cdot10^{-10}$ (а. э.е), $\varepsilon=1$ и $\alpha\approx76$ *эрг/см*^{2} $=76\cdot10^{-3}\ \frac{дж}{м^2}$, получаем, что критический радиус капель равен $r_к\approx4\cdot10^{-8}$ *см*. Если радиус капель $r>10^{-7}$ *см*, то влияние заряда на необходимое пересыщение $\frac{p_r}{p_\infty}$ практически уже не сказывается (табл. 33, рис. 68-3).

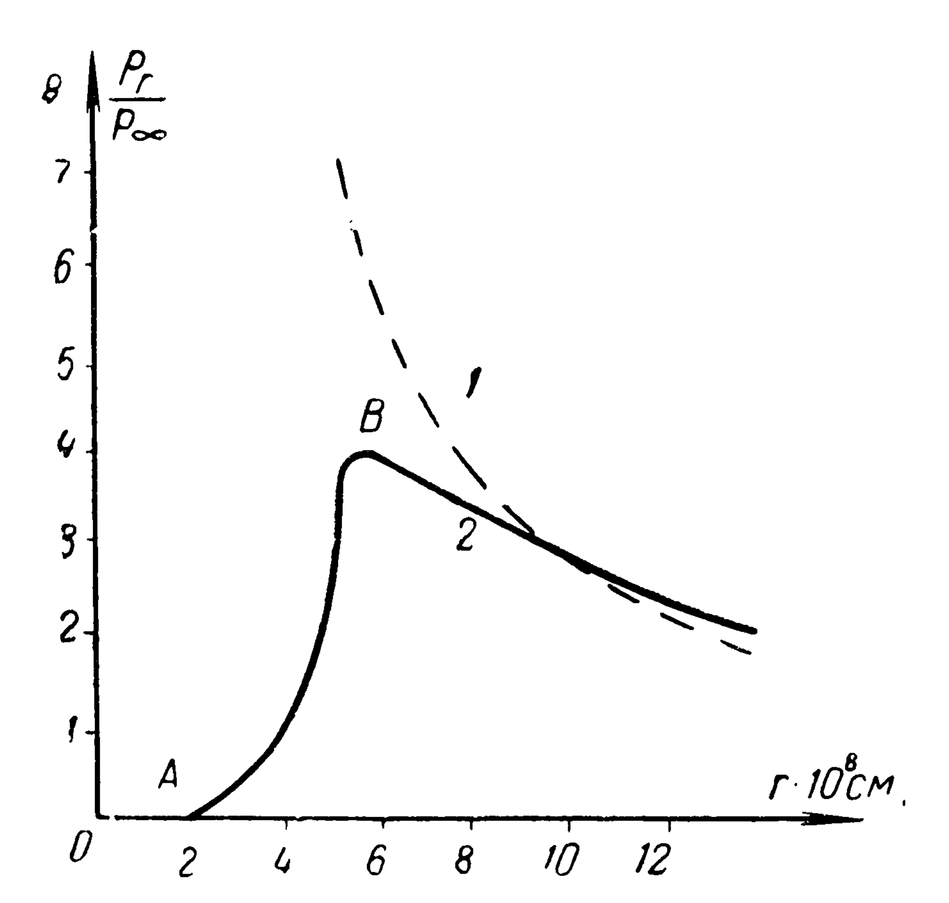


Рис. 68-3. Зависимость давления насыщенного водяного пара у поверхности капли воды от ее радиуса:
1 — капля не заряжена; *2* — капля заряжена

Таблица 33

$r\cdot10^8$ *см*	$\frac{p_r}{p_\infty}$	$r\cdot10^8$ *см*	$\frac{p_r}{p_\infty}$
2	10^{-18}	8,8	3,35
3,5	0,35	12,0	2,50
4,0	1,00	20,0	1,80
6,5	4,10		

Восходящий участок *АВ* кривой рис. 68-3 соответствует размерам капель, которые не могут коагулировать в более крупные, т. е. не могут вырасти до видимых размеров ($10^{-5}\div10^{-4}$ *см*), так как с возрастанием r требуется большее пересыщение, или большая упругость насыщенного пара над каплей. Ниспадающая ветвь *ВС* соответствует неустойчивым размерам капель. Если пересыщение превышает значение $\frac{p_r}{p_\infty}>4$ и капля прошла состояние *В*, то она быстро вырастает до видимых размеров.

В зависимости от энергии пролетающих частиц для увеличения вероятности фиксации их взаимодействия с ядрами давление газа внутри конденсационной камеры повышают (до 300 *атм*), а необходимое пересыщение создается либо быстрым адиабатическим расширением газа в камерах, управляемых счетчиками, либо темпера-

турным перепадом при одностороннем охлаждении газа. Первичная удельная ионизация измеряется путем подсчета по фотоснимку числа зерен почернения вдоль следа частицы. Для установления энергии частицы измеряется радиус кривизны r следа частицы на фотографии при наличии в камере поперечного магнитного поля известной напряженности H.

Частица, обладающая массой покоя M_0, зарядом Ze (а. э. е), импульсом p, перпендикулярным H, движется, в соответствии с (4,16) и (40,4), по круговой траектории радиуса r, определяемого соотношением

$$pc = \frac{M_0\beta c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} = ZeHr. \tag{68,9}$$

Таким образом, при известных значениях (Z, H, r) непосредственно определяют импульс частицы p. Если E, W — соответственно полная и кинетическая энергии частицы, а $\beta c = v$ — ее скорость, то, согласно (4,17 и 4,18),

$$E = M_0c^2\left[1 + \left(\frac{ZeHr}{M_0c^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{68,10}$$

$$W = M_0c^2\left\{\left[1 + \left(\frac{ZeHr}{M_0c^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right\}; \tag{68,11}$$

$$\beta = \frac{ZeHr}{M_0c^2\left[1 + \left(\frac{ZeHr}{M_0c^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{68,12}$$

При $W \ll M_0\,c^2$ (частицы ядерных превращений) из формул (68,11) и (68,12) получим

$$\left.\begin{aligned} W &\approx \frac{(ZeHr)^2}{2M_0c^2}, \\ \beta &= \frac{ZeHr}{M_0c^2}, \end{aligned}\right\} \tag{68,13}$$

а при $W \gg M_0c^2$ (космические частицы)

$$W \approx ZeHr - M_0c^2. \tag{68,14}$$

Для отыскания значений W и $\beta c = v$ по (68,13), очевидно, необходимо знать M_0 и только в случае (68,14) можно пренебречь энергией покоя и вычислять кинетическую энергию частицы непосредственно по измерениям Hr. Калибровка измерительной установки производится по следам частиц, пробег (R_0) которых в воздухе известен. Если L_0 и L_x — длины изображений следов частиц на снимке, то пробег R_x неизвестной частицы в воздухе будет

$$R_x = L_x\frac{R_0}{L_0}. \tag{68,15}$$

Частицы, наблюдающиеся при ядерных превращениях, имеют верх-

ние пределы кинетической энергии в несколько миллионов электрон-вольт, так что $W \ll M_0c^2$, следовательно, для них, согласно (4,18),

$$\beta = \frac{pc}{(p^2c^2 + M_0^2c^4)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{pc}{M_0c^2}. \qquad (68,16)$$

Линейная плотность ионизации таких сравнительно медленных частиц изменяется пропорционально $1/v^2$, поэтому она различна для частиц разной массы, даже если у них одинаковы кинетические энергии. По этой причине род пролетающей частицы может быть установлен по густоте почернения фотоснимка трека частицы.

У космических частиц кинетическая энергия W равна собственной энергии покоя частицы и даже ее превосходит, поэтому плотность ионизации для всех частиц почти одинакова. В связи с этим массу частицы по ее треку в конденсационной камере можно определить лишь при независимом выяснении двух величин, например, магнитной кривизны траектории Hr и пробега R. В этих случаях значительные измерительные выгоды представляет так называемая пузырьковая камера. Колонная ионизация, производимая очень быстрыми заряженными частицами в жидкости, сопровождается значительной работой и, следовательно, локальным выделением тепла. Образующиеся при этом пузырьки пара делают видным и фотографичным след частицы в жидкости. В тех случаях, когда сильно проникающее излучение состоит из частиц очень больших энергий (космические частицы) или из короткоживущих частиц

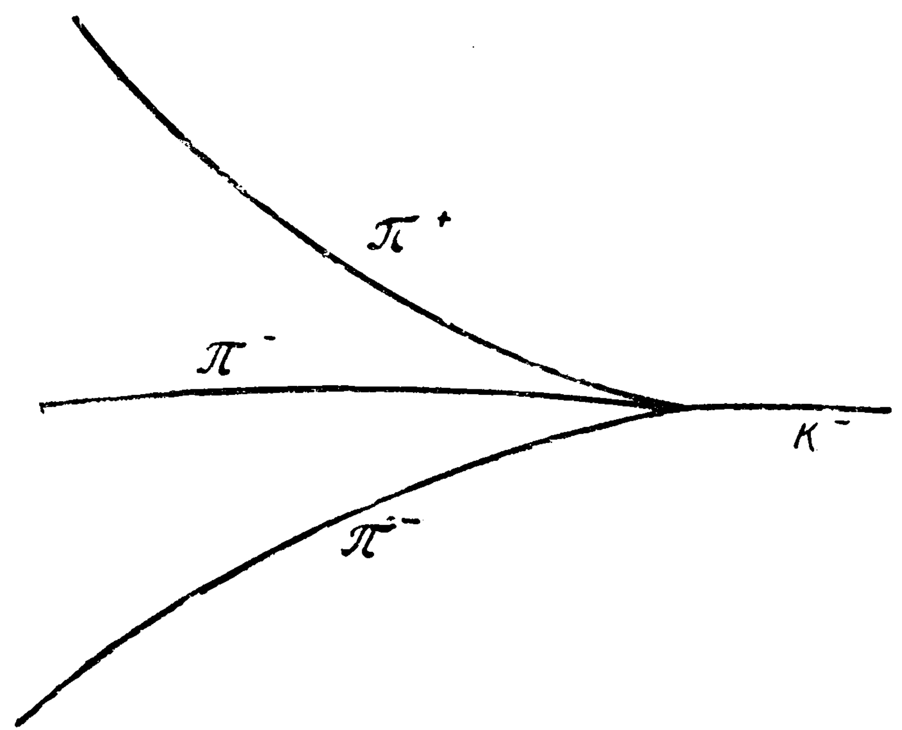


Рис. 68-4. «Звезда» следов при распаде K^--мезона

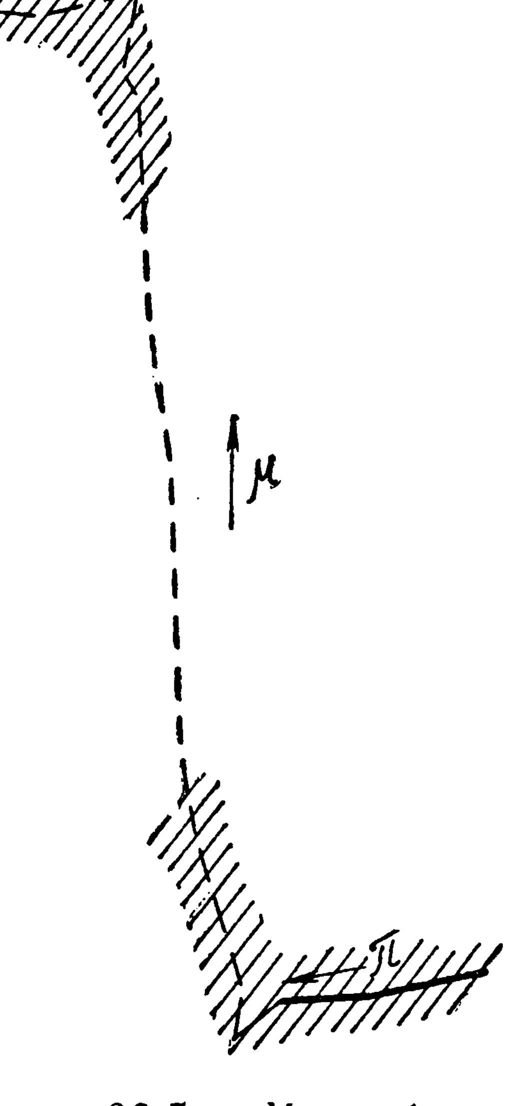


Рис. 68-5. Микрофотография распада тяжелого π-мезона ($\pi \to \mu + \nu$) и μ-мезона ($\mu \to e + 2\nu$) со следом электрона e (в конце пути следы жирнее)

(π- и μ-мезонов), цепочки проявленных зерен бромистого серебра образуют след в толстом светочувствительном слое специальной фотоэмульсии, в которую вводят необходимые примеси. Эти ядерные фотоэмульсии характеризуются высоким содержанием бромида серебра в форме весьма мелких (диаметром 0,15 *мк*) и близко расположенных микрокристаллов, а также большой толщиной слоя, которая обычно составляет 50÷800 *мк*, благодаря чему частицы остаются в эмульсии до конца пробега.

На рис. 68-4 показаны следы частиц, образовавшихся при распаде K^--мезона, а на рис. 68-5 представлены составленные из срезов следы распадающегося π-мезона, а затем и μ-мезона с образующимся электроном.

Стопки из таких фоточувствительных пленок (без подложек) могут достигать толщины свыше десятка сантиметров и, таким образом, образовывают своеобразную фотоэмульсионную камеру. Следы частицы в фотоэмульсии составляют из последовательных срезов проявленной пленки и рассматривают под микроскопом.

Для наблюдений весьма редких взаимодействий нейтрино (электронного или мюонного) с ядрами вещества (сечение процесса около 10^{-12} *барн*) используются искровые конденсаторные камеры. Камера представляет собой большой плоский многопластинчатый газовый (инертные газы) конденсатор. Разность потенциалов на электродах поддерживается близкой к пробивной. Заряженная частица, например мюон, вылетающая при реакции взаимодействия нейтрино высокой энергии (свыше 10^9 *эв*) с ядром, пролетая сквозь такую камеру, оставляет в ней пунктирный след в виде искр между пластинами. Так как при больших энергиях нейтрино вылетающий мюон сохраняет направление движения нейтрино, то искровой след мюона в камере воспроизводит трассу движения нейтрино.

КОСМИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Лекция 69

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОФИЗИКИ

Под космическим излучением подразумевают потоки микрочастиц и квантов электромагнитной энергии, возникновение, распространение и преобразование которых происходит в космическом пространстве, включающем отдельные туманности, звездную Галактику, Солнце, Землю, все другие космические образования, а также связывающие их силовые поля. Космическое излучение у истоков своего возникновения называется исходным; излучение, поступающее извне в атмосферу Земли, — первичным; первичное излучение вместе с вторичным на уровне моря или на уровне земной поверхности — полным; излучение, поступающее в недра Земли, — глубинным.

Земля, ее атмосфера, океаны, кора, мантия и ядро являются, таким образом, приемниками первичного космического излучения. Твердое тело Земли может быть принято за эллипсоид. Экваториальный радиус Земли $R_э = 6378{,}388$ *км* $\approx 6{,}38 \cdot 10^6$ *м* $= 6{,}38 \cdot 10^8$ *см*, а полярный $R_п = 6356{,}912$ *км* $= 6{,}36 \cdot 10^6$ *м* $= 6{,}36 \cdot 10^8$ *см*.

Сжатие земного сфероида невелико; оно составляет

$$\frac{R_э - R_п}{R_э} = 1 - \frac{R_п}{R_э} = 1 - \frac{6{,}36}{6{,}38} = \frac{1}{297} \approx 3{,}4‰, \quad \text{или} \quad 0{,}34\%.$$

Ускорение силы тяжести, или напряженность гравитационного поля Земли, имеет значения: на полюсе $g_п = 983{,}2$ *см* $\cdot$ *сек*$^{-2} \approx 9{,}83$ *м* $\cdot$ *сек*$^{-2}$, на экваторе $g_э = 978{,}0$ *см* $\cdot$ *сек*$^{-2} \approx 9{,}8$ *м* $\cdot$ *сек*$^{-2}$.

По мере углубления в земные недра температура земного вещества возрастает и около центра Земли достигает в среднем значения порядка 2500° С. Масса Земли равна $5{,}98 \cdot 10^{21}$ *т* $\approx 6 \cdot 10^{24}$*кг* $= 6 \cdot 10^{27}$ *г* при средней плотности земного вещества около $5{,}53 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3} $= 5{,}53$ *г/см*^{3} и средней плотности земной коры только $2{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3} $= 2{,}7$ *г/см*^{3}. Распределение плотности земного вещества по глубине (рис. 69-1), полученное на основании изучения распространения

сейсмических волн, показывает, что в недрах Земли существует несколько различных, резко разграниченных по плотности слоев.

Вещество Земли сжимается силами тяжести, причем настолько, что в области внутреннего ядра давление достигает огромной величины порядка $3{,}5 \cdot 10^6$ *атм* $\approx 3{,}4 \cdot 10^{11}$ *н* $\cdot$ *м*$^{-2}$.

Земная кора ($\rho = 2{,}7$ *г/см*^{3}) имеет толщину всего лишь порядка $15 \div 70$ *км*. Она охватывает более глубокий слой — мантию ($\rho = 4{,}5$ *г/см*^{3}) при температуре порядка $T \approx 1800°$ С; толщина этого слоя 2900 *км* $= 2{,}9 \cdot 10^8$ *см*. Эта оболочка окружает земное ядро ($\rho = 10{,}6$ *г/см*^{3} при $T = 2000°$ С), простирающееся в глубину на 2000 *км* $= 2 \cdot 10^8$ *см*.

В центре земного ядра расположено внутреннее ядро радиусом 1300 *км* $= 1{,}3 \cdot 10^8$ *см*. Оно имеет температуру около 2500° и находится под давлением $3{,}5 \cdot 10^6$ *атм* $= 3{,}5 \cdot 10^6 \cdot 9{,}80 \cdot 665 \cdot 10^4 = 3{,}4 \cdot 10^{11}$ *н* $\cdot$ *м*$^{-2}$.

При таких температурах и давлениях многие в обычных условиях твердые, упругие вещества становятся пластичными.

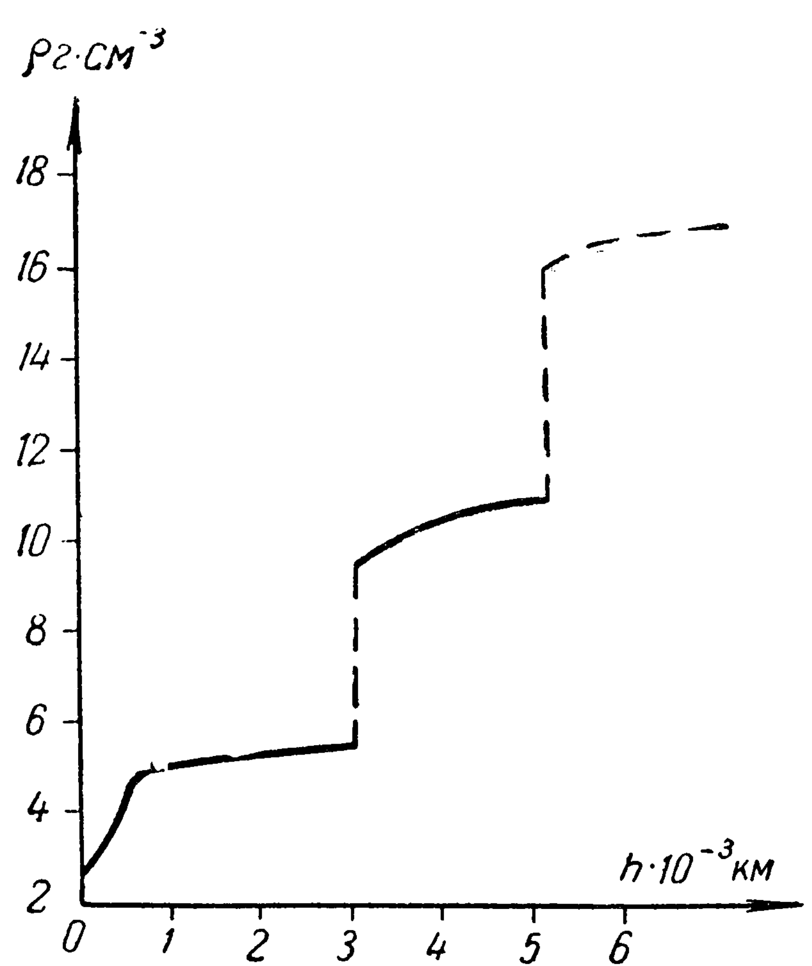


Рис. 69-1. Распределение плотности земного вещества по глубине

Земля вращается вокруг своей оси неравномерно. Угловая скорость ее вращения постепенно уменьшается. Кроме того, имеются изменения угловой скорости, связанные с перемещением масс земного вещества в ее недрах. За тысячу лет время одного оборота Земли возросло на один час. Окружная скорость экваториальной точки составляет 465 *м/сек*.

Магнитное поле Земли во внешнем пространстве может быть представлено как поле диполя, расположенного в ее центре и обладающего магнитным моментом $8{,}1 \cdot 10^{25}$ *гс* $\cdot$ *см*^{3} $= 8{,}1 \cdot 10^{15}$ *тл* $\cdot$ *м*^{3}. Ось магнитного диполя в точках пересечения с земной поверхностью образует геомагнитные полюса (географические координаты южного магнитного полюса 78°,5 с. ш. и 69°,0 з. д.). Таким образом, плоскость геомагнитного экватора образует с плоскостью географического экватора угол 11°,5. Магнитное поле Земли практически простирается в космосе на расстояние в несколько земных радиусов. В связи с активностью солнечной радиации претерпевает изменение и магнитное поле Земли.

Земная ось вращения также не сохраняет своего направления в теле Земли. Мгновенные положения земных полюсов имеют искаженно-периодические отклонения от среднего положения, достигающие 10 *м*.

Среднее расстояние Солнце — Земля составляет $149{,}5 \cdot 10^6$ *км* = $= 149{,}5 \cdot 10^{11}$ *см* $= 400\ R_з$, расстояние Земля — Луна — $384{,}4 \times 10^3$ *км* $= 60{,}3\ R_з$. Средняя скорость орбитального движения Земли равна 29,77 *км/сек* $= 3 \cdot 10^5$ *см* · *сек*$^{-1}$ $= 3 \cdot 10^3$ *м* · *сек*$^{-1}$.

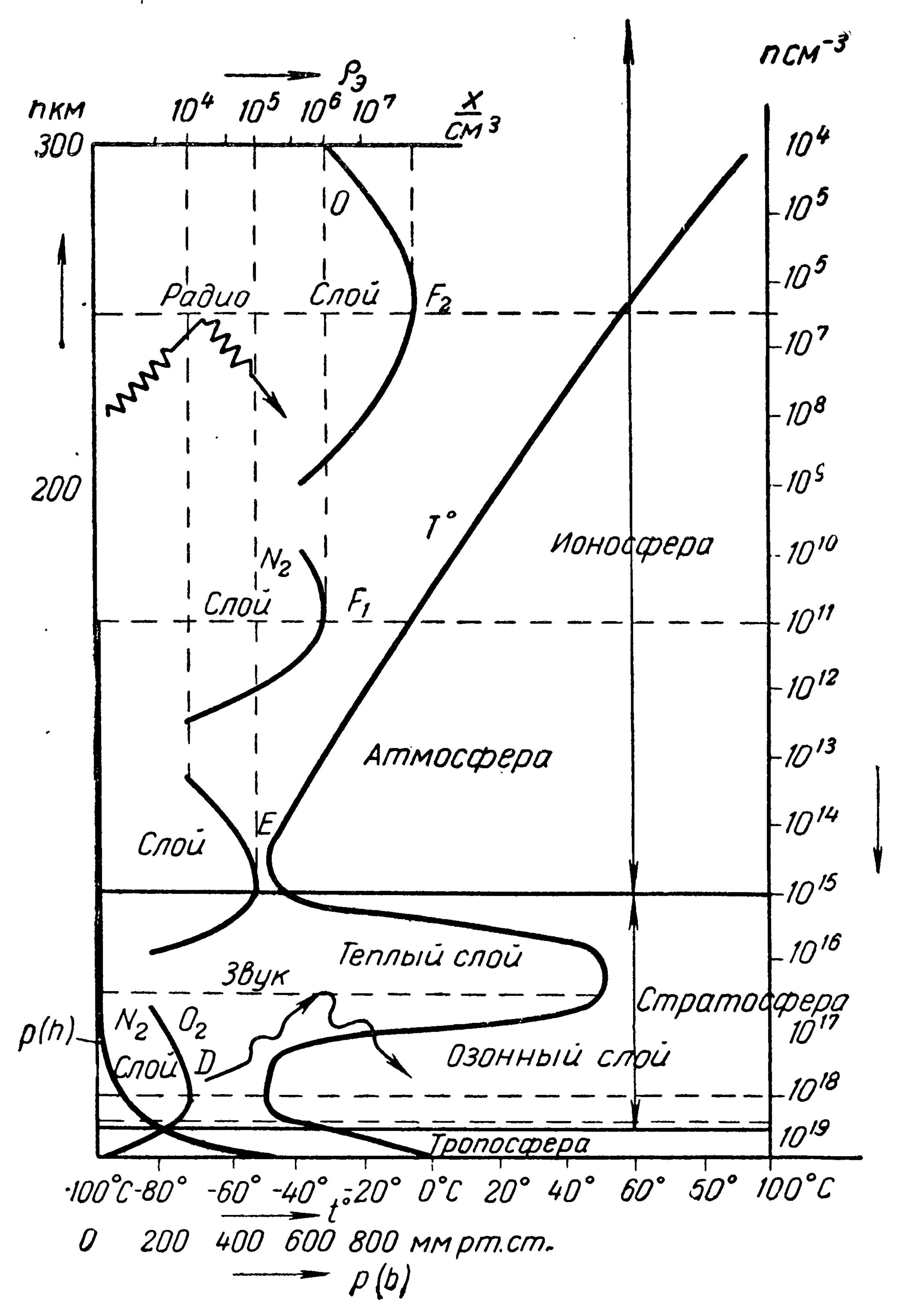


Рис. 69-2. Распределение температуры, давления, ионизации и отражения электромагнитных (радио) и звуковых волн на границах атмосферных слоев

Земной сфероид окружен газовой оболочкой, или атмосферой, состоящей из смеси газов и простирающейся над поверхностью Земли на высоту порядка 1000 *км* (рис. 69-2).

Нижний 10—17-километровый слой атмосферы, в котором наблюдается понижение температуры с высотой до $t = -50°$ С и пони-

жение давления до 200 *мм рт. ст.*, называется тропосферой. В тропосфере происходит основное движение воздушных масс и формируются метеорологические условия, определяющие погоду. Именно к этому слою относится обычно указываемый состав воздуха (табл. 34).

Таблица 34

Состав атмосферного воздуха в процентах по объему

N_2	78	Xe	$8 \cdot 10^{-6}$
O_2	21	Rn	$6 \cdot 10^{-18}$
Ar	$9{,}3 \cdot 10^{-1}$	CO_2	$3 \cdot 10^{-2}$
Ne	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	H_2	$5 \cdot 10^{-5}$
He	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$	O_3	$3 \cdot 10^{-6}$
Kr	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	H_2O	от 0 до 4

После узкого слоя относительно покоящихся воздушных масс, называемого тропопаузой, расположена 70-километровая область — стратосфера. В стратосфере также различают слои по признаку не только температуры, но и состава газовой смеси.

Интервал высоты 10÷20 *км* носит название изотермического слоя, поскольку в нем наблюдается постоянство температуры газа. За ним следует 30-километровый слой озонированного (O_3) солнечным излучением газа. Молекулы кислорода и озона сильно поглощают ультрафиолетовое излучение с длинами волн в интервале от 0,15 *мк* (1500 Å) до 0,25 *мк* (2500 Å), чем и объясняется повышение температуры газа в этом слое атмосферы (см. рис. 69-2) до + 50° С. При пересчете на нормальное давление газа этот слой имел бы толщину 0,2 ÷ 0,5 *см*.

В верхнем слое стратосферы (60 ÷ 80 *км*) температура газа снова понижается (до —30, —50°) из-за вертикального перемещения теплого газа озонированного слоя и холодного газа верхних слоев, прозрачных для солнечного излучения.

В интервале высоты от 60 ÷ 80 до 600 ÷ 800 *км* располагается обширная область ионизированного разреженного газа — ионосфера. В табл. 35 иллюстрируется ход изменения давления газа в атмосфере в зависимости от высоты над уровнем моря.

В разреженных слоях ионосферы протекают электрические процессы, вызывающие свечение в форме северных сияний. От слоя F_2 отражаются посылаемые с Земли ультракороткие радиоволны

$$[\nu_{\text{макс}} = (30 \div 50)\ \text{Мгц};\quad \lambda = 7{,}5\ \text{м}],$$

чем и объясняется огибание ими земной поверхности. Окно пропускания радиоволн приходится на области длин волн, близких к 10 *м* и 21 *см*.

Таблица 35

Высота в *км*	Давление газа в *мм рт. ст.*	Число молекул, находящихся в 1 $см^3$ при $T = 0°$ C	Высота в *км*	Давление газа в *мм рт. ст.*	Число молекул, находящихся в 1 $см^3$ при $T = 0°$ C
0	760	$2{,}7 \cdot 10^{19}$	200	$1{,}1 \cdot 10^{-8}$	$3{,}7 \cdot 10^{8}$
20	62	$2{,}2 \cdot 10^{18}$	250	$2{,}0 \cdot 10^{-11}$	$7{,}1 \cdot 10^{5}$
50	1,5	$5{,}4 \cdot 10^{16}$	300	$3{,}9 \cdot 10^{-14}$	$1{,}4 \cdot 10^{3}$
80	$3{,}4 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2 \cdot 10^{15}$	400	—	3,0
100	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^{14}$	600	—	3,0
150	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$	$1{,}9 \cdot 10^{11}$	1000	—	1,0

Основным ионизирующим агентом в верхних слоях атмосферы от 80 до 600 *км* служит солнечная радиация и прежде всего коротковолновая часть ультрафиолетовой области сплошного спектра температурного излучения Солнца с длинами волн $\lambda < 1000$ Å. Эта спектральная область по интенсивности составляет примерно 10^{-7} от интегральной интенсивности всего спектра. Некоторая доля ионизации обусловлена также действием корпускулярного излучения Солнца (не свыше 50% от ультрафиолетовой), звездной радиацией и первичным космическим излучением. Роль различных постоянно действующих ионизирующих факторов в верхних слоях атмосферы указывается в табл. 36.

Таблица 36

Ионизирующий фактор	Высота в *км*	Число пар ионов, образуемых в единицу времени в единице объема, в $см^{-3}$ $сек^{-1}$
Ультрафиолетовое излучение Солнца	250	800
То же	100	250
Корпускулярное излучение Солнца	250	100
Звездная радиация	250	1
Первичное космическое излучение	100	10^{-5}

Слабое ионизационное действие первичного космического излучения в верхних слоях объясняется не малым значением интенсивности этого излучения, а его ничтожным поглощением в сильно разреженных слоях атмосферы. По мере проникновения ионизирующих излучений в толщу земной атмосферы с ее возрастающей плотностью (табл. 35) протекают параллельно два процесса: осла-

бление интенсивности первичного излучения, вследствие преобразования в другую форму его энергии при взаимодействии с веществом атмосферы (в энергию фотоэлектронов) и возникновение радиации от элементов вещества (ядер атомов и молекул) самой атмосферы (вторичное излучение). При совокупном действии обоих факторов объемная плотность ионизации газовой атмосферы Земли будет изменяться соответственно переходному ионизационному режиму с максимумом ионизации на некоторой высоте h, которая зависит от качества первичного излучения и рода поглощающей среды и имеет значение:

$$h = \frac{kT}{mg} \ln \tau \frac{kT}{mg}, \qquad (69,1)$$

где τ — линейный коэффициент поглощения ионизирующего излучения, а m — усредненная масса молекул газа в поглощающем слое. Так как реальная атмосфера в верхних слоях неоднородна по составу (перемешивание происходит только до высоты 100 *км*), а действующие излучения различны по составу, то максимумы объемной плотности ионизации приходятся на разной высоте, и таким образом, в верхних слоях атмосферы создаются ионизированные слои D, E, F_1 и F_2 (см. рис. 69-2).

Чем сильнее проникающие свойства излучения, тем на большую глубину поглощающей среды приходится максимум ионизации от совокупного действия первичной и вторичной радиации.

Для излучений, поступающих на земную поверхность извне, это означает, что ближе всего к поверхности земной коры будет находиться максимум от совокупности проникающего первичного космического излучения и создаваемых им в атмосфере вторичных проникающих излучений.

Лекция 70

КОСМИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

В настоящее время на основании астрономических данных, а также на основании измерений, проведенных с помощью спутников, ракет и космических кораблей, можно заключить, что источниками космического излучения служат расширяющиеся оболочки новых и сверхновых звезд нашей Галактики.

Основная часть принимаемого на Земле непрерывного частотного спектра космического радиоизлучения имеет магнитнотормозную природу, т. е. представляет собой электромагнитное излучение, испускаемое ультрарелятивистскими электронами с энергиями $E > m_0c^2$, движущимися по сложным винтовым путям в межзвездных магнитных полях.

В нашей Галактике расположен ряд дискретных источников космического радиоизлучения. Невидимые оболочки сверхновых звезд при наблюдениях с Земли представляются радиотуманностями.

Плотность источников космического излучения в Галактике убывает от центра к периферии.

Проникая в межзвездное пространство из расширяющихся новых звезд, которые сосредоточены вблизи плоскости Галактики, космические частицы заполняют квазисферическую Галактику радиуса $R \approx 5 \cdot 10^{22}$ *см*, где и теряют свою энергию в результате ядерных превращений.

Объемная плотность энергии космического излучения имеет тот же порядок, что и другие виды энергий, такие, как звездная световая энергия, энергия турбулентного движения межзвездной среды и энергия магнитных полей, а именно, примерно 1 *эв* на 1 *см*^{3}.

Таким образом, полная энергия космических лучей в Галактике составляет, примерно,

$$W_{\text{косм}} = 10^{67} \div 10^{68}\ эв \approx 10^{55} \div 10^{56}\ эрг = 10^{48} \div 10^{49}\ дж.$$

На долю космических электронов с кинетической энергией $E > 10^8$ *эв* приходится примерно 1% полной энергии, в то время как 99% этой энергии падает на протоны и другие ядра, выбрасываемые при взрывах (вспышках) сверхновых звезд. Замкнутое магнитное поле Галактики ($H \approx 10^{-5}$ *э* $\approx 8 \cdot 10^{-4}$ *ав/м*), вообще говоря, достаточно для удержания космических частиц самых больших энергий (вплоть до 10^{18} *эв*) в пределах галактической короны радиуса $R = (3 \div 5) \cdot 10^{22}$ *см*.

Сверхновые звезды вспыхивают в среднем один раз в 30 лет $\approx$ $\approx 10^9$ *сек*, так что их мощность в отношении генерирования космического излучения составляет примерно $P_{\text{косм}} = 10^{46}$ *эрг/сек*.

Концентрация вещества в межзвездном пространстве $n \approx 10$ *см*$^{-3}$ вблизи галактической плоскости; $n = 0{,}1$ *см*$^{-3}$ между облаками газа; $n = 0{,}01$ *см*$^{-3}$ на периферии галактической короны.

Взаимодействия ядер в межзвездной среде определяют время и длину пробега космических частиц (табл. 37).

Таблица 37

Ядра	Длина свободного пробега		Время пробега $t \cdot 10^{-7}$ лет при $n = 0{,}1$ *см*$^{-3}$
	г/см^2	$R \cdot 10^{-25}$ *см*	
Протоны	67	40	42
Альфа-частицы	12,5	7,5	8
L-ядра ($A = 8$)	7,5	4,5	4,8
M-ядра ($A = 14$)	5,0	3	3,2
N-ядра ($A = 30$)	3,0	1,8	1,9
Железо ($A = 56$)	1,9	1,2	1,2

Таким образом, исходное космическое излучение отличается по составу от того первичного космического излучения, которое достигает земной атмосферы.

Космические протоны и ядра ежесекундно преобразуют в Галактике энергию порядка $W_a = 10^{46} \cdot 10^{-16} = 10^{30}$ *эрг*. Космические электроны, движущиеся в межзвездной среде, растрачивают свою энергию на ионизационные, радиационные и магнитно-тормозные эффекты (табл. 38).

Таблица 38

Энергия электрона в *эв*	Преобразование энергии (в *эв/сек*)		
	ионизационное при $n = 0{,}1$ *см*$^{-3}$	радиационное при $n = 0{,}1$ *см*$^{-3}$	магнитно-тормозное при $H_{\perp} = 10^{-5}$ *э*
10^8	$2{,}7 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-8}$
10^9	$3{,}3 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-7}$
10^{10}	$3{,}8 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-5}$

В результате отклонения заряженных частиц магнитным полем Галактики и преобразования энергии путем радиоизлучения электроны в первичном космическом излучении отсутствуют.

Относительное содержание различных ядер с энергиями $E = 10^{10}$ *эв* в первичном космическом излучении приведено в табл. 39.

Таблица 39

Ядра	Относительное содержание (в %) ядер с $E = 10^{10}$ *эв*			
	10^5 протонов	от всего числа первичных частиц	от числа первичных нуклонов	в природе на 10^5 атомов водорода
Протоны (p) ($Z = 1$)	100	91,5	69	100
Альфа-частицы ($Z = 2$)	10	7,8	23	7,7
Группа L	0,1	0,1	0,2	$< 10^{-7}$
Группа M ($6 \leqslant Z \leqslant 9$)	0,5	0,4	4,5	0,1
Группа H ($Z \geqslant 10$)	0,1	0,15	1,5	0,03
Железо ($Z = 26$)	0,02	—	—	10^3
Ядра с $Z > 30$	10^{-3}	$< 10^{-3}$	—	10^{-6}

Плотность потока первичного космического излучения составляет 0,18 частиц $\cdot$ *см*$^{-2}$ $\cdot$ *сек*$^{-1}$ *стер*$^{-1}$. Она сохраняется неизменной для всех направлений в межзвездном пространстве.

Энергетический спектр первичных протонов и ядер космического излучения, выясненный с помощью телескопических счетно-фикса-

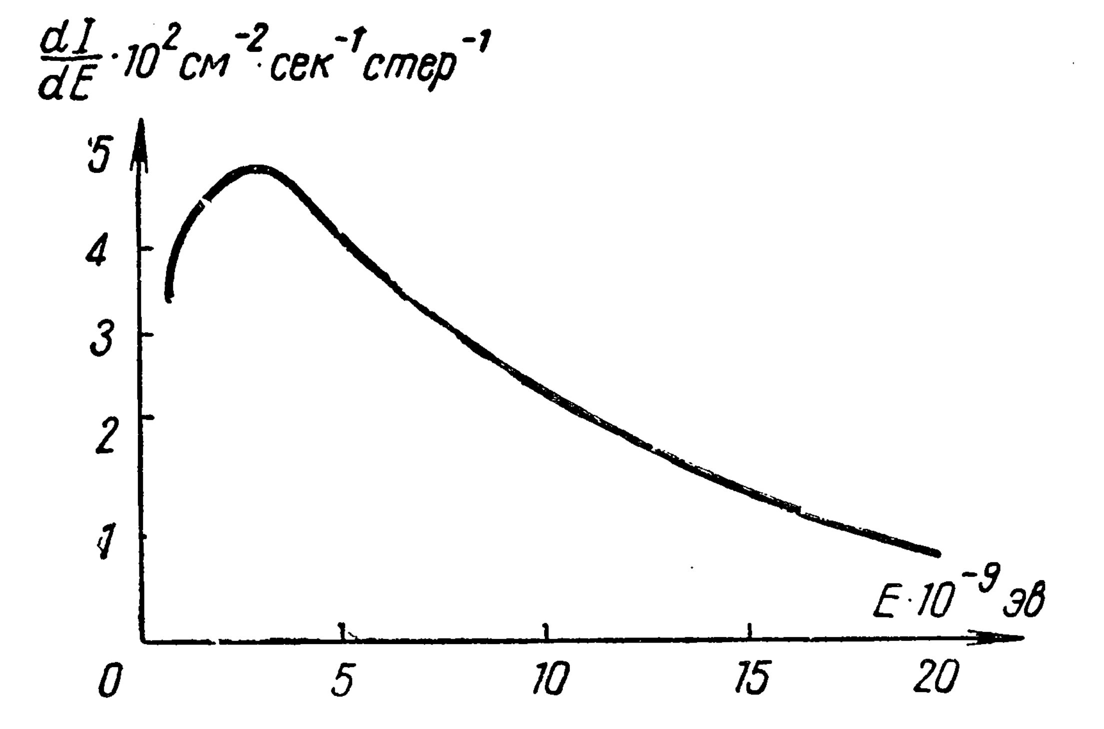


Рис. 70-1. Распределение интенсивности первичного космического излучения (70,1) в энергетическом спектре частиц для широт свыше 52°

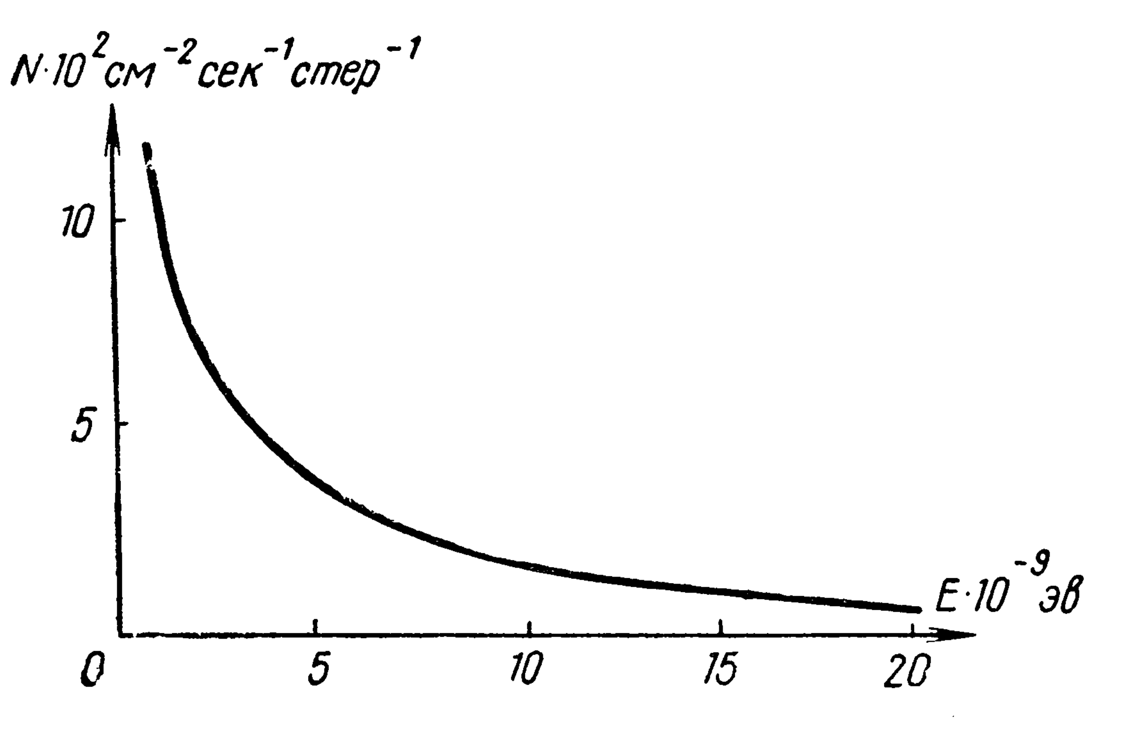


Рис. 70-2. Интегральная зависимость числа частиц первичного космического излучения, энергия которых превышает E

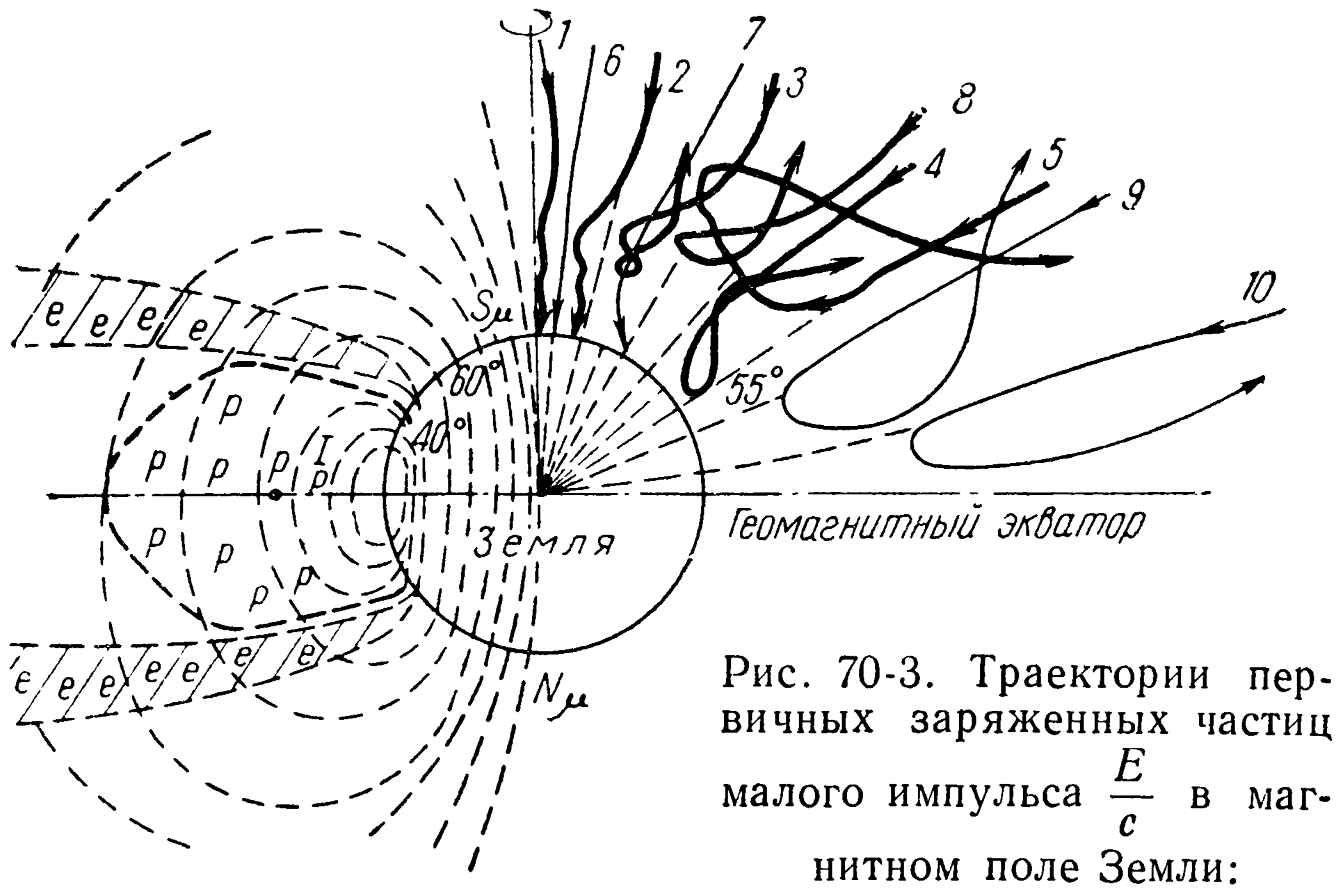


Рис. 70-3. Траектории первичных заряженных частиц малого импульса $\frac{E}{c}$ в магнитном поле Земли:

1—5 — электроны, испускаемые Солнцем; *6—10* — первичные космические протоны (пороговая широта 55°; $E_0 \approx 3 \cdot 10^9$ *эв*); *OO* — область внешнего электронного пояса, *pp* — область внутреннего протонного пояса; I_p — протонный ток (направлен перпендикулярно к плоскости чертежа)

ционных устройств, хорошо согласуется с эмпирическим соотношением вида

$$Y(E) = \frac{dI}{dE} = EN(E) = \frac{0{,}048\,E^{1/3}}{(1 + 0{,}09 \cdot E^{4/3})^{3/2}} \quad (\textit{см}^{-2}\ \textit{сек}^{-1}\ \textit{стер}^{-1}), \qquad (70{,}1)$$

где E — кинетическая энергия частицы в *Бэв*, (рис. 70-1), или

$$\frac{dN}{dE} = N(E) = \frac{0{,}048}{E^{2/3}(1 + 0{,}09\,E^{4/3})^{3/2}} \quad (\textit{см}^{-2} \cdot \textit{сек}^{-1} \cdot \textit{стер}^{-1} \cdot \textit{Бэв}^{-1}),$$

поэтому число частиц, энергия которых превышает E, (рис. 70-2) составит

$$N_E = \int\limits_E^{\infty} dN = \int\limits_E^{\infty} \frac{0{,}048 dE}{E^{2/3}(1 + 0{,}09\,E^{4/3})^{3/2}}. \qquad (70{,}2)$$

Можно отметить, что максимум функции распределения интенсивности в спектре (см. рис. 70-1) приходится на энергию частиц E порядка $(2 \div 3) \cdot 10^9$ *эв* и что не должно было бы наблюдаться обрезания энергетического спектра первичных частиц со стороны малых энергий (см. 70,1). Однако, как показывают измерения первичного излучения на различных географических широтах и высотах, такое обрезание энергетического спектра первичных частиц наблюдается для широт $\lambda > 60°$. Причина широтного эффекта объясняется движением заряженных частиц в магнитном поле Земли (рис. 70-3), или, иначе, в поле центрального магнитного диполя, обладающего магнитным моментом $8 \cdot 10^{25}$ *гс* $\cdot$ *см*^{3}.

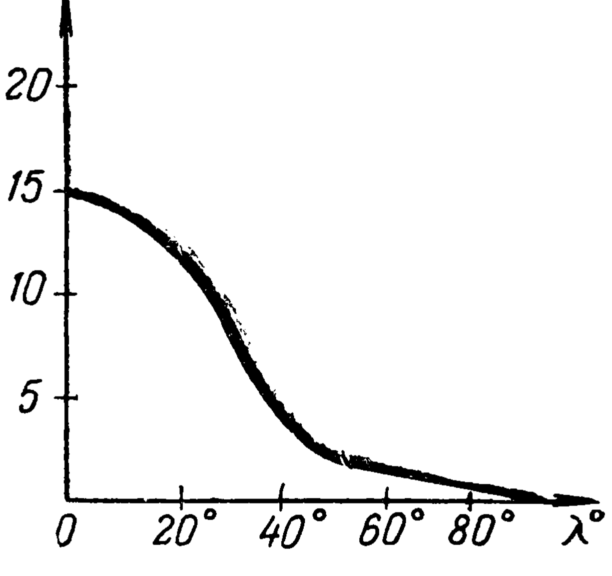
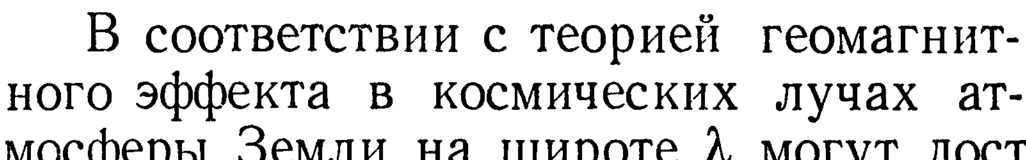


Рис. 70-4. Зависимость критических значений энергии вертикально падающих заряженных частиц от геомагнитной широты



В соответствии с теорией геомагнитного эффекта в космических лучах атмосферы Земли на широте λ могут достичь по вертикали только те частицы, импульс которых превышает

$$p = 14{,}9 \cos^4 \lambda \left(\frac{\textit{Бэв}}{c}\right). \qquad (70{,}3)$$

На рис. 70-4 показана зависимость критической энергии E вертикально движущейся частицы от геомагнитной широты места наблюдения. Ионизационные измерения, выполненные на различных высотах (рис. 70-5), оказались в хорошем согласии с зависимостью (70,3). Они показывают, что первичное излучение представляет собой заряженные частицы. На экваторе критический импульс заряженной частицы по направлению к зениту составляет $\frac{1}{c}(14{,}9 \times 10^9)$ *эв*, а при направлении под зенитным углом $\pi/8$ на север или

юг по $\frac{1}{c}$ $(15{,}5 \cdot 10^9)$ *эв*. Между тем в направлении на запад критический импульс примерно равен $\frac{1}{c}$ $(12{,}5 \cdot 10^9)$ *эв* по сравнению с $\frac{1}{c}$ $(18 \cdot 10^9)$ *эв* в направлении на восток.

Такая восточно-западная асимметрия показывает, что первичные космические заряженные частицы, отклоняемые магнитным земным полем вдали от земной атмосферы, представляют собой положительно заряженные частицы (в основном протоны) с энергиями $E > E_{крит}$ для $\lambda = 50°$, т. е. с $E > E_{50°} = 3 \cdot 10^9$ *эв*.

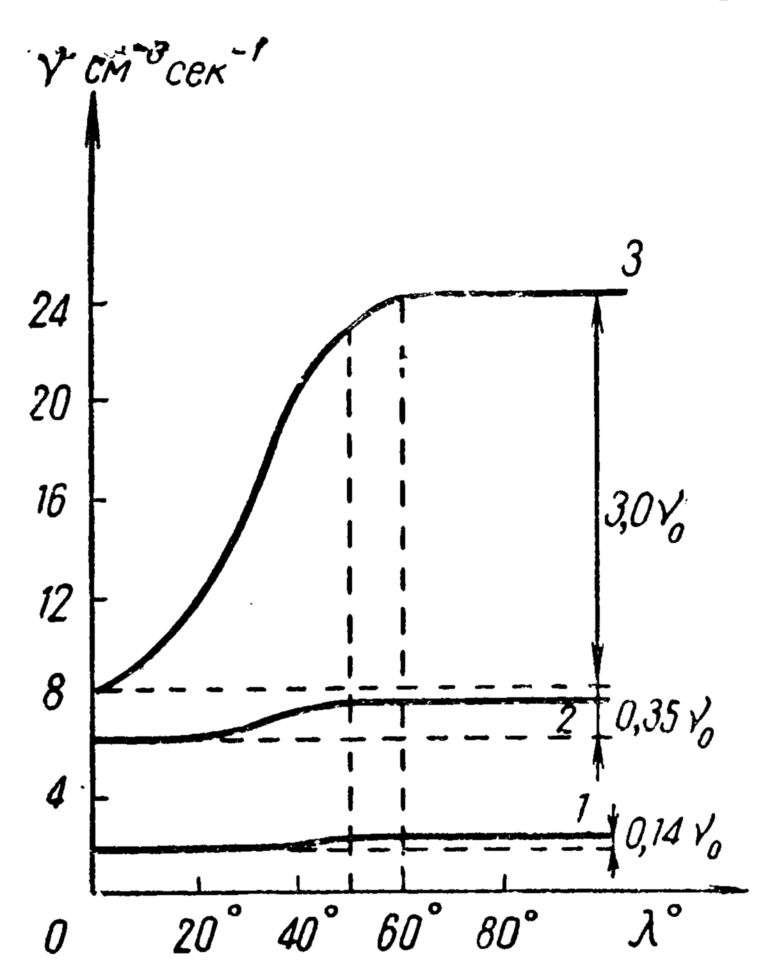


Рис. 70-5. Зависимость ионизации, вызываемой первичным космическим излучением, от широты местности λ для трех различных высот: *1)* $h = 0$; *2)* $h = 4350$ *м*; *3)* $h = 18000$ *м* (ν_0 — ионизация на уровне моря вблизи магнитного полюса)

Частицы с $E < 3 \cdot 10^9$ *эв* вовсе не достигают атмосферы, поскольку в интервале широт $60° \div 90°$ ионизация, вызываемая первичным космическим излучением, перестает возрастать, в то время как критическая энергия, согласно (70,3), убывает (рис. 70-4). Если бы частицы с $E < 3 \cdot 10^9$ *эв* достигали атмосферы, должно было бы наблюдаться монотонное возрастание ионизации вплоть до $\lambda = 90°$. Таким образом, космическое радиоизлучение, геомагнитный эффект и восточно-западная асимметрия показывают, что смешанное космическое излучение, возникающее внутри Галактики при вспышках сверхновых и новых звезд, состоящее из различных частиц и квантов энергии, после проникновения сквозь межзвездные магнитные поля достигает земной атмосферы в виде потока положительно заряженных частиц (табл. 38) высокой энергии $E > 3 \cdot 10^9$ *эв*. Магнитное поле Земли играет при этом роль магнитного селектора, пропускающего к геомагнитному экватору только частицы с энергией $E > 14{,}9 \cdot 10^9$ *эв*.

Следует отметить, что солнечная активность и связанное с этим изменение его магнитного поля влияют на рассматриваемый геомагнитный эффект в первичных космических лучах. При этом наблюдается появление мягкой компоненты космического излучения в высоких широтах (исчезновение или смягчение обрезания) и смещение критической геомагнитной широты (до $\Delta\lambda = +3°$).

Магнитное поле системы Солнце — Земля в экваториальной геомагнитной плоскости Земли завихряет движение малоэнергетической компоненты первичного космического излучения. В результате вокруг Земли образуются два пояса, содержащие ионизирую-

щие частицы большой концентрации (см. рис. 70-3). Внешний электронный пояс ($E_e = 10^4 \div 10^5$ *эв*), имеющий серповидное сечение с осью симметрии в плоскости геомагнитного экватора Земли и поперечные размеры около 1,5 $D_з$, простирается своей средней широкой частью на расстояние $4 \cdot 10^4$ *км* $\div$ 10^5 *км* от центра Земли. Внутренние кромки этого пояса расположены на уровне геомагнитной широты $40° \div 60°$ и примерно в 100 *км* от поверхности Земли. Кроме внешнего электронного пояса, внутри него расположен протонный пояс ($E_p = 10^7 \div 10^8$ *эв*), простирающийся от 100-километровой высоты над Землей до места нахождения минимального значения напряженности совместного магнитного поля Солнца и Земли, на расстоянии $2 \cdot 10^4$ *км* $\approx 3\ R_з$ от центра Земли. Наличие этого пояса объясняет сильные электрические токи, отмечаемые на расстоянии около 10^4 *км* от центра Земли.

Солнечная активность вызывает вариации малоэнергетической компоненты космического излучения и, следовательно, состояния земных зарядных поясов. Большие вариации выражаются в увеличении наблюдаемой на поверхности Земли интенсивности космического излучения при солнечных вспышках и убывании его интенсивности при магнитных бурях.

Лекция 71

КОСМИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Первичное космическое излучение, проникая в атмосферу Земли, взаимодействует с атомами и атомными ядрами газов, образующих атмосферные слои.

На каждую частицу, проникающую из мирового пространства в атмосферу, на данной глубине ее приходится некоторое число m вторичных заряженных частиц (рис. 71-1).

Таким образом, в атмосфере должен наблюдаться типичный переходный эффект. По мере проникновения первичного излучения в атмосферу происходит возникновение вторичного излучения и все возрастающее ослабление интенсивности как первичного, так и вторичного излучения в более плотных слоях атмосферы.

В целом небольшое число частиц большой энергии первичного излучения преобразуется в большее число частиц относительно низкой энергии.

Высотный эффект, оцениваемый по ионизационным импульсным разрядам в одиночной газовой счетной трубке Гейгера (глобальная интенсивность), представляется графиком на рис. 71-2. Как видно, максимум глобальной интенсивности приходится на высоту 20 *км* от поверхности Земли (массовая глубина проникновения $\varkappa\rho = 56\ г \cdot см^{-2}$). Вдали от поверхности Земли, начиная с высоты 50 *км* (глубина проникновения $1{,}0\ г \cdot см^{-2}$), глобальная плотность

потока космического излучения практически не изменяется и соответствует плотности потока первичного излучения 0,18 *см*$^{-2}$ · *сек*$^{-1}$.

Преобразование энергии первичных протонов ($E_p = 2 \cdot 10^{19}$ *эв*) в стратосфере происходит в две фазы. Первая фаза состоит в ядерных реакциях с вылетом многих частиц (ядерный каскад), в том числе нейтронов высоких значений энергии ($E_n = 10^{10}$ *эв*) и π-мезонов (рис. 71-3). Вылетевшие протоны и нейтроны таких энергий сами могут породить новые каскады ядерных преобразований, образующих ливни частиц. $\pi^{\pm}$-мезоны, время жизни которых

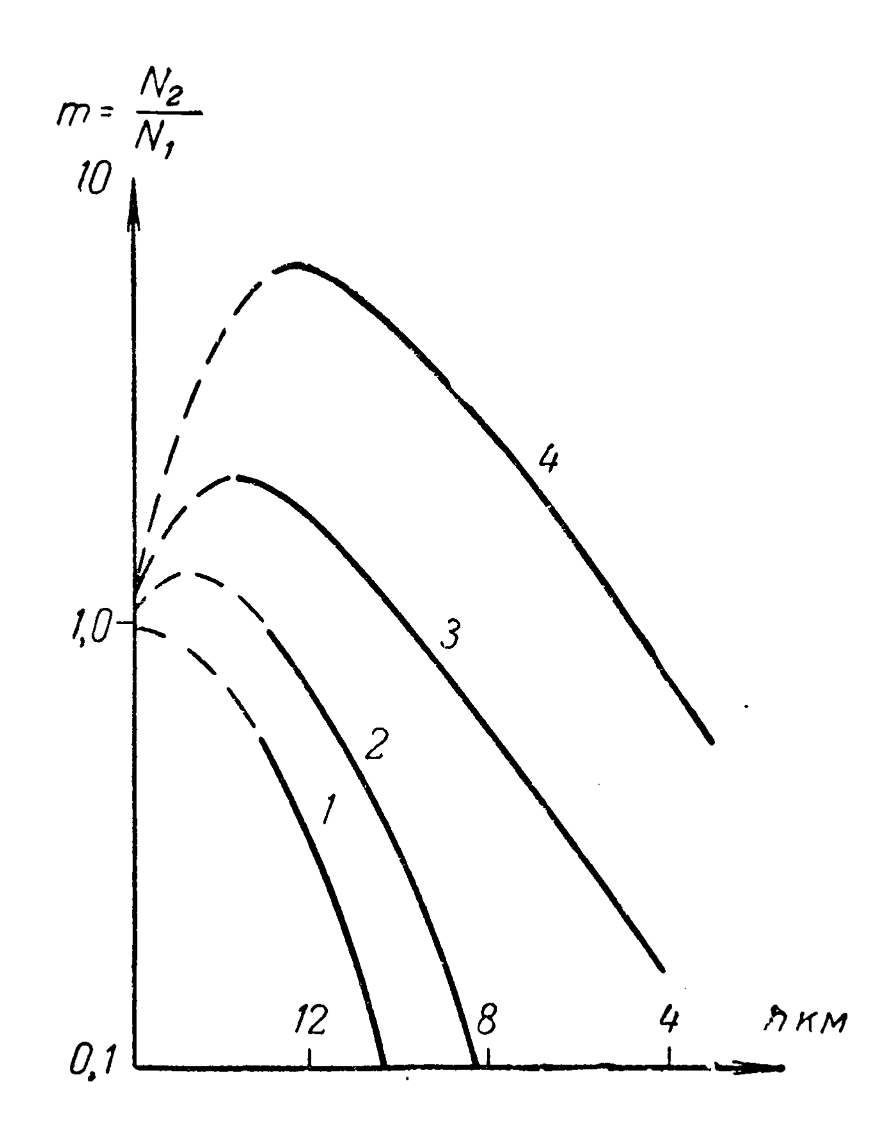


Рис. 71-1. Зависимость размножения космических частиц от глубины проникновения первичных протонов в атмосферу (*h* — высота над уровнем моря): *1* — при $E = 10^9$ *эв*; *2* — при $E = 2$ *Бэв* $= 2 \cdot 10^9$ *эв*; *3* — при 5 *Бэв* $= 5 \cdot 10^9$ *эв*; *4* — при $E = 10$ *Бэв* $= 10^{10}$ *эв*

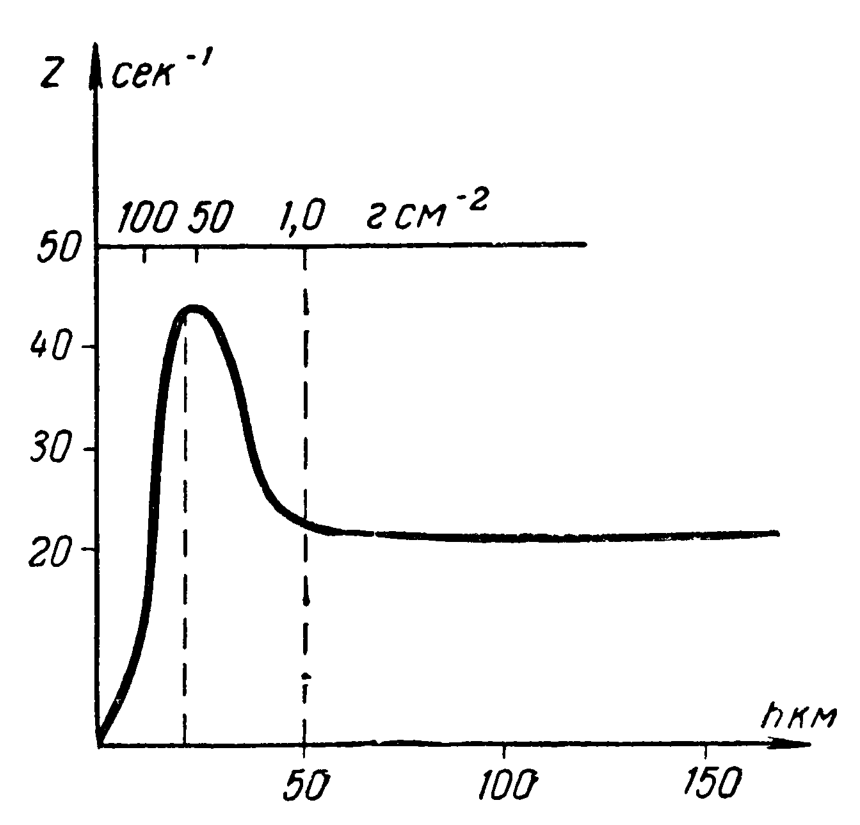


Рис. 71-2. Зависимость изменения глобальной интенсивности космического излучения от высоты над поверхностью Земли на широте 41°

(*Z* — число отсчетов единичного счетчика в 1 *сек*; *г* · *см*$^{-2}$ — размерность массовой глубины проникновения космического излучения до отметки высоты *h*)

составляет 10^{-8} *сек*, распадаются на μ-мезоны и нейтрино, а π°-мезоны (10^{-14} *сек*) — на два гамма-кванта электромагнитного излучения.

Вторую фазу преобразования создают μ-мезоны, время жизни которых составляет 10^{-6} *сек*. В результате их распада образуются электроны (или позитроны) и два антинейтрино (или нейтрино). В свою очередь, гамма-кванты большой энергии в поле атомных ядер превращаются в электронные пары. Сумма полных энергий всех образовавшихся частиц и гамма-квантов равна энергии частицы, породившей такой электронно-фотонный ливень. Оказалось, что в первичном излучении имеются частицы с энергиями до $E = 10^{18}$ *эв*.

Поток электронно-фотонного ливня частиц, направленного в сторону движения первичной ливнеобразующейся частицы, вместе с ядрами атомов, нуклонами (протонами и нейтронами), мезонами и

гиперонами проникает в нижние слои атмосферы (тропосферу) и в глубь земной коры (литосферу).

Смешанное излучение, достигающее земной коры, можно подразделить по поглощению на жесткую компоненту, состоящую, главным образом, из μ-мезонов, и мягкую компоненту, представляющую, в основном, потоки электронов и гамма-квантов. Соотношение между интенсивностями жесткой и мягкой компонент изменяется с высотой над поверхностью Земли (рис. 71-4).

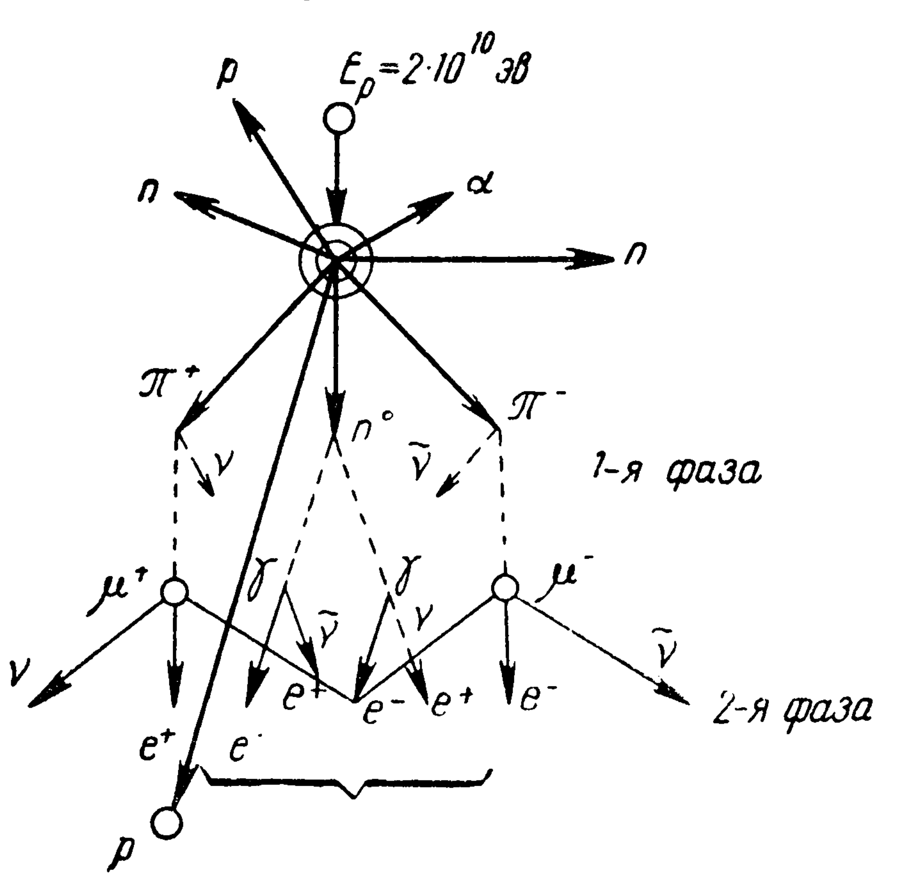


Рис. 71-3. Схема образования электронно-ядерного ливня от космического протона ($E_p = 2 \cdot 10^{10}$ *эв*); 1-я фаза — ядерные преобразования в стратосфере; 2-я фаза — электронно-фотонные преобразования в нижних слоях атмосферы

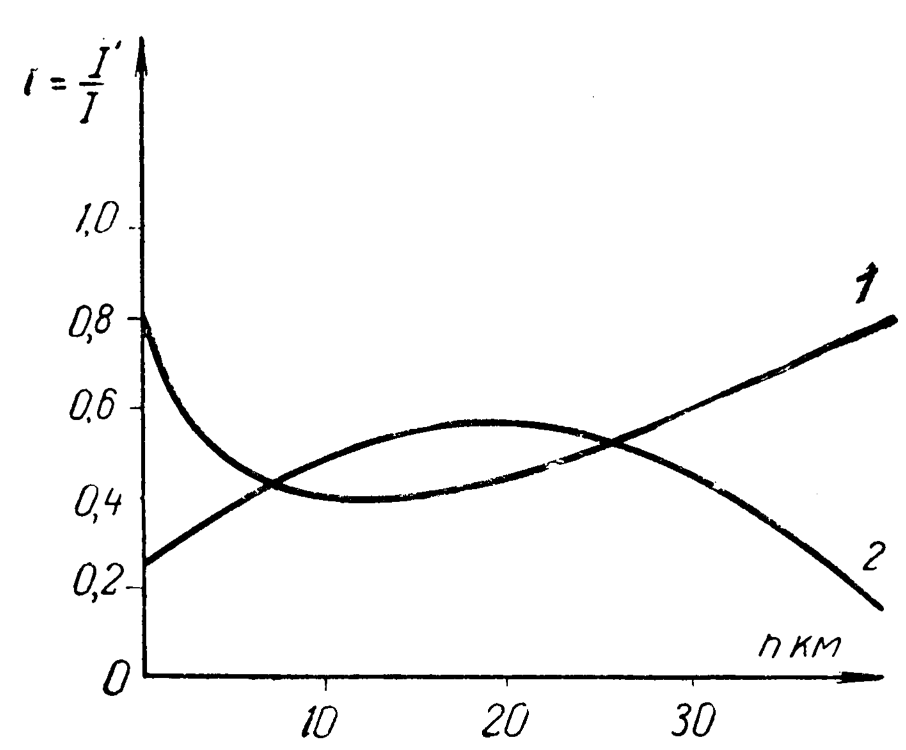


Рис. 71-4. Зависимость относительной интенсивности i жесткой (*1*) и мягкой (*2*) компонент космического излучения от высоты над поверхностью Земли

В нижних слоях атмосферы происходит 3-я фаза преобразования порожденных частиц. Мезоны производят ионизацию газа, проникают в глубь земной коры и спонтанно распадаются. Электроны ионизируют газ, испускают тормозное излучение и вызывают характеристическое излучение атомов вещества. Гамма-кванты преобразуют свою энергию через ядерный фотоэффект, через образование электронных пар, Комптон-эффект и фотоэффект. Ядра и протоны вызывают ядерные реакции, сопровождаемые образованием возбужденных нуклонов, или гиперонов.

Изучение космического излучения и его преобразований в веществе представляет первостепенный интерес для выяснения природы ядерных сил и свойств элементарных частиц, а также для развития физики межпланетного и межзвездного пространства и выяснения роли космического излучения в биопроцессах. Не менее существенное значение в физике имеет изучение вторичных явлений в космическом радиационном поле для установления природы и свойств нейтрино.

Электрические величины, их единицы и соотношения между ними

$$1\ \textit{дин} = 10^{-5}\ \textit{н};$$

$$1\ \textit{эв} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \textit{эрг} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \textit{дж};$$

$$1\ \textit{г} = 9 \cdot 10^{20}\ \textit{эрг} \approx 5{,}6 \cdot 10^{32}\ \textit{эв};$$

$$m_e = 9 \cdot 10^{-28}\ \textit{г} \approx 0{,}506\ \textit{Мэв};$$

$$m_p = 931\ \textit{Мэв}.$$

Основные формулы	Абсолютная электростатическая система единиц (а. э. с. е.)	Международная система единиц (СИ)
	$[\varepsilon] = L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 \cdot \varepsilon^0$ $\varepsilon_c = \varepsilon_0 \varepsilon$ $\varepsilon_0 = 1$ В системе Гаусса $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1$	$[\varepsilon_0] = L^{-3} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2$ $\varepsilon_c = \varepsilon_0 \varepsilon$ $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{9} \times 10^{-9} \frac{a^2\ \textit{сек}^2}{\textit{н} \cdot \textit{м}^2}$
$f = k_э \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$f = \frac{1}{\varepsilon_c} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (*дин*) (q) 1 а. э. е. $= \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ *к*; 1 *к* = 1 *а* · *сек*	$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (*н*)
$E = \frac{f}{q} = -\frac{d\varphi}{dr}$	$E = \frac{f}{q} \left(\frac{\textit{дин}}{\text{а. э. е.}}\right)$ (E) 1 а. э. е. $= 3 \cdot 10^4\ \frac{\textit{н}}{\textit{к}}$; $1\ \frac{\textit{н}}{\textit{к}} = 1\ \frac{\textit{в}}{\textit{м}}$	$E = \frac{f}{q} \left(\frac{\textit{н}}{\textit{к}}\right)$
$D = \varepsilon E$	$D = \varepsilon_c E$ (а. э. е) (D) 1 а. э. е. $= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}\ \frac{\textit{к}}{\textit{м}^2}$; $1\ \frac{\textit{к}}{\textit{м}^2} = 1\ \frac{a \cdot \textit{сек}}{\textit{м}^2}$	$D = \varepsilon_0 \varepsilon E \left(\frac{\textit{к}}{\textit{м}^2}\right)$
$N_0 = \Phi_э = \oint_S D_n dS$	$N_0 = \oint_S D_n dS = 4\pi \sum q_i$ (а. э. е) (N) 1 а. э. е. $= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ *к*; 1 *к* = 1 *а* · *сек*	$N_0 = \oint_S D_n dS = \sum q_i$ (*к*)

Основные формулы	Абсолютная электростатическая система единиц (а. э. с. е.)	Международная система единиц (СИ)
$\varphi = \frac{W_п}{q} = \int_r^\infty E dr$	$\varphi_r = \frac{q}{\varepsilon_c r}$ (а. э. е.)	$\varphi_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r}$ (*в*)
	(E, U, φ) 1 а. э. е. $= 3 \cdot 10^2$ *в*; 1*в* $= 1 \frac{н \cdot м}{а \cdot сек}$	
$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi\rho_э}{\varepsilon_c}$	$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi\rho_э}{\varepsilon_c}$ (а. э. е)	$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_э}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{в}{м^2}\right)$
	$(\nabla^2\varphi)$ 1 а. э. е. $= 3 \cdot 10^6 \frac{в}{м^2}$; $1 \frac{в}{м^2} = 1 \frac{н}{м \cdot а \cdot сек}$	
$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$	$C = \frac{\varepsilon_c \cdot S}{4\pi d}$ (*см*)	$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$ (*ф*)
	(C) 1 *см* $= \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ *ф*	
$E = k\frac{\sigma_э}{\varepsilon_c}$	$E = \frac{4\pi\sigma_э}{\varepsilon_c}$	$E = \frac{\sigma_э}{\varepsilon_0\varepsilon}$
	$(\sigma_э)$ 1 а. э. е. $= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \frac{к}{м^2}$	
$\varepsilon_c = 1 + k\varkappa_c$	$\varepsilon_c = 1 + 4\pi\varkappa_c$	$\varepsilon = 1 + \varkappa$
	$\varkappa_c = \varepsilon_0\varkappa$	
$P_э = \varkappa_c E$	$P_э = \varkappa_c E$	$P_э = \varepsilon_0\varkappa E$
$W_э = \frac{1}{2} CU^2$	$W_э = \frac{1}{2} CU^2$ (*эрг*)	$W_э = \frac{1}{2} CU^2$ (*дж*)
	(W) 1 *эрг* $= 10^{-7}$ *дж*	

Основные формулы	Абсолютная электростатическая система единиц (а. э. с. е.)	Международная система единиц (СИ)
$w_э = \frac{dW_э}{dV} = k\varepsilon E^2$	$w_э = \frac{1}{8\pi} \cdot \varepsilon_c E^2$	$w_э = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2$
	$(w)\ 1\ \frac{эрг}{см^3} = 10^{-1}\ \frac{дж}{м^3}$	
$R_э = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}$	$\sigma = \frac{1}{R_э} \cdot \frac{l}{S}$ (а. э. е.)	$\sigma = \frac{1}{R} \cdot \frac{l}{S} \left(\frac{а}{в \cdot м}\right)$
	(σ) 1 а. э. е. $= \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}\ \frac{а}{в \cdot м}$; $1\ \frac{а}{в \cdot м} = 1\ ом^{-1}\ м^{-1}$	
	(R) 1 а. э. е. $= 9 \cdot 10^{11}\ ом$	
$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\Sigma \mathscr{E}_i + \Sigma U_к}{\Sigma R_э}$	$I = \frac{U}{R}$ (а. э. е.)	$I = \frac{U}{R} \left(\frac{в}{ом}\right)$
	(I) 1 а. э. е. $= \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}\ \frac{в}{ом}$; $1\ \frac{в}{ом} = 1\ а$	
$P = IU$	$P = IU \left(\frac{эрг}{сек}\right)$	$P = IU \left(\frac{дж}{сек}\right)$
	$(P)\ 1\ \frac{эрг}{сек} = 10^{-7}\ \frac{дж}{сек}$; $1\ \frac{дж}{сек} = 1\ вт$	

Электромагнитные величины, их единицы и соотношения между ними

$$1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ н};$$

$$c = 2{,}99776 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} = 2{,}99776 \cdot 10^{8} \text{ м/сек} \approx 3 \cdot 10^{8} \text{ м/сек};$$

$$1 \text{ а. э. е. } (q) = \frac{1}{c} \text{ а. э. м. е. } (q)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}}\right] = \text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$$

Основные формулы	Абсолютная электромагнитная система единиц (а. э. м. с. е.)	Международная система единиц (СИ)
	$[\mu] = L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 \mu^0$ $\mu_c = \mu_0 \mu$ $\mu_0 = 1$ В системе Гаусса $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = 1$	$[\mu] = LMT^{-2}I^2$ $\mu_c = \mu_0 \mu$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{н}}{\text{а}^2}$ $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}} = c$
$H = k\left[\frac{v}{c} \times D\right]$	$H_r = \frac{ev}{r^2} \sin(\widehat{v, r})$ (э)	$H_r = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{ev}{r^2} \times$ $\times \sin(\widehat{v, r}) \left(\frac{\text{а}}{\text{м}}\right)$
	$(H)\ 1\ \text{э} = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3 \frac{\text{а}}{\text{м}} \left(\text{или } \frac{\text{ав}}{\text{м}}\right)$	
$B = \mu H$	$B = \mu_c H$ (гс)	$B = \mu_0 \mu H \left(\frac{\text{н}}{\text{а} \cdot \text{м}}\right)$
	$(B)\ 1\ \text{гс} = 10^{-4}\ \text{тл};\ 1\ \text{тл} = 1 \frac{\text{н}}{\text{а} \cdot \text{м}}$	
$H = kI$	$H_r = \frac{2}{r} I$ (э)	$H_r = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r} \left(\frac{\text{а}}{\text{м}}\right)$
	(I) 1 а. э. м. е. $= 10\,\text{а}$	

Основные формулы	Абсолютная электромагнитная система единиц (а. э. м. с. е.)	Международная система единиц (СИ)
$H = k\dfrac{IS}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$	$H = \dfrac{2IS}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$ (*э*)	$H = \dfrac{IS}{2\pi(R^2 + r^2)^{3/2}} \left(\dfrac{a}{м}\right)$
	(IS) 1 а. э. м. е. $= 10^{-3}$ *ам*^{2}	
$F_м = \oint\limits_l H_l\,dl = kIN = k\Phi R_м$	$F_м = \oint\limits_l H_l dl = 4\pi \sum\limits_k I_k$ (*гб*)	$F_м = \oint\limits_l H_l dl = \sum\limits_k I_k$ (*а*)
	$(F_м)$ 1 *гб* $= \dfrac{10}{4\pi}$ *а* (или *ав*)	
$R_м = k\dfrac{l_м}{\mu_c S}$	$R_м = \dfrac{l_м}{\mu_c S}$ (а. э. м. е.)	$R_м = \dfrac{l_м}{\mu_0\mu S} \left(\dfrac{ав}{вб}\right)$
	$(R_м)$ 1 а. э. м. е. $= \dfrac{1}{4\pi} \cdot 10^9 \dfrac{ав}{вб}$; $1 \dfrac{ав}{вб} = 1 \dfrac{а}{н \cdot м}$	
$\Phi = BS = k\dfrac{F_м}{R_м}$	$\Phi = \mu HS$ (*мкс*)	$\Phi = \mu_0\mu HS$ (*вб*)
	(Φ) 1 *мкс* $= 10^{-8}$ *вб*; 1 *вб* $= 1 \dfrac{н \cdot м}{а}$	
$\mathcal{E}_i = -k\dfrac{d\Phi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ (а. э. м. е.)	$\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ (*в*)
	$(\mathcal{E}_i)$ 1 а. э. м. е. $= 10^{-8}$ *в*; 1 *в* $= 1 \dfrac{н \cdot м}{а \cdot сек}$	
$w_м = \dfrac{dW_м}{dV} = k\mu_c H^2$	$w_м = \dfrac{1}{8\pi}\mu H^2 \left(\dfrac{эрг}{см^3}\right)$	$w_м = \dfrac{1}{2}\mu_0\mu H^2 \left(\dfrac{дж}{м^3}\right)$
	$(w_м)$ $1 \dfrac{эрг}{см^3} = 10^{-1} \dfrac{дж}{м^3}$	
$q = \dfrac{\Delta\Phi}{R_э}$	$q = \dfrac{\Delta\Phi}{R_э}$ (а. э. м. е.)	$q = \dfrac{\Delta\Phi}{R_э} \left(\dfrac{вб}{ом}\right)$
	(q) 1 а. э. м. е. $= 10 \dfrac{вб}{ом}$; $1 \dfrac{вб}{ом} = 1$ *к* $= 1$ *а* $\cdot$ *сек*.	

Продолжение табл.

Основные формулы	Абсолютная электромагнитная система единиц (а. э. м. с. е.)	Международная система единиц (СИ)
$L = k\frac{\Phi_s}{I}$	$L = \frac{4\pi N^2}{l_м}\mu_c S_м \Psi\left(\frac{l}{d}\right)$ (*см*)	$L = \mu_0 \mu n^2 V_м \Psi\left(\frac{l}{d}\right)$ (*гн*)
	(L) 1 *см* = 10^{-9} *гн*; 1 *гн* = $1\frac{н \cdot м}{а^2}$	
$W_м = \frac{1}{2}LI^2$	$W_м = \frac{1}{2}LI^2$ (*эрг*)	$W_м = \frac{1}{2}LI^2$ (*дж*)
	(W) 1 *эрг* = 10^{-7} *дж*	
$dF = k\frac{I_1 I_2}{r_0}\mu_c dl$	$F = \frac{2I_1 I_2}{r_0}\mu_c l$ (*дин*)	$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1 I_2}{r_0}\mu l$ (*н*)
	(F) 1 *дин* = 10^{-5} *н*	
$M_{вр} = kBIS\cos\varphi$	$M_{вр} = BIS\cos\varphi$ (*дин · см*)	$M_{вр} = BIS\cos\varphi$ (*н · м*)
	(M) 1 *дин · см* = 10^{-7} *н · м*	
$B = H + kJ$	$B = H + 4\pi J$ (*гс*)	$B = (H + J)\mu_0$ (*тл*)
$\mu_c = 1 + k\chi_c$	$\mu_c = 1 + 4\pi\chi_c$	$\mu = 1 + \chi$
	$\chi_c = \mu\chi$	
$P_м = \chi_c H$	$P_м = \chi_c H$ (а. э. м. е.)	$P_м = \mu_0 \chi H \left(\frac{н}{а \cdot м}\right)$
$g_0 = -k\frac{e}{m_e}$	$g_0 = -\frac{1}{2}\frac{e}{m_e}$ (а. э. м. е.)	$g_0 = -\frac{1}{2}\frac{e}{m_e}\left(\frac{к}{кг}\right)$
	1 а. э. м. е. = $10^4\frac{к}{кг}$	
$\omega_p = kg_0 H$	$\omega_p = \frac{e}{2m_p}H$ (*сек*$^{-1}$)	$\omega_p = \mu_0\frac{e}{2m_p}H$ (*сек*$^{-1}$)
$v = k_c c$	В системе Гаусса $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_c \mu_c}}$ (*см · сек*$^{-1}$)	$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (*м/сек*)
$S = k[E \cdot H]$	$S = \frac{c}{4\pi}[E \cdot H]\left(\frac{эрг}{см^2\,сек}\right)$	$S = [E \cdot H]\left(\frac{дж}{м^2\,сек}\right)$
	$1\frac{эрг}{см^2\,сек} = 10^{-3}\frac{дж}{м^2\,сек}$	

Физические величины	$LMT\Omega$ Единицы в системе а. э. е.	$LMT\Omega$ Единицы в системе СИ	Световые величины	$LMTI$ Единицы СИ	Акустические величины
Энергия излучения W; $E = mc^2$; $h\nu$	*эрг*	*дж*	Световая энергия $W_c = \int_0^t \Phi_c dt$	*лм · сек*	Звуковая энергия $W_з = \oint_V \omega dV$
	1 *эв* = $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ *эрг*				
Поток энергии излучений $\Phi = \frac{dW}{dt}$	$\frac{эрг}{сек}$	*вт*	Световой поток $\Phi_c = \Phi \cdot k_c$	*лм* = *св* × × *стер*	Поток звуковой энергии $\Phi_з = \frac{dW_з}{dt}$
Сила излучения $I = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$ (угловая плотность потока излучения)	$\frac{эрг}{сек \cdot стер}$	$\frac{вт}{стер}$	*Сила света* $I_c = I \cdot k_c$	*св*	Сила звука, или интенсивность звука
Интенсивность излучения $I_\varphi = \frac{\partial\Phi}{\sigma \cos\varphi \partial\Omega}$	$\frac{эрг}{сек \cdot см^2\ стер}$	$\frac{вт}{м^2\ стер}$	Яркость источника $B_\varphi = I_\varphi k_c = \frac{I_c}{\sigma \cos\varphi}$	$\frac{св}{м^2}$ = *нт*	$I_з = \frac{p^2}{2\rho v_з}$
Излучаемость источника, облученность приемника $E = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}$	$\frac{эрг}{сек \cdot см^2}$	$\frac{вт^2}{м^2}$	Светимость источника, освещенность приемника $\left.\begin{matrix}E_c\\S_c\end{matrix}\right\} = \frac{d\Phi_c}{d\sigma}$	*лк* = $\frac{лм}{м^2}$	Звучность источника $I_з = \frac{d\Phi_з}{d\sigma}$
Угловая плотность энергии излучения $R = \frac{\partial W}{\partial\Omega} = It$	$\frac{эрг}{стер}$	$\frac{дж}{стер}$	Освечивание $R_c = Rk_c = I_c t$	*св · сек*	

соотношения между ними

LMT Единицы в системе		Атомные величины	LMTI Единицы в системе	
а. э. е.	СИ		а. э. е.	СИ
эрг	*дж*	Поглощенная энергия $W_a = \oint_m D_n dm$	*эрг*	*дж*
			1 рад · *кг* $= 10^{-2}$ *дж*	
$\frac{\text{эрг}}{\text{сек}}$	$\frac{\text{дж}}{\text{сек}}$	Поток частиц или квантов; активность излучателя $N = \frac{dZ}{dt}$	сек^{-1}	сек^{-1}
			кюри	
			1 *кюри* $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ сек^{-1}	
		—	—	—
$\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\,\text{сек}}$	$\frac{\text{вт}}{\text{м}^2}$	Интенсивность спектра квантового излучения $I = \int_{\nu_0}^{\nu} Y_\nu d\nu = \int_{\lambda_0}^{\lambda} Y_\lambda d\lambda$	$\frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{см}^2}$	$\frac{\text{дж}}{\text{сек} \cdot \text{м}^2}$
			$\frac{\text{р} \cdot \text{см}}{\text{сек}} \approx 0{,}11 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\,\text{сек}}$	
$\frac{\text{эрг}}{\text{сек} \cdot \text{см}^2}$	$\frac{\text{вт}}{\text{м}^2}$	Эмиссия частиц или квантов $\nu = \frac{\partial N}{\partial \sigma}$	$\text{сек}^{-1}\,\text{см}^{-2}$	$\text{сек}^{-1}\,\text{м}^{-2}$
		Угловое распределение частиц или квантов излучения $R_r = \frac{\partial Z}{\partial \Omega}$	стер^{-1}	стер^{-1}

Физические величины	$LMT\Omega$ Единицы в системе		Световые величины	$LMTI$ Единицы СИ	Акустические величины
	а. э. е.	СИ			
Поверхностная плотность облучения $D_0 = \int_0^t E dt$	$\frac{эрг}{см^2}$	$\frac{дж}{м^2}$	Количество освещения $D = D_0 k_c = Et$	$лк \cdot сек$	Количество звукового излучения $D_з = \int_0^t I_з dt$
Объемная плотность излучения $w = \frac{dW}{dV}$	$\frac{эрг}{см^3}$	$\frac{дж}{м^3}$	Плотность световой энергии $w_c = \frac{dW_c}{dV}$	$\frac{дж}{м^3}$	Плотность звуковой энергии $w_з = \frac{dW_з}{dV}$
Доза излучения $D = \frac{\partial W_0}{\partial M}$	$\frac{эрг}{г}$	$\frac{дж}{кг}$	Доза световой энергии $D_c = E_c t$ (экспозиция)	$\frac{лм \cdot сек}{м^2}$	—
Мощность дозы излучения $P = \frac{\partial D}{\partial t}$	$\frac{эрг}{г \cdot сек}$	$\frac{дж}{кг \cdot сек}$	$P_c = \frac{\partial D_c}{\partial t}$	$\frac{лм}{м^2}$	Плотность потока звуковой энергии $P_з = \frac{\partial \Phi_з}{\partial V}$
Давление излучения $p = \frac{I}{c}$	$\frac{дин}{см^2}$	$\frac{н}{м^2}$	Световое давление $p = \frac{I_c}{c}$	$\frac{н}{м^2}$	Звуковое давление $p = \frac{I_з}{v}$
Механическое сопротивление $r = \frac{F}{v}$	$\frac{дин \cdot сек}{см}$	$\frac{н \cdot сек}{м}$	Волновое сопротивление $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$ом$	Акустическое сопротивление $R_a = \rho v_з$

Продолжение табл.

LMT Единицы в системе: а. э. е.	LMT Единицы в системе: СИ	Атомные величины	LMTI Единицы в системе: а. э. е.	LMTI Единицы в системе: СИ
$\frac{эрг}{см^2}$	$\frac{дж}{м^2}$	Поверхностное распределение падающих частиц или квантов излучения $D_\sigma = \frac{\partial Z}{\partial \sigma}$	$см^{-2}$	$м^{-2}$
$\frac{эрг}{см^3}$	$\frac{дж}{м^3}$	Экспозиционная доза излучения $w_а = \frac{dW_а}{dV}$ или $D_0 = \frac{\partial W_а}{\partial M_0}$	—	—
			$1_р = 0{,}11\,\frac{эрг}{см^3} = 85\,\frac{эрг}{г}$	
—	—	Доза излучения $D = \frac{\partial W_а}{\partial M}$	$\frac{эрг}{г}$	$\frac{дж}{кг}$
			$1.\ рад = 10^{-2}\,\frac{дж}{кг}$	
$\frac{эрг}{сек \cdot см^3}$	$\frac{вт}{м^3}$	Мощность дозы ионизирующего излучения $P = \frac{\partial D}{\partial t}$	$\frac{рад}{сек}$	$\frac{рад}{сек}$
$\frac{дин}{см^2}$	$\frac{н}{м^2}$	—	—	—
$\frac{дин \cdot сек}{см^5}$	$\frac{н \cdot сек}{м^5}$	—	—	—

Физические величины	$LMT\Omega$ Единицы в системе		Световые величины	$LMTI$ Единицы СИ	Акустические величины
	а. э. е.	СИ			
Фазовая скорость $u_ф = \frac{dl}{dt}$	$\frac{см}{сек}$	$\frac{м}{сек}$	Скорость сигнала, групповая скорость $u_г = u_ф - \lambda \frac{du_ф}{d\lambda}$ $u_г = \frac{d\lambda}{d(\nu/u_ф)}$	$\frac{м}{сек}$	Объемная скорость, акустическая скорость $v_а = v_з S$
Логарифмический декремент затухания $\ln \frac{Y_t}{Y_{t+T}} = \alpha T$	—	—	Оптическая плотность почернения $\lg \frac{I_0}{I}$ Показатель преломления $n_\nu = \frac{c}{v_\nu}$	— —	Уровень звукового давления $L = k \lg \frac{p_з}{p_{з,\,0}}$ $k = 2$ $k = 20$
Частотный интервал $\lg_2 \frac{f_2}{f_1} = 1$	октава				
Спектральная плотность излучения $Y_\nu = \frac{dI}{d\nu}$ $Y_\lambda = \frac{dI}{d\lambda}$	$\frac{эрг}{см^2}$ $\frac{эрг}{сек \cdot см^2}$	$\frac{дж}{м^2}$ $\frac{дж}{сек \cdot м^3}$	Спектральная плотность света $Y_{\nu,\,с} = \frac{dB}{d\nu}$ $Y_{\lambda,\,с} = \frac{dB}{d\lambda}$	$нт \cdot сек$ $\frac{нт}{м}$	Спектральная плотность звука $Y_{\nu,\,з} = \frac{dI_з}{d\nu}$ $Y_{\lambda,\,з} = \frac{dI_з}{d\lambda}$

LMT Единицы в системе а. э. е.	LMT Единицы в системе СИ	Атомные величины	LMTI Единицы в системе а. э. е.	LMTI Единицы в системе СИ
$\frac{см^3}{сек}$	$\frac{м^3}{сек}$	Постоянная распада нуклида $\alpha = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt}$	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$
б дб		Критерий релаксаций $\frac{z}{z_0} = e^{-1}$	—	—
		Период полураспада $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$	сек	сек
$\frac{эрг}{см^2}$ $\frac{эрг}{см^3\ сек}$	$\frac{дж}{м^2}$ $\frac{вт}{м^3}$	Спектральная плотность корпускулярного излучения $z_\varepsilon = \frac{dN}{d\varepsilon}$	$эрг^{-1}$	$дж^{-1}$

Поройков Иван Васильевич

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

Редактор *Е. С. Гридасова*
Художник *М. Ф. Колосс*
Технический редактор *С. В. Швецов*
Корректор *Л. З. Черникова*

Т-06051. Сдано в набор 3/IX 1964 г. Подписано к печати 15/V 1965 г. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$.
Объем 31 печ. л. Уч.-изд. л. 30,04. Изд. № ФМХ/111. Тираж 28000 экз. Заказ № 1246.
Цена 1 р.

Москва, И-51, Неглинная ул., д. 29/14.
Издательство «Высшая школа»

Сводный тематический план 1965 г. учебников для вузов и техникумов. Позиция № 272

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Главполиграфпрома»
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Гатчинская, 26.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
30	13 снизу	$\lambda_p = 0$	$\lambda_p \to 0$
107	12 сверху	(15,3)	(15,4)
107	15 сверху	$\dfrac{\int_0^\infty n_u \cdot u \cdot du}{n_u \cdot du}$	$\dfrac{\int_0^\infty u \cdot n_u \cdot du}{\int_0^\infty n_u \cdot du}$
111	10 сверху	$\dfrac{\int_0^\infty u\, dn_u}{\int_0^\infty dn_u}$	$\dfrac{\int_0^\infty u \cdot n_u \cdot du}{\int_0^\infty n_u \cdot du}$
111	12 сверху	$\sqrt{\dfrac{\int_0^\infty u^2 \cdot dn_u}{\int_0^\infty dn_u}}$	$\sqrt{\dfrac{\int_0^\infty u^2 \cdot n_u \cdot du}{\int_0^\infty n_u \cdot du}}$
123	18—19 сверху	свободной энергией	термодинамическим потенциалом
163	11—12 снизу	до 6 $\dfrac{кал}{град \cdot моль}$ при $T \geqslant \Theta = T_Д$	до 0,46 $\dfrac{кал}{град \cdot моль}$ при $T = 0{,}1\ \Theta$.
163	1 снизу	$T^\circ \leqslant \dfrac{1}{50}\,\Theta$	$T \leqslant 0{,}1\ \Theta$ (с точностью до 1%).

И. В. Поройков — 1246

1 руб.

ВЫСШАЯ ШКОЛА · 1965

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ